УДК 513.8+517.4

Ф. С. РОФЕ-БЕКЕТОВ

ЧИСЛОВАЯ ОБЛАСТЬ ЛИНЕЙНОГО ОТНОШЕНИЯ И МАКСИМАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

1. Пусть θ — линейное бинарное отношение в гильбертовом пространстве H, т. е.

$$x\theta x' \leftrightarrow \{x, x'\} \in G_\theta \subset H \oplus H; \ x, \ x' \in H,$$

где G_θ — некоторое линейное многообразие в $H \oplus H$ (график отношения θ). Областью определения D_θ и областью значений R_θ отношения θ называются, соответственно, множество первых и множество вторых компонент элементов $\{x, x'\} \in G_\theta$. Положим $\theta(x) = \{x' \in H : x\theta x'\}$. Условие $\theta(0) = \{0\}$ необходимо и достаточно для того, чтобы отношение θ было (однозначным) оператором $T: D_\theta \to H$, т. е. чтобы $x\theta x' \leftrightarrow x' = Tx$, $D_T = D_\theta$.

Определение 1. *Числовой областью значений линейного отношения* θ *в* H *называется множество* $W(\theta) \subset \mathbf{C}$ *значений* *скалярного произведения (x', x) при всевозможных $x\theta x'$, $\|x\|=1$.*

По теореме Хаусдорфа числовая область значений произвольного линейного оператора T в H есть выпуклое множество в $\boldsymbol{C}$ (замкнутое, если $\dim H < \infty$).

Теорема 1. *Числовая область значений $W(\theta)$ произвольного линейного отношения θ в H есть выпуклое множество в комплексной плоскости (при $\dim D_\theta < \infty$ замкнутое и ограниченное, либо $= \boldsymbol{C}$).*

Доказательство. Модифицируя рассуждения из [1, с. 120], положим, что λ_1, $\lambda_2 \in W(\theta)$, т. е. существуют $x_1\theta x_1'$, $x_2\theta x_2'$ такие, что $\lambda_1 = (x_1', x_1)$ $\lambda_2 = (x_2', x_2)$ $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$. Пусть x_1, x_2 линейно независимы и P — ортопроектор на их линейную оболочку E. Зададим в E линейный оператор T условиями $Tx_1 = Px_1'$, $Tx_2 = Px_2'$. Тогда $\lambda_1 = (Tx_1, x_1)$, $\lambda_2 = (Tx_2, x_2)$ и по теореме Хаусдорфа для двумерного случая при любом λ из отрезка, соединяющего точки λ_1 и λ_2, найдется такой нормированный вектор $x = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2$, что $\lambda = (Tx, x)$, т. е. $\lambda = (P(\alpha_1x_1' + \alpha_2x_2'), \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) = (\alpha_1x_1' + \alpha_2x_2', \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)$, причем $(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)\theta(\alpha_1x_1' + \alpha_2x_2')$ в силу линейности отношения θ и, значит, $\lambda \in W(\theta)$, и в случае линейной независимости x_1, x_2 выпуклость $W(\theta)$ доказана.

Пусть теперь x_1, x_2 коллинеарны, но $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Этот случай возможен лишь для отношений, а для операторов не имеет места. Имеем $x_2 = \alpha x_1$ при некотором $\alpha \in \boldsymbol{C}$, $|\alpha| = 1$. Поэтому $(\alpha x_1)\theta x_2'$ и $(\alpha x_1)\theta(\alpha x_1')$, откуда следует $0\theta(x_2' - \alpha x_1')$, причем $(x_2' - \alpha x_1', x_1) \neq 0$, так как иначе было бы $\lambda_1 = (\alpha x_1', \alpha x_1) = (x_2', \alpha x_1) = \lambda_2$. Обозначим $h = x_2' - \alpha x_1'$. Имеем $0\theta h$, $(h, x_1) \neq 0$, $x_1 \in D_\theta$. Отсюда вытекает $W(\theta) = \boldsymbol{C}$ по следующей лемме.

