УДК 517.98

А. Н. ПЛИЧКО, В. К. МАСЛЮЧЕНКО

КВАЗИРЕФЛЕКСИВНЫЕ ЛОКАЛЬНО-ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА БЕЗ БАНАХОВЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

Известное квазирефлексивное пространство Джеймса, а также различные его банаховы вариации и обобщения исследовались многими авторами. В работе [1] рассматривались квазирефлексивные локально-выпуклые пространства. Приведем пример квазирефлексивного локально-выпуклого пространства, не изоморфного никакому банаховому пространству. Таким будет, например, прямая сумма какого-нибудь рефлексивного топологического векторного пространства, не изоморфного банаховому (скажем, пространства $\boldsymbol{R}^\infty$ всех последовательностей с топологией покоординатной сходимости), и квазирефлексивного пространства Джеймса. В связи с этим М. И. Кадец на расширенном заседании семинара Западного научного центра АН УССР, посвященном памяти С. Банаха, поставил вопрос о существовании квазирефлексивных локально-выпуклых пространств, не содержащих никаких бесконечномерных банаховых подпространств. В этой статье мы рассмотрим два естественных способа построения таких пространств.

Приведем определение и некоторые необходимые нам свойства пространств Джеймса. Зафиксируем число $1 < p < \infty$. Пространство Джеймса J_p состоит из всех последовательностей $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$, сходящихся к нулю и имеющих конечную p-ю вариацию

$$\|x\|_{J_p} = \sup \left(\sum_1^m |\xi_{k_i} - \xi_{k_{i-1}}|^p + |\xi_{k_m}|^p\right)^{1/p}, \tag{1}$$

где sup берется по всевозможным возрастающим конечным наборам $k_0, \ldots, k_m$. Элементы $e_k = (0, \ldots, 0, \underset{k}{1}, 0, \ldots)$, $k \in \boldsymbol{N}$, образуют базис пространства J_p, а биортогональные к ним координатные функционалы p_k — базис сопряженного пространства J_p^*; второе сопряженное J_p^{**} состоит из последовательностей $\tilde{J}_p$ с конечной p-й вариацией (1), причем каноническое вложение π: $J_p \to J_p^{**}$ совпадает с естественным вложением $J_p \hookrightarrow \tilde{J}_p$. Для $p = 2$ эти утверждения есть, например, в работе [2]; на произвольное $1 < p < \infty$ доказательства переносятся дословно.

Лемма. *Пусть $a = (\alpha_j)_{j=1}^\infty \in l_p$, $(k_j)_{j=0}^\infty$ — некоторая возрастающая последовательность индексов с $k_0 = 1$ и $(y_j)_{j=1}^\infty$ — последова-*

тельность элементов вида $y_j = \sum_{k_{j-1}}^{k_j - 1} \eta_k e_k$ *с* $\|y_j\|_{J_p} \leqslant 1$. *Тогда ряд* $\sum_1^\infty \alpha_j y_j$ *сходится в пространстве* J_p *и*

$$\left\| \sum_1^\infty \alpha_j y_j \right\|_{J_p} \leqslant 3 \|a\|_{l_p}.$$

Доказательство. Для сокращения записей обозначим через S множество всевозможных конечных возрастающих наборов $s = (s_0, \ldots, s_m)$ и для последовательности $x = (\xi_k)$ и набора $s = (s_i)_{i=0}^m \in S$ положим

$$v_p(x, s) = \sum_1^m |\xi_{s_i} - \xi_{s_{i-1}}|^p + |\xi_{s_m}|^p \text{ и } v_p(x) = \sup_{s \in S} v_p(x, s).$$

