УДК 517.968

ПОЛЯНСКАЯ Т. С.

К РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА СИСТЕМЕ ОТРЕЗКОВ

1. Ряд смешанных краевых задач математической физики приводит к следующему сингулярному интегральному уравнению на системе интервалов [I]:

$$\int_E \frac{F(y)}{y-x}\,dy + \int_E K(x, y)\,F(y)\,dy = f(x), \quad x \in E, \tag{1}$$

где $E = \bigcup_{k=1}^{m} (a_k, b_k)$, $\quad -\infty < a_1 < b_1 < \cdots < a_m < b_m < \infty$, $\quad f(x)$, $x \in \bar{E}$ μ раз непрерывно дифференцируема и $f^{(\mu)}(x) \in H(\gamma)$, $(f(x) \in C_{\bar{E}}^{\mu,\gamma})$, $K(x, y) \in C_{\bar{E}}^{\mu,\gamma}$ по каждой из переменных равномерно относительно другой переменной.

Решение $F(y)$, $y \in \bar{E}$ ищется в классе функций, представимых в виде

$$F(y) = \Phi(y) \prod_{k=1}^{m} |b_k - y|^{\alpha_k} |y - a_k|^{\beta_k}, \quad y \in E,$$

где $\alpha_k = \pm \frac{1}{2}$, $\beta_k = \pm \frac{1}{2}$, $\quad (k = 1, \ldots, m)$ — заданные числа, $\Phi(y) \in H$, $y \in \bar{E}$. Обозначим $\bar{\varkappa} = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m)$ — индекс уравнения (1). Если $\varkappa_k = 1$, то требуем выполнения условия

$$\int_{a_k}^{b_k} F(y)\, dy = 0. \tag{2}$$

Случай $\varkappa_i = 0$ будем рассматривать только при $\alpha_i = \frac{1}{2}$, $\beta_i = -\frac{1}{2}$.

Обозначим $f_k(x) \equiv f(x)|_{x \in (a_k, b_k)}$; $F_k(y) \equiv F(x)|_{y \in (a_k, b_k)} = u_k(y) \times \times (b_k - y)^{\alpha_k} (y - a_k)^{\beta_k}$, $y \in (a_k, b_k)$, $k = 1, \ldots, m$.

Производя в каждом из интегралов по интервалам (a_k, b_k), замену переменных [2] g_k: $(-1, 1) \to (a_k, b_k)$: $\tau \mapsto ((b_k - a_k)/2)\tau + (b_k + a_k)/2$ и вводя обозначения $\rho_{\varkappa_i}(\tau) = (1 - \tau)^{\alpha_i} (1 + \tau)^{\beta_i}$;

$$v_i(t) = u_i(g_i(t)); \; Q_{ik}(t, \tau) = \left[\frac{1}{g_k(\tau) - g_i(t)} (1 - \delta_{ik}) + \right.$$
$$\left. + K(g_i(t), g_k(\tau))\right] \left(\frac{b_k - a_k}{2}\right)^{1-\varkappa_k} \left(\frac{b_i - a_i}{2}\right)^{\varkappa_i},$$
$$h_i(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{b_i - a_i}{2}\right)^{\varkappa_i} f_i(g_i(t)); \; i, k = 1, \ldots, m,$$

(δ_{ik} — символ Кронекера), получаем систему

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{v_i(\tau)}{\tau - t} \rho_{\varkappa_i}(\tau)\, d\tau + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} Q_{ik}(t, \tau)\, v_k(\tau)\, \rho_{\varkappa_k}(\tau)\, d\tau =$$
$$= h_i(t), \; t \in (-1, 1), \; i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

$$\eta(\varkappa_k) \int_{-1}^{1} v_k(\tau)\, \rho_{\varkappa_k}(\tau)\, d\tau = 0, \; k = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

где $\eta(x) = 1$ при $x > 0$, $\eta(x) = 0$ при $x \leqslant 0$.

Для разрешимости системы (3) необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\eta(-\varkappa_i)\int_{-1}^{1}\left[h_i(t)-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{ik}(t,\tau)\,v_k(\tau)\,\rho_{\varkappa_k}(\tau)\,d\tau\right]\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=0, \quad (5)$$