Лемма 1. *Если $0\theta h$ и $h \notin D_\theta^\perp = H \ominus \bar{D}_\theta$, то $W(\theta) = \boldsymbol{C}$. Если $W(\theta) \neq \boldsymbol{C}$, то $\theta(0) \perp D_\theta$.*

Доказательство леммы. Если $0\theta h$ и $h \notin D_\theta^\perp$, то найдется $x \in D_\theta$, $\|x\| = 1$, такой, что $(h, x) \neq 0$. Но тогда $x\theta x'$ при некотором $x' \in H$, а потому при любом $\zeta \in \boldsymbol{C}$ $x\theta(x' + \zeta h)$ и $W(\theta) \supset \{(x' + \zeta h, x), \forall\zeta \in \boldsymbol{C}\} = \boldsymbol{C}$.

Лемма доказана. Для завершения доказательства теоремы заметим, что если $\dim D_\theta < \infty$, то либо $\theta(0) \not\subset D_\theta^\perp$, и тогда $W(\theta) = \boldsymbol{C}$ по лемме, либо $\theta(0) \perp D_\theta$, и тогда $W(\theta)$ замкнуто и ограничено в $\boldsymbol{C}$ как непрерывный образ компакта — единичной сферы в конечномерном пространстве при отображении $x \to (Tx, x)$ (здесь условием $Tx = Px'$, где $x\theta x'$ и P — ортопроектор на $\bar{D}_\theta$, определен оператор $T: D_\theta \to D_\theta$, так как $\theta(0) \perp D_\theta$). Теорема доказана полностью.

Отношение θ_1 называется расширением отношения θ, если $x\theta x' \Rightarrow x\theta_1 x'$, и собственным расширением, если $G_{\theta_1} \neq G_\theta$. Замыканию отношения отвечает замыкание его графика.

Отношение θ называется эрмитовым (-самосопряженным) [2], если из $x\theta x'$, $y\theta y'$ следует $(x', y) - (x, y') = 0$ (1) и если из справедливости (1) для некоторой пары $x, x' \in H$ при всевозможных

$y\theta y'$ следует $x\theta x'$. Всякое эрмитово отношение эквивалентно уравнению $\cos A \cdot x' - \sin A \cdot x = 0$ (2) с некоторым оператором $A = A^*$, $\|A\| \leqslant \pi/2$, а также уравнению $(U - I)\, x' + i\,(U + I)\, x = 0$ (3) с унитарным оператором $U = U_\theta$ (называемым преобразованием Кэли отношения θ). Оператор $U = -e^{2iA}$ отношением θ определяется однозначно. Всякое отношение (2) или (3) эрмитово [2] при любом $A = A^*$. Для эрмитова отношения, очевидно, $W(\theta) \subset \boldsymbol{R}$.

Отношение θ называется диссипативным [3], если $W(\theta) \subset \boldsymbol{C}^+ = \{\zeta \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Im} \zeta \geqslant 0\}$, аккумулятивным, если $W(\theta) \subset \boldsymbol{C}^-$, $(\operatorname{Im} \zeta \leqslant 0)$, аккретивным, если $W(\theta) \subset \{\zeta \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Re} \zeta \geqslant 0\}$, симметрическим при условии (1), т. е. при $W(\theta) \subset \boldsymbol{R}$. Если диссипативное отношение не имеет собственных диссипативных расширений, оно называется максимально-диссипативным (m-диссипативным). Аналогично определяется m-аккретивное отношение и т. д.

Как показано в работе [3], если $U \in B(H)$ — сжатие ($\|U\| \leqslant 1$), уравнением (3) определяется m-диссипативное отношение и всякое m-диссипативное отношение представимо в таком виде. Отношение (3) максимально симметрическое, если оператор U изометричен.

По аналогии с операторами [4] отношение θ называем [5] секториальным, если $W(\theta)$ содержится в секторе комплексной ζ-плоскости $|\arg(\zeta - \gamma)| \leqslant \varphi < \pi/2$, $\gamma \in \boldsymbol{R}$ (4), и m-секториальным, если оно не имеет собственных расширений с числовой областью значений в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta \geqslant \alpha$ ни при каком $\alpha \in \boldsymbol{R}$. γ и φ называются вершиной и полууглом секториального отношения (они определены неоднозначно).