Последовательность $y = (\alpha_1\eta_1, \ldots, \alpha_1\eta_{k_1-1}, \alpha_2\eta_{k_1}, \ldots, \alpha_2\eta_{k_2-1}, \ldots)$ является, очевидно, покоординатной суммой ряда $\sum_1^\infty \alpha_j y_j$. Оценим норму вектора $z_n = y - \sum_1^n \alpha_j y_j$. Для произвольной вариационной суммы $v_p(z_n, s)$ имеет место неравенство вида

$$v_p(z_n, s) \leqslant \sum_1^{R_1} v_p(\alpha_{j_r} y_{j_r}, s^{(r)}) + \sum_1^{R_2} |\alpha_{j'_r}\eta_{k'_r} - \alpha_{j''_r}\eta_{k''_r}|^p,$$

где $s^{(r)} \in S$, (j_r), (j'_r), (j''_r) — возрастающие последовательности индексов, больших n, причем $j'_r < j''_r$, а (k'_r) и (k''_r) — подходящие возрастающие последовательности индексов, для которых $k_{j'_r} \leqslant k'_r < k_{j'_r+1}$ и $k_{j''_r} \leqslant k''_r < k_{j''_r+1}$ при $r = 1, \ldots, R_2$.

Поскольку

$$\sum_1^{R_1} v_p(\alpha_{j_r} y_{j_r}, s^{(r)}) = \sum_1^{R_1} |\alpha_{j_r}|^p v_p(y_{j_r}, s^{(r)}) \leqslant \leqslant \sum_1^{R_1} |\alpha_{j_r}|^p \leqslant \sum_{j>n} |\alpha_j|^p,$$

$$\text{а } \sum_1^{R_2} |\alpha_{j'_r}\eta_{k'_r} - \alpha_{j''_r}\eta_{k''_r}|^p \leqslant ((\sum_1^{R_2} |\alpha_{j'_r}\eta_{k'_r}|^p)^{1/p} + (\sum_1^{R_2} |\alpha_{j''_r}\eta_{k''_r}|^p)^{1/p})^p \leqslant ((\sum_1^{R_2} |\alpha_{j'_r}|^p)^{1/p} + (\sum_1^{R_2} |\alpha_{j''_r}|^p)^{1/p})^p \leqslant 2^p \sum_{j>n} |\alpha_j|^p,$$

то $v_p(z_n) \leqslant (1 + 2^p) \sum_{j>n} |\alpha_j|^p$.

В частности, при $n = 0$ получаем $v_p(y) \leqslant (1 + 2^p) \sum_1^\infty |\alpha_j|^p$, откуда следует, что $y \in J_p$ и $\|y\|_{J_p} \leqslant (1 + 2^p)^{1/p} \|a\|_{l_p} \leqslant 3 \|a\|_{l_p}$. Кроме этого,

$$\|y - \sum_1^n \alpha_j y_j\|_{J_p} \leqslant 3 (\sum_{j>n} |\alpha_j|^p)^{1/p},$$

поэтому ряд $\sum_1^\infty \alpha_j y_j$ сходится к y в J_p.

Предложение 1. *Каждое замкнутое бесконечномерное подпространство* X *пространства* J_p *содержит замкнутое подпространство* Y, *изоморфное* l_p.

Доказательство (сравни [3, с. 165—167]). Из бесконечномерности X следует, что для каждого номера N в X существует элемент $x = (\xi_k)$ с $\|x\|_{J_p=1}$, для которого $\xi_1 = \cdots \xi_N = 0$.

Пусть $k_0 = 1$ и $x_1 = (\xi_{1k}) \in X$ — произвольный элемент с $\| x_1 \|_{J_p} = 1$ и $\xi_{11} = 0$. Возьмем такой номер $k_1 > k_0$, что норма элемента $z_1 = \sum_{k \geqslant k_1} \xi_{1k} e_k$ в пространстве J_p меньше, чем $1/4$, и выберем в X вектор $x_2 = (\xi_{2k})$ с $\| x_2 \|_{J_p} = 1$, для которого $\xi_{2k} = 0$ при $k = 1, \ldots, k_1$. Найдем, далее, такое $k_2 > k_1$, что норма элемента $z_2 = \sum_{k \geqslant k_2} \xi_{2k} e_k$ в пространстве J_p меньше, чем $1/16$, и такой вектор $x_3 = (\xi_{3k}) \in X$ с $\| x_3 \|_{J_p} = 1$, для которого $\xi_{3k} = 0$ при $k = 1, \ldots, k_2$. Продолжая этот процесс до бесконечности, мы получим возрастающую последовательность индексов $(k_j)_{j=0}^{\infty}$ с $k_0 = 1$ и соответствующую ей последовательность векторов $x_j = (\xi_{jk}) \in X$, таких, что для произвольного $j = 1, 2, \ldots$