$i=1,\ \ldots,\ m.$

2. Пусть $L^{2,0}_{\rho_1}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(v, u)_{\rho_1}=\int_{-1}^{1}v(t)\,\overline{u}(t)\,\rho_1(t)\,dt$, элементы которого обладают свойством $\int_{-1}^{1}v(t)\,\rho_1(t)\,dt=0$. Пусть $\vec{e}_k(t)=(\delta_{ik})_{i=1}^{m}$. Обозначим $\vec{L}_{\mathrm{I}}^{2,0}$ и $\vec{L}_{\mathrm{II}}^{2,0}$ — гильбертовы пространства вектор-функций со скалярными произведениями $(\vec{v},\vec{u})_{\mathrm{I}}=\sum_{k=1}^{m}(v_k, u_k)_{\rho_{\varkappa_k}}$ и $(\vec{v},\vec{u})_{\mathrm{II}}=\sum_{k=1}^{m}(v_k, u_k)_{\rho_{\varkappa_k}^{-1}}$, соответственно, элементы которых обладают свойством $(\vec{v},\eta(\varkappa_k)\vec{e}_k)_{\mathrm{I}}=0$ и $(\vec{v},\eta(-\varkappa_k)\vec{e}_k)_{\mathrm{II}}=0$. Введем операторы:

$$\hat{A}:(\hat{A}\vec{v})(t)=((A_{\varkappa_i}v_i)(t))_{i=1}^{m}=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v_i(\tau)\,\rho_{\varkappa_i}(\tau)\,d\tau}{\tau-t}\right)_{i=1}^{m};$$

$$\hat{Q}_R=(\hat{Q}_R\vec{v})(t)=\left(\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{ik}(t,\tau)\,v_k(\tau)\,\rho_{\varkappa_k}(\tau)\,d\tau-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\eta(-\varkappa_i)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{ik}(t,\tau)\,v_k(\tau)\,\rho_{\varkappa_k}(\tau)\,d\tau\right)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right]\right)_{i=1}^{m}.$$

Обозначим

$$\vec{h}_R(t)=\left(h_i(t)-\eta(-\varkappa_i)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}h_i(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)_{i=1}^{m}\in\vec{L}_{\mathrm{II}}^{2,0}.$$

Тогда систему (3), (4) с учетом условий (5) можно записать в виде

$$(\hat{A}+\hat{Q}_R)\vec{v}=\vec{h}_R; \quad (6)$$

$$(\vec{v},\eta(\varkappa_k)\vec{e}_k)_{\mathrm{I}}=0,\ k=1,\ \ldots,\ m. \quad (7)$$

Уравнение (6) рассматривается в паре пространств $(\vec{L}_{\mathrm{I}}^{2,0},\vec{L}_{\mathrm{II}}^{2,0})$, в которой оператор $\hat{A}$ непрерывно обратим. Пусть $\{g_n^{(\varkappa,1)}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — система ортогональных на $[-1, 1]$ относительно веса $\rho_\varkappa(t)$ полиномов. Введем обозначения для двух типов интерполяционных полиномов Лагранжа: $(L_n^{(\varkappa,1)}f)(t)$ — по корням $t_j^{(\varkappa,n)}$, $j=1,\ \ldots,\ n$

полинома $g_n^{(\varkappa,1)}(t)$ и $(L_{n-\varkappa}^{(\varkappa,2)}f)(t)$ — по корням $\bar{t}_p^{(\varkappa,n)}$, $p = 1, \ldots, n-\varkappa$ полинома $g_{n-\varkappa}^{(\varkappa,2)}(t) = (A_\varkappa g_n^{(\varkappa,1)})/(t)$.

Приближенное решение системы (3), (4) ищется в виде полинома $(n_i - 1)$-й степени $v_{i,n_i}(t) = (L_{n_i}^{(\varkappa_i,1)} v_{i,n_i})(t)$, $i = 1, \ldots, m$.

Если среди частных индексов системы (3) имеется хотя бы один, равный -1, то при аппоксимации ее системой линейных алгебраических уравнений получаем переопределенную систему. Проводя регуляризацию по Лифанову, вводим дополнительные неизвестные $\beta_{\bar{in}}$ [3], [4]. При замене интегралов квадратурными формулами мы не должны выйти из рассматриваемой пары пространств $(\vec{L}_{\mathrm{I}}^{2,0}, \vec{L}_{\mathrm{II}}^{2,0})$. Но, вообще говоря, для $f(t) \in L_{\rho_1}^{2,0}$ $(L_{n+1}^{(-1,2)}f)(t)$ может не принадлежать пространству $L_{\rho_1}^{2,0}$. Поэтому вводится оператор [5]:

$$(\tilde{L}_{n+1}^{(-1,2)}f)(t) = (L_{n+1}^{(-1,2)}f)(t) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{(L_{n+1}^{(-1,2)}f)(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \in L_{\rho_1}^{2,0}.$$