Определение 2. *Пусть дано некоторое замкнутое множество $K \subset \boldsymbol{C}$, $K \neq \boldsymbol{C}$. Оператор $T : D_T \to \overline{D}_T \subset H$ называем K-максимальным в $\overline{D}_T$, если $W(T) \subset K$ и T не имеет собственных расширений T_1 в $\overline{D}_T$ таких, что $W(T_1) \subset K$. Аналогично линейное отношение θ в H называем K-максимальным, если $W(\theta) \subset K$ и отношение θ не имеет собственных расширений θ_1 таких, что $W(\theta_1) \subset K \neq \boldsymbol{C}$.*

Пример 1. Оператор $\Lambda y = -iy'$, $y(0) = 0$, $0 \leqslant t < \infty$ является K-максимальным в $L^2(0, \infty)$ при $K = \boldsymbol{R}$ и при $K = \boldsymbol{C}^-$ (максимальный симметрический, соответственно, m-аккумулятивный оператор), однако он не является K-максимальным при $K = \boldsymbol{C}^+$ (m-диссипативным), ибо допускает собственное диссипативное (максимальное) расширение $\Lambda_1 = \Lambda^*$ в $L^2(0, \infty) : \Lambda \subset \Lambda_1 \neq \Lambda$, $\Lambda_1 y = -iy'$, $\operatorname{Im}(\Lambda_1 y, y) = |y(0)|^2/2 \geqslant 0$.

Теорема 2. *Для того чтобы линейное отношение θ в H было бы K-максимальным, $W(\theta) \subset K = \overline{K} \neq \boldsymbol{C}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал K-максимальный в $\overline{D}_\theta$ оператор $T : D_T = D_\theta \to \overline{D}_\theta$ такой, что*

$$x\theta x' \Leftrightarrow x' - Tx \in D_\theta^\perp, \quad R_T \subset \overline{D}_\theta. \tag{5}$$

Соответствие $\theta \sim T$ в силу (5) взаимно однозначно*. Оператор T и отношение θ замкнуты, $W(T)=W(\theta)$. (Эта теорема обобщает представление эрмитовых отношений, установленное следствием теоремы 1 из [2] и m-секториальных отношений [5]).

Лемма 2. *Если отношение* θ *К-максимально при каком-нибудь* $K \supset W(\theta)$, *то из* $y \perp D_\theta$ *следует* $0\theta y$, *т. е.* $D_\theta^\perp \subset \theta(0)$.

Доказательство леммы. Если $0\theta y$ не имеет места при некотором $y \perp D_\theta$, то отношение θ_1, заданное условием

$$x\theta_1 x' \leftrightarrow \exists \zeta \in \boldsymbol{C}: x\theta(x'-\zeta y), \quad (6)$$