$$\| x_j \|_{J_p} = 1, \ \xi_{jk} = 0 \text{ при } k = 1, \ \ldots, \ k_{j-1}$$

и норма элемента $z_j = \sum_{k \geqslant k_j} \xi_{jk} e_k$ в пространстве J_p меньше, чем $1/4^j$.

Положим $y_j = x_j - z_j = \sum_{k_{j-1}+1}^{k_j - 1} \xi_{jk} e_k$. Для произвольной последовательности $a = (\alpha_j) \in l_p$ имеем

$$\left\| \sum_1^\infty \alpha_j z_j \right\|_{J_p} \leqslant \sum_1^\infty \| \alpha_j | \, \| z_j \|_{J_p} \leqslant \| a \|_{l_p} \sum_1^\infty 4^{-j} = 3^{-1} \| a \|_{l_p}$$

и в силу леммы

$$\left\| \sum_1^\infty \alpha_j y_j \right\|_{J_p} \leqslant 3 \| a \|_{l_p}.$$

С другой стороны, для каждого $j = 1, 2, \ldots$ $\| y_j \|_{J_p} \geqslant \| x_j \|_{J_p} - \| z_j \|_{J_p} \geqslant 1 - 1/4^j > 1/2$, поэтому существует вариационная сумма $v_p(y_j, s^{(j)})$, большая, чем $1/2^p$. Каково бы ни было m, число $\sum_1^m v_p(\alpha_j y_j, s^{(j)})$ не превышает некоторой вариационной суммы $v_p(y, s)$ последовательности $y = \sum_1^\infty \alpha_j y_j$. Поэтому

$$v_p(y) \geqslant \sum_1^\infty v_p(\alpha_j y_j, s^{(j)}) = \sum_1^\infty | \alpha_j |^p v_p(y_j, s^{(j)}) \geqslant 2^{-p} \sum_1^\infty | \alpha_j |^p,$$

откуда $\| y \|_{J_p} \geqslant 2^{-1} \| a \|_{l_p}$.
Тогда

$$(1/2 - 1/3) \| a \|_{l_p} \leqslant \left\| \sum_1^\infty \alpha_j x_j \right\|_{J_p} \leqslant (3 + 1/3) \| a \|_{l_p}.$$

Следовательно, формулой $\psi(a) = \sum_1^\infty \alpha_j x_j$ определяется линейное непрерывное ограниченное снизу отображение пространства l_p в X. Это отображение и есть изоморфизм l_p на подпространство $Y = \psi(l_p) \subseteq X$, которое необходимо замкнуто.

Напомним, что отделимое локально-выпуклое пространство X называется квазирефлексивным, если оно является замкнутым подпространством конечного дефекта в своем втором сопряженном X^{**}, наделенном сильной топологией $\beta(X^{**}, X^*)$, и топология $\beta(X, X^*)$ совпадает с исходной топологией пространства X.