Положим, что при $\varkappa = 1$; 0, $\tilde{L}_{n-\varkappa}^{(\varkappa,2)} \equiv L_{n-\varkappa}^{(\varkappa,2)}$.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений, которая получается из (6), (7) заменой $v_i(\tau)$ на $v_{i,n_i}(\tau)$, применением к обеим частям i-го уравнения оператора $\tilde{L}_{n_i-\varkappa_i}^{(\varkappa_i,2)}$ и последующим вычислением интегралов с помощью гауссовых квадратур:

$$\sum_{j_i=1}^{n_i} A_{j_i}^{(\varkappa_i,n_i)} \frac{v_{i,n_i}(t_{j_i}^{(\varkappa_i,n_i)})}{t_{j_i}^{(\varkappa_i,n_i)} - \bar{t}_{p_i}^{(\varkappa_i,n_i)}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j_k=1}^{n_k} A_{j_k}^{(\varkappa_k,n_k)} Q_{ik}(\bar{t}_{p_i}^{(\varkappa_i,n_i)}, t_{j_k}^{(\varkappa_k,n_k)})\, v_{k,n_k}(t_{j_k}^{(\varkappa_k,n_k)}) +$$

$$+ \eta(-\varkappa_i)\beta_{\bar{in}} = h_i(\bar{t}_{p_i}^{(\varkappa_i,n_i)}),\ p = 1, \ldots, n_i - \varkappa_i,\ i = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

$$\eta(\varkappa_k)\sum_{j_k=1}^{n_k} A_{j_k}^{(\varkappa_k,n_k)} v_{k,n_k}(t_{j_k}^{(\varkappa_k,n_k)}) = 0,\ k = 1, \ldots, m.$$

Как отмечено в [6], условия (5) выполняются тогда и только тогда, когда $\beta_{\bar{in}} \to 0$ при $n \to \infty$ $(n = \min\{n_1, \ldots n_m\})$.

Обозначим $\vec{v}_{\bar{n}} = (v_{i,n_i}(t))_{i=1}^m$; Π_r — множество всех полиномов степени не выше r; $\vec{\Pi}_{\bar{n}}^0 = \{\vec{v}_{\bar{n}}(t) \in \vec{L}_{\mathrm{I}}^{2,0} : v_{i,n_i}(t) \in \Pi_{n_i},\ i = 1, \ldots, m\}$;

$\vec{\Pi}_{\bar{n}-\bar{\varkappa}}^0\ \{\vec{v}_{\bar{n}-\bar{\varkappa}}(t) \in \vec{L}_{\mathrm{II}}^{2,0} : v_{i,n_i-\varkappa_i}(t) \in \Pi_{n_i-\varkappa_i},\ i = 1, \ldots, m\}$;

$$(\hat{L}_{\bar{n}}\vec{f})(t) = ((\tilde{L}_{n_i-\varkappa_i}^{(\varkappa_i,2)} f_i)(t))_{i=1}^m.$$

Тогда систему (8) можно записать в виде операторного уравнения $(L_{\bar{n}}\hat{A} + \hat{Q}_{\bar{n}})\vec{v}_{\bar{n}} = L_{\bar{n}}\vec{h}$, которое рассматривается в паре $(\vec{\Pi}^{0}_{\bar{n}}, \vec{\Pi}^{0}_{\bar{n}-\bar{\varkappa}})$. Используя результаты работы [5], можно показать, что имеет место

Теорема. *Пусть* $h_i(t) \in C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$ и $Q_{ik} \in C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$, $(i, k = 1, \ldots, m)$ *по каждой из переменных, равномерно относительно другой переменной. Пусть оператор* $\hat{A} + \hat{Q}_R$ *непрерывно обратим в паре пространств* $(\vec{L}^{2,0}_{\mathrm{I}}, \vec{L}^{2,0}_{\mathrm{II}})$. *Тогда при достаточно большом* n *оператор* $\hat{L}_{\bar{n}}A + \hat{Q}_{\bar{n}}$ *непрерывно обратим в паре пространств* $(\vec{\Pi}^{0}_{\bar{n}}, \vec{\Pi}^{0}_{\bar{n}-\bar{\varkappa}})$, *причем имеет место оценка* $\|\vec{v} - \vec{v}_{\bar{n}}\|_{\mathrm{I}} = O(n^{-\mu-\gamma})$, $(n \to \infty)$.

Список литературы: 1. *Гандель Ю. В.* О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, вып. 38, с. 15—18. 2. *Лифанов И. К., Матвеев А. Ф.* О сингулярном интегральном уравнении на системе отрезков.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, вып. 38, с. 15—18. 3. *Лифанов И. К.* О сингулярных интегральных уравнениях с одномерными и кратными интегралами типа Коши.— Докл. АН СССР, 1978, **239**, № 2, с. 265—268. 4. *Лифанов И. К.* О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.— Докл. АН СССР, 1980, 255, № 5, с. 1046—1050. 5. *Junghanns P., Silbermann B.* Zur Theorie der Näherungsverfahrer für singuläre Integralgleichungen auf Intervallen.—Math. Nachr., **103**, 1981, s. 199—244. 6. *Лифанов И. К., Саакян А. В.* Метод численного решения задачи о вдавливании движущегося штампа в упругую полуплоскость с учетом тепловыделения.— Прикл. мат. и механ., 1982, **46**, вып. 3, с. 494—501.

Поступила в редколлегию 12.11.83