оказалось бы собственным расширением отношения θ, причем $W(\theta_1)=W(\theta)\subset K$ в силу (6), так как $(x', x)=(x'-\zeta y, x)$, ибо $y \perp D_\theta$, $x \in D_\theta$. Мы пришли к противоречию с условием K-максимальности отношения θ. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Из леммы 1 и леммы 2 имеем для K-максимального отношения θ в H, что $0\theta y \leftrightarrow y \perp D_\theta$; $\theta(0)=D_\theta^\perp$ (7). Обозначим P ортопроектор из H на $\overline{D}_\theta$. Тогда условием $x\theta x' \leftrightarrow Tx=Px'$ (8) на D_θ определен в силу (7) оператор $T{:}D_T=D_\theta \to \overline{D}_\theta \subset H$, удовлетворяющий (5), а потому и $W(T)=W(\theta)$. Если бы T имел собственное расширение T_1 в $\overline{D}_\theta$, для которого $W(T_1)\subset K$, то этим расширением по формуле (5) порождалось бы собственное расширение θ_1 отношения θ, для которого было бы $W(\theta_1)\subset K$, что не допускается условиями теоремы. Значит, оператор T K-максимален в $H_1=\overline{D}_\theta\subset H$. А так как он определен на плотном в H_1 множестве и $W(T)\neq \boldsymbol{C}$, то он замыкаем в силу теоремы V. 3.4. из [4, с. 337], а потому и замкнут, так как иначе его замыкание $T^{\sim}$ оказалось бы его собственным расширением в H_1 с $W(T^{\sim})\subset\overline{W(T)}\subset\overline{K}=K$. Аналогично является замкнутым и K-максимальное отношение θ в силу $\overline{W(\theta)}\subset K\neq\boldsymbol{C}$. Равенство $W(T)=W(\theta)$ очевидно в силу (5). Необходимость условий теоремы доказана. Проверим их достаточность, т. е. K-максимальность отношения θ в H, порожденного по формуле (5) K-максимальным в $\overline{D}_T$ оператором T. Имеем $W(\theta)=W(T)\subset K$. Допустим, что существует $\theta_1\supset\theta$ — собственное расширение с $W(\theta_1)\subset K$ и пусть $x_1\theta_1 x_1'$, но не $x_1\theta x_1'$. Тогда $\overline{D}_{\theta_1}=\overline{D}_\theta$, так как иначе не было бы $D_{\theta_1}\perp\theta_1(0)\supset\theta(0)$ и по лемме 1 оказалось бы $W(\theta_1)=\boldsymbol{C}$, вопреки условию. Поэтому $(x_1', x_1)=(Px_1', x_1)\in K$, где P — ортопроектор на $\overline{D}_\theta$. При этом $x_1\notin D_T=D_\theta$, иначе было бы $x_1\theta(Tx_1)$ и $Px_1'\neq Tx_1$ (так как $\{x_1, x_1'\}\notin G_\theta$), а отсюда $x_1\theta_1(Tx_1)$, $x_1\theta_1(Px_1')$ и $0\theta_1(Tx_1-Px_1')$, $0\neq Tx_1-Px_1'\in\overline{D}_{\theta_1}$, что по лемме 1 привело бы к $W(\theta_1)=\boldsymbol{C}$, вопреки условию. Следовательно, полагая $T_1\supset T$, $T_1x_1=Px_1'$, мы получили бы собственное расширение T_1 оператора

---

* Если θ (5) K — максимально, то $R_\lambda(\theta)=(T-\lambda)^{-1}P_\theta$, P_θ ортопроектор на $\overline{D}_\theta$.

T в $\bar{D}_T$, причем $W(T_1) \subset K$, вопреки K-максимальности T в $\bar{D}_\theta$. Теорема доказана.

Следствие 1 ([5]). *Отношение θ m-секториально в H, если и только если существует m-секториальный в $\bar{D}_\theta$ оператор $T: D_T = D_\theta \to \bar{D}_\theta$ такой, что $W(T) = W(\theta)$ и справедливо* (5).

2. Опираясь на предыдущие рассмотрения, распространим понятие расширения по Фридрихсу секториальных плотно заданных операторов [4] на секториальные отношения и, в частности, на секториальные операторы с неплотной в H областью определения. (Отметим, что симметрические полуограниченные отношения являются частным случаем секториальных. Об их фридрихсовых расширениях см. работы [5, 6] и более ранние работы А. В. Штрауса, базирующиеся на теории М. Г. Крейна расширения полуограниченных операторов).

Как показано в лемме 1, если $W(\theta) \neq C$, то $\theta(0) \perp D_\theta$. Поэтому каждое линейное отношение θ с $W(\theta) \neq C$ порождает по формуле (8) оператор T, который в свою очередь по формуле $x\theta_1 x' \leftrightarrow x' - Tx \in D_\theta^\perp$, $R_T \subset \bar{D}_\theta$, (9) порождает отношение $\theta_1 \supset \theta$, $D_{\theta_1} = D_\theta$ и $\theta_1(0) = D_\theta^\perp \supset \theta(0)$, $W(\theta_1) = W(\theta) = W(T)$.

Если θ — секториальное отношение в H, то оператор T секториален и плотно задан в $H_1 = \bar{D}_\theta$, а потому допускает в H_1 фридрихсово m-секториальное расширение T^{F_1} [4, гл. VI, § 2], которое строится путем замыкания в H_1 квадратичной формы (Tx, x), $x \in D_\theta$, а потому $W(T^{F_1}) \subset \overline{W(T)} = \overline{W(\theta)}$, $R_{T^{F_1}} \subset H_1 = \bar{D}_\theta$.

По формуле (5) с T^{F_1} вместо T определяем m-секториальное отношение $\theta^F \supset \theta$, $W(\theta^F) \subset \overline{W(\theta)}$. θ^F называем фридрихсовым расширением (в H) секториального отношения θ.