Для $1 \leqslant p < \infty$ положим $\tilde{J}_{p+0} = \bigcap_{q>p} \tilde{J}_q$, а для $1 < p \leqslant \infty$ определим $\tilde{J}_{p-0} = \bigcup_{1<q<p} \tilde{J}_q$. Наделим пространство $\tilde{J}_{p+0}$ проектив-

ной топологией относительно семейства вложений $\tilde{J}_{p+0} \hookrightarrow \tilde{J}_q$ $(q > p)$, а пространство $\tilde{J}_{p-0}$ — индуктивной топологией относительно семейства вложений $\tilde{J}_q \hookrightarrow \tilde{J}_{p-0}$ $(1 < q < p)$. Поскольку пространства $\tilde{J}_q$ с ростом q увеличиваются, а их нормы убывают, то пространство $\tilde{J}_{p+0}$ (соответственно $\tilde{J}_{p-0}$) можно рассматривать как проективный (соответственно индуктивный) предел последовательности пространств $\tilde{J}_{g_n}$, где $q_n \downarrow p$ (соответственно $q_n \uparrow p$). Пространство $\tilde{J}_{p+0}$ является пространством Фреше, а $\tilde{J}_{p-0}$ — бочечным пространством Макки.

Положим также $J_{p+0} = \bigcap_{q>p} J_q$ при $1 \leqslant p < \infty$ и $J_{p-0} = \bigcup_{1<q<p} J_q$ — при $1 < p \leqslant \infty$. Пространство J_{p+0} (J_{p-0}) наделяется топологией, индуцируемой из $\tilde{J}_{p+0}$ $(\tilde{J}_{p-0})$, которая совпадает с естественной топологией проективного (индуктивного) предела на J_{p+0} (J_{p-0}). Пространство J_{p+0} (соответственно J_{p-0}) является замкнутым подпространством дефекта 1 пространства $\tilde{J}_{p+0}$ (соответственно $\tilde{J}_{p-0}$). Действительно, как легко видеть, оба пространства $\tilde{J}_{p+0}$ и $\tilde{J}_{p-0}$ непрерывно вложены в пространство c всех сходящихся последовательностей с топологией равномерной сходимости, следовательно, функционал $l(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \xi_k$ непрерывен на $\tilde{J}_{p+0}$ и на $\tilde{J}_{p-0}$. Пространства J_{p+0} и J_{p-0} есть не что иное, как ядра функционала l в соответствующих пространствах. Отметим еще, что элементы $e_k = (0, \ldots, 0, \underset{k}{1}, 0, \ldots)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ образуют базис как пространства J_{p+0}, так и пространства J_{p-0}, а координатные функционалы p_k непрерывны на J_{p+0} и J_{p-0} и вместе с e_k образуют биортогональную систему векторов и функционалов.

Предложение 2. *Отображение $\varphi : F \to (F(p_k))_{k=1}^{\infty}$ является изоморфизмом пространства J_{p+0}^{**} с сильной топологией $\beta(J_{p+0}^{**}, J_p^*)$ (соответственно J_{p-0}^{**} с топологией $\beta(J_{p-0}^{**}, J_{p-0}^*)$) на пространство $\tilde{J}_{p+0}$ (соответственно $\tilde{J}_{p-0}$), при этом диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} & J_{p+0} & \\ \swarrow^{\pi} & & \searrow^{j} \\ J_{p+0}^{**} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{J}_{p+0} \end{array} \quad \left(\textit{соответственно} \quad \begin{array}{ccc} & J_{p-0} & \\ \swarrow^{\pi} & & \searrow^{j} \\ J_{p-0}^{**} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{J}_{p-0} \end{array} \right)$$

коммутативна.

(Здесь π обозначает каноническое, а j — естественное вложения соответствующих пространств).

Доказательство.

1) Для пространства J_{p+0}.

Пусть $F \in J_{p+0}^{**}$. Тогда существует такое ограниченное множество B в J_{p+0} и такая константа $\gamma > 0$, что $|F(f)| \leqslant \gamma$ для всех $f \in B^0$, где поляра берется относительно двойственности $\langle J_{p+0}, \tilde{J}_{p+0}^* \rangle$. Обозначим через B_q замкнутый единичный шар пространства J_q. Для каждого $q > p$ найдется $\gamma_q > 0$ такое, что $B \subseteq \gamma_q B_q$.