Всякому секториальному отношению θ в H отвечает квадратичная замыкаемая секториальная форма: $a_\theta(x) = (x', x)$, $x\theta x'$. Эта форма не зависит от выбора вектора x', так как $\theta(0) \perp D_\theta$ и $a_\theta(x) = (Tx, x)$, $x \in D_\theta$.

Теорема 3. *Среди всех возможных m-секториальных расширений секториального отношения θ в H существует единственное с областью определения, содержащейся в области определения замыкания квадратичной формы $a_\theta(x)$. Оно же является единственным, замыкание квадратичной формы которого имеет наименьшую область определения, т. е. содержащуюся в области определения замыкания формы, отвечающей любому другому m-секториальному расширению отношения θ. Это отношение есть построенное выше фридрихсово расширение θ^F отношения θ.*

Доказательство теоремы следует из предыдущих построений и из теорем VI.2.10 и VI.2.11 [4, с. 409].

Следствие 2. *Если $T: D_T \to H$ — секториальный оператор с неплотной в H областью определения (включение $R_T \subset \bar{D}_T$ не предполагается), то его фридрихсово расширение в H является m-секториальным отношением T^F, порожденным формулой*

$xT^F x' \leftrightarrow x' - (PT)^{F_1} x \in D_T^{\perp}$, *где* P — *ортопроектор на* $\bar{D}_T$, F_1 *означает расширение по Фридрихсу оператора в подпространстве* $H_1 = \bar{D}_T$, F — *расширение по Фридрихсу в* H. *Для резольвенты фридрихсова расширения* T^F *при* $\lambda \in C \setminus \overline{W(T)}$ *имеет место формула* $R_\lambda(T^F) = R_\lambda^{(1)}((PT)^{F_1}) P$, *где* $R_\lambda^{(1)}(A)$ — *резольвента оператора* A *в* H_1, *оказывающаяся ограниченным при* $\lambda \notin \overline{W(A)}$ *оператором.* (*T^F сводится к оператору лишь при* $H_1 = H$. Ограниченность резольвенты следует из теоремы 42 [1, с. 119]).

Замечание 1. Используя известный факт существования m-диссипативных расширений у диссипативного оператора, теорему 2 и формулу (9), легко показать наличие m-диссипативных расширений у любого диссипативного отношения (что, впрочем, тоже известно).

3. Рассмотрим теперь вопрос, когда является эрмитовым отношение θ, порождаемое уравнением $x\theta x' \leftrightarrow Cx' - Bx = 0$ (**10**) с неограниченными операторами B и C.

В этом случае естественно также рассматривать и вопрос об эрмитовости замыкания $\theta^{\sim}$ отношения θ (10). Простейшими примерами являются: 1) $x' - Bx = 0$, где $B = B^*$ — неограниченный оператор. Здесь отношение $x\theta x'$ эрмитово; 2) $Bx' - Bx = 0$, где B — инъективный, плотно заданный в H оператор с $D_B \neq H$. В этом случае отношение $x\theta x'$ не является эрмитовым, но его замыкание $\theta^{\sim}$эрмитово, а именно эквивалентно уравнению $x' = x$ (θ можно назвать в этом случае «существенно эрмитовым»).

Наряду с отношением θ (10) введем его сужение $\theta_1 \subset \theta$: $x\theta_1 x' \leftrightarrow$ $\leftrightarrow C_1 x' - B_1 x = 0$ (**11**), где $B_1 \subset B$, $D_{B_1} = D_B \cap (D_C \oplus D_C^{\perp})$, $C_1 \subset C$, $D_{C_1} = D_C \cap (D_B \oplus D_B^{\perp})$ (**12**).

Теорема 4. *Пусть* B *и* C *в* (10) — *произвольно заданные линейные операторы, возможно, неограниченные, незамкнутые* и с неплотными в* H *областями определения* D_B *и* D_C, *действующие из* H *в произвольное линейное пространство* E.

Следующие условия 1—4 необходимы для того, чтобы отношение θ, *определенное уравнением (10), было эрмитовым, и достаточны для того, чтобы было эрмитовим замыкание* $\theta_1^{\sim}$ *отношения* $\theta_1 \subset \theta$, *определенного в (11), (12) (очевидно,* $\theta_1^{\sim} \subset \theta^{\sim}$):

$$1.\ D_B^{\perp} \subset \operatorname{Ker} C,\quad D_C^{\perp} \subset \operatorname{Ker} B.\quad 2.\ \overline{D_B \cap D_C} = \bar{D}_B \cap \bar{D}_C.$$

Операторы $B \pm iC$ *обратимы на своих областях значений (инъективны),*

4. Замыкание $U_1^{\sim}$ *оператора* U_1,

$$U_1 = (B + iC)^{-1} (B - iC) \tag{13}$$

в подпространстве $H_1 = \overline{D_B \cap D_C}$ *существует и унитарно.*

---

* Если E таково, что эти понятия имеют смысл, например топологическое.

При этих условиях оператор

$$U = U_{\tilde{1}} \oplus I_{D_B^\perp} \oplus (-I_{D_C^\perp}) \tag{14}$$

унитарен и является преобразованием Кэли отношения $\theta_{\tilde{1}}$, которое может быть представлено через U (14) в форме (3).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть отношение θ (10) эрмитово. Тогда оно $\boldsymbol{R}$-максимально, и по лемме 2 имеем $D_\theta^\perp \subset \subset \theta(0)$, откуда $D_B^\perp \subset D_\theta^\perp \subset \theta(0) = \operatorname{Ker} C$. Так как θ (10) — эрмитово, то эрмитово и обратное отношение $Bx' - Cx = 0$, откуда $D_C^\perp \subset \operatorname{Ker} B$ и 1 доказано.

Докажем 2. В силу (2), где $A = A^*$, $\|A\| \leqslant \pi/2$, эрмитово отношение θ представимо в параметрическом виде: $x = \cos A \cdot h$, $x' = \sin A \cdot h$, $\forall h \in H$, откуда видно, что $D_B \supset R_{\cos A}$, $D_C \supset R_{\sin A}$.

Пусть $E(t)$ — разложение единицы оператора A. Положим

$$H_c = E([-\pi/4,\ \pi/4])\, H,$$
$$H_s = E([-\pi/2,\ -\pi/4) \cup (\pi/4,\ \pi/2])\, H.$$

Легко видеть, что

$$H_c \subset R_{\cos A} \subset D_B;\ H_s \subset R_{\sin A} \subset D_C, \tag{15}$$
$$H_c \oplus H_s = H,\ H_s = H_c^\perp. \tag{16}$$

Действительно, если, например, $h \in H_c$, то $h = \cos A \cdot g$, где $g = \int\limits_{-\pi/4-0}^{\pi/4+0} (1/\cos t)\, dE(t)\, h$ и, значит, $h \in R_{\cos A}$, $H_c \subset R_{\cos A}$.

Обозначим P_c и $P_s = P_c^\perp$ ортопроекторы на H_c и на H_s соответственно.

В силу (15) имеем

$$D_B = H_c \oplus P_s D_B = H_c \oplus L_s,\ D_C = H_s \oplus P_c D_C = H_s \oplus L_c \quad (17),$$

где H_c, H_s — подпространства (16), они замкнуты, а $L_s \subset H_s$, $L_c \subset H_c$ — некоторые линейные многообразия. Из (17) имеем $D_B \cap \cap D_C = L_s \oplus L_c$, $\overline{D_B \cap D_C} = \overline{L_s \oplus L_c} = \bar{L}_s \oplus \bar{L}_c$.

С другой стороны,

$$\bar{D}_B = \overline{H_c \oplus L_s} = H_c \oplus \bar{L}_s,\ \bar{D}_C = \overline{H_s \oplus L_c} = H_s \oplus \bar{L}_c,$$

откуда

$$\bar{D}_B \cap \bar{D}_C = \bar{L}_s \oplus \bar{L}_c.$$

Таким образом,

$$\overline{D_B \cap D_C} = \bar{D}_B \cap \bar{D}_C,$$

что и требовалось.

Докажем 3. Если, например, $(B + iC)x = 0$, то $Cx - B(ix) = = 0$, т. е. $(ix)\theta x$, откуда следует $x = 0$, так как $W(\theta) \subset \boldsymbol{R}$. Значит, оператор $B + iC$ инъективен. Инъективность $B - iC$ устанавливается аналогично.