Тогда $B^0 \supseteq \gamma_q^{-1}(B_q \cap J_{p+0})^0$, поэтому $|F(f)| \leqslant \gamma\gamma_p$ для всех $f \in (B_q \cap J_{p+0})^0$. Так как замыкание множества $B_q \cap J_{p+0}$ в пространстве J_q совпадает с шаром B_q, то поляра $(B_q \cap J_{p+0})^0$ состоит из всевозможных сужений функционалов из замкнутого единичного шара пространства J_q^* на пространство J_{p+0}. Следовательно, функционал F непрерывен на J_q^* (мы отождествляем функционалы из J_q^* и их сужения). Тогда из описания J_q^{**} следует, что $(F(p_k))_{k=1}^{\infty} \in \tilde{J}_q$. Поскольку $q > p$ произвольно, то тем самым показано, что $\varphi(F) \in \tilde{J}_{p+0}$.

Пусть $x = (\xi_k) \in J_{p+0}$. Тогда $\pi(x)(p_k) = p_k(x) = \xi_k$, т. е. $\varphi(\pi(x)) = x$. Таким образом, $j = \varphi \circ \pi$ и $\operatorname{im} \varphi \supseteq J_{p+0}$. Для доказательства сюръективности φ покажем, что вектор $e = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ входит в $\operatorname{im} \varphi$.

Пусть $f \in J_{p+0}^*$. Тогда f непрерывен на J_{p+0} как на подпространстве J_q для некоторого $q > p$. Поскольку $e \in \tilde{J}_q$, то ряд $\sum_1^{\infty} f_k$, где $f_k = f(e_k)$, сходится, следовательно, функционал $F_0(f) = \sum_1^{\infty} f_k$ определен на J_{p+0}^*. Покажем, что F_0 непрерывен в сильной топологии пространства J_{p+0}^*.

Положим $B = \bigcap_{q>p} B_q$. Из следствия теоремы о биполяре [4, с. 58] получаем, что поляра B^0 является слабым замыканием объединения $\bigcup_{q>p}(B_q \cap J_{p+0})^0$. Зафиксируем номер n и функционал $f \in (B_q \cap J_{p+0})^0$ для некоторого $q > p$. Имеем $\sum_1^n f_k = f(\sum_1^n e_k)$, поэтому $|\sum_1^n f_k| \leqslant \|f\|_{J_q^*} \|\sum_1^n e_k\|_{J_q} \leqslant 1$. Таким образом, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и произвольного $f \in \bigcup_{q>p}(B_q \cap J_{p+0})^0$ выполняется неравенство $|\sum_1^n f_k| \leqslant 1$. Переходя в этом неравенстве к пределу сначала по f, а потом по n, получим, что $|\sum_1^{\infty} f_k| \leqslant 1$ для всех $f \in B^0$, откуда следует, что $F_0 \in J_{p+0}^{**}$. Ясно, что $\varphi(F_0) = e$, поэтому φ — сюръективно. Поскольку линейность и инъективность φ очевидны, то φ — алгебраический изоморфизм.

Для доказательства топологического совпадения J_{p+0}^{**} и $\tilde{J}_{p+0}$ отметим сначала, что поскольку J_{p+0} борнологично, то каноническое вложение $\pi\colon J_{p+0} \to J_{p+0}^{**}$ является изоморфизмом [4, с. 125]. Пространство J_{p+0} замкнуто в сильной топологии пространства J_{p+0}^{**} так же, как и в пространстве $\tilde{J}_{p+0}$, так как сильная топология на J_{p+0}^{**} мажорирует его равномерную топологию, индуцируемую из пространства c.