Докажем 4. В силу инъективности операторов $B \pm iC$ существует (и инъективен) оператор $U_1 = (B + iC)^{-1}(B - iC)$. Очевидно, $D_{U_1} \subset D_B \cap D_C$, $R_{U_1} \subset D_B \cap D_C$.

Докажем, что здесь справедливы равенства, а не только включения, и что U_1 — изометричен. Пусть $f = U_1 h$ при некотором $h \in D_B \cap D_C$, откуда

$$(B + iC) f = (B - iC) h \tag{18}$$

или $C(i(f+h)) - B(h-f) = 0$, т. е. $(h - f)\,\theta\,(i(h+f))$ (19)

Подставляя в (3) $U = U_\theta$,

$$x = h - f, \quad x' = i(h + f) \tag{20}$$

получим $f = U_\theta h$, т. е. $U_1 \subset U_\theta \mid (D_B \cap D_C)$. Поэтому U_1 изометричен и допускает замыкание $\tilde{U_1}$, унитарность которого в подпространстве $H_1 = \overline{D_B \cap D_C}$ будет установлена, если показать, что

$$U_\theta (D_B \cap D_C) = D_B \cap D_C \tag{21}$$

Действительно, тогда при $h \in D_B \cap D_C$ будет $U_\theta h = f \in D_B \cap D_C$ и найдется такая пара x, $x' \in H$, $x \theta x'$, что справедливо (20), а потому и (18), т. е. $U_\theta \upharpoonright (D_B \cap D_C) \subset U_1$, а значит, $U_1 = U_\theta \upharpoonright (D_B \cap D_C)$, откуда $\tilde{U_1} = U_\theta \upharpoonright H_1$, $D_{\tilde{U_1}} = R_{\tilde{U_1}} = H_1 = \overline{D_B \cap D_C}$, т. е. $\tilde{U_1}$ в H_1 унитарен.

Итак, осталось доказать (21). Имеем из (2), (3), что $U_\theta = -e^{2iA}$. Поэтому при любом $h \in H$ $(U_\theta - I) h = -2 \cos A \cdot e^{iA} h \in R_{\cos A} \subset D_B$, $(U_\theta + I) h = -2 i \sin A \cdot e^{iA} h \in R_{\sin A} \subset D_C$. Значит, если $h \in D_B$, то и $U_\theta h = (U_\theta - I) h + h \in D_B$, т. е. $U_\theta D_B \subset D_B$. Аналогично $U_\theta^{-1} D_B \subset D_B$, а потому $U_\theta D_B = D_B$. Точно так же $U_\theta D_C = D_C$, а потому $U_\theta (D_B \cap D_C) = (U_\theta D_B) \cap (U_\theta D_C) = D_B \cap D_C$, и необходимость всех условий теоремы доказана.

Достаточность. Положим

$$U' = U_1 \oplus I_{D_B^\perp} \oplus (-I_{D_C^\perp}), \tag{22}$$

где U_1 определен формулой (13), и рассмотрим линейное отношение $x\rho x'$, заданное уравнением $x \rho x' \leftrightarrow (U' - I) x' + i (U' + I) x = 0$ (23). Имеем:

$$U' - I = (U_1 - I)_{D_B \cap D_C} \oplus 0_{D_B^\perp} \oplus (-2 I_{D_C^\perp});$$

$$U' + I = (U_1 + I)_{D_B \cap D_C} \oplus 2 I_{D_B^\perp} \oplus 0_{D_C^\perp}.$$

Поэтому, если $x\rho x'$, то

$$P_{D_B^\perp} x = 0, \; P_{D_C^\perp} x' = 0, \; P_{H_1} x \in D_B \cap D_C, \; P_{H_1} x' \in D_B \cap D_C,$$

$$(U' - I) x' \in D_B \cap D_C, \; (U' + I) x \in D_B \cap D_C.$$

Таким образом, умножая (23) на инъективный оператор $B+iC$ с областью определения $D_B \cap D_C$, мы получим эквивалентное уравнение:

$$(\{(B-iC)-(B+iC)\}_{D_B \cap D_C} \oplus 0_{D_B^\perp})\, x' +$$
$$+ i\,(\{(B-iC)+(B+iC)\}_{D_B \cap D_C} \oplus 0_{D_C^\perp})\, x = 0,$$

порождающее отношение ρ в H. Это уравнение можно записать в виде $x\rho x' \leftrightarrow (C \uparrow (D_B \cap D_C) \oplus 0_{D_B^\perp})\, x' - (B \uparrow (D_B \cap D_C) \oplus$ $\oplus\, 0_{D_C^\perp})\, x = 0$.

Но так как по условию 1, $D_B^\perp \subset \operatorname{Ker} C$, $D_C^\perp \subset \operatorname{Ker} B$, то

$$C \uparrow (D_B \cap D_C) \oplus 0_{D_B^\perp} = C \uparrow (D_B \cap D_C \oplus D_B^\perp) =$$
$$= C \uparrow \{D_C \cap (D_B \oplus D_B^\perp)\} = C_1, \quad B \uparrow (D_B \cap D_C) \oplus 0_{D_C^\perp} = B_1,$$

(см. (12)), а поэтому $\rho = \theta_1 \subset \theta$, $\rho^\sim = \theta_1^\sim \subset \theta^\sim$.

Заметим, что ρ (23) представимо в параметрической форме:

$$x' = -i\,(U' + I)\, h, \quad x = (U' - I)\, h,$$
$$\forall h \in D_B \cap D_C \oplus D_B^\perp \oplus D_C^\perp = D_{U'},$$

причем $h = (ix' - x)/2$, а оператор U' ограничен. Поэтому замыкание $\rho^\sim$ получается переходом от U' к $U'^\sim$ в параметрическом представлении отношения ρ, а потому и в (23):

$$x\rho^\sim x' \leftrightarrow (U'^\sim - I)\, x' + i\,(U'^\sim + I)\, x = 0.$$

Легко видеть, что оператор $U'^\sim$ (22) унитарен в H, ибо по условию $U_1^\sim$ унитарен в

$$H_1 = \overline{D_B \cap D_C} = \bar{D}_B \cap \bar{D}_C,$$

и так как

$$D_B \cap \bar{D}_C \oplus D_B^\perp \oplus D_C^\perp = H.$$

Таким образом, отношение $\rho^\sim$, т. е. $\theta_1^\sim$, — эрмитово и его преобразованием Кэли является

$$U'^\sim = U_1^\sim \oplus I_{D_B^\perp} \oplus (-I_{D_C^\perp}) = U,$$

чем свойства оператора U (14), достаточность условий теоремы и вся теорема 4 доказаны.

(Заметим, что доказанная теорема была анонсирована в работе [2, теорема 3] не вполне точно).

В заключение приведем пример, показывающий, что замыкание отношения θ (10), а не его сужения θ_1 (11), (12) может оказаться при условиях теоремы 4 шире, чем эрмитово отношение, т. е. не быть эрмитовым, но содержать его в качестве своего сужения. Действительно, пусть B — плотно заданный в H обратимый оператор, $D_B \neq H$, $C \supset B$ — его собственное расширение, такое, что

D_C есть линейная оболочка D_B и $h \notin D_B$, и пусть $Ch = 0$. Тогда все условия теоремы 4 выполнены, но $0\theta h$ в силу (10), а $D_\theta = D_B$ плотно в H и по лемме 1 $W(\theta) = \boldsymbol{C}$, так что θ не является даже симметрическим отношением. В то же время $x\theta_1^{\sim}x' \leftrightarrow x' = x$ — эрмитово отношение.

Список литературы: 1. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. — М.: ГИФМЛ, 1963. — 340 с. 2. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций. — Докл. АН СССР, 1969, **184**, № 5, с. 1034—1037. 3. *Горбачук М. Л., Кочубей А. Н., Рыбак М. А.* Диссипативные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций. — Докл. АН СССР, 1972, 205, № 5, с. 1029—1032. 4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. —М.: Мир, 1972.—740 с. 5. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Возмущения и расширения по Фридрихсу полуограниченных операторов на переменных областях. — Докл. АН СССР, 1980, 255, № 5, с. 1054 — 1058. 6. *Coddington E. A., de Snoo H. S. V.* Positive selfadjoint extensions of positive symmetric subspaces.— Math. Z., 1978, v. 159, p. 203—214.

Поступила в редколлегию 28.01.84.