Действительно, множество $U = \{F \in J_{p+0}^{**} : \sup\limits_k |F(p_k)| \leqslant 1\}$ абсолютно выпукло и $\sigma(J_{p+0}^{**}, J_{p+0}^*)$ — замкнуто, поэтому $U = U^{00}$, где поляры берутся относительно двойственности $\langle J_{p+0}^{**}, J_{p+0}^* \rangle$, кроме того, $U \cap J_{p+0}$ — окрестность нуля в J_{p+0}, следовательно, содержащаяся в $(U \cap J_{p+0})^0$ поляра U^0 является относительно $\sigma(J_{p+0}^*, J_{p+0})$ — компактным, а значит, и сильно ограниченным множеством. Далее, коразмерность пространства J_{p+0} в пространствах J_{p+0}^{**} и $\tilde{J}_{p+0}$ равна 1. Следовательно, каждое из пространств J_{p+0}^{**} и $\tilde{J}_{p+0}$ топологически изоморфно прямой сумме пространства J_{p+0} и одномерного пространства E_0 с базисным вектором e_0, причем изоморфизмами $J_{p+0} \bigoplus E_0$ на J_{p+0}^{**} и соответственно на $\tilde{J}_{p+0}$ будут отображения $\varphi_1(x, te_0) = \pi(x) + tF_0$ и $\varphi_2(x, te_0) = x + te$. Поскольку $\varphi(\varphi_1(x, te_0)) = \varphi(\pi(x) + tF_0) = x + te = \varphi_2(x, te_0)$, то $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$, значит, φ — топологический изоморфизм.

2) Для пространства J_{p-0}.

Как это следует из свойств индуктивной топологии, линейный функционал f непрерывен на пространстве J_{p-0} тогда и только тогда, когда его сужение на каждое пространство $J_q (1 < q < p)$ непрерывно. Поэтому, отождествляя каждый функционал $f \in J_{p-0}^*$ со всеми его сужениями на пространства J_q $(1 < q < p)$, мы можем записать $J_{p-0}^* = \bigcap_{1<q<p} J_q^*$. Нетрудно убедиться в том, что шар B_q пространства $J_q (1 < q < p)$ является замкнутым множеством в пространстве J_{p-0} (он даже замкнут в топологии покоординатной сходимости). Следовательно, как это вытекает из одного результата Б. М. Макарова [5], индуктивный предел J_{p-0} регулярен, т. е. каждое ограниченное в J_{p-0} множество лежит и ограниченно в некотором J_q с $1 < q < p$. Отсюда легко получаем, что сильная топология на пространстве J_{p-0}^* совпадает с топологией, определяемой семейством норм $\|\cdot\|_{J_q^*} (1 < q < p)$.

Пусть теперь $F \in J_{p-0}^{**}$. Тогда F непрерывен относительно хотя бы одной нормы $\|\cdot\|_{J_q^*} (1 < q < p)$ на J_{p-0}^*, следовательно, существует его продолжение $\bar{F} \in J_q^{**}$. Тогда $(F(p_k))_{k=1}^{\infty} = (\bar{F}(p_k))_{k=1}^{\infty} \in \tilde{J}_q$, откуда следует, что $\varphi(F) \in \tilde{J}_{p-0}$.

Наоборот, если $x \in \tilde{J}_{p-0}$, то существуют число $1 < q < p$ и функционал $\bar{F} \in J_q^{**}$, такие, что $(F(p_k))_{k=1}^{\infty} = x$. Тогда сужение F функционала $\bar{F}$ на пространство J_{p-0}^* принадлежит пространству J_{p-0}^{**} и удовлетворяет равенству $\varphi(F) = x$.

Оставшиеся утверждения в этом случае доказываются аналогично предыдущему.

Теорема. *Пространства J_{p+0} и J_{p-0} являются квазирефлексивными локально-выпуклыми пространствами, не содержащими бесконечномерных банаховых пространств.*

Доказательство.

Квазирефлексивность пространств J_{p+0} и J_{p-0} есть прямое следствие предложения 2. Докажем их второе свойство, сформулированное в теореме.

1) Для пространства J_{p+0}.

Пусть X — бесконечномерное подпространство J_{p+0}, такое, что топология, индуцируемая на X из J_{p+0}, порождается некоторой банаховой нормой $\|\cdot\|_X$. Существует такое $q_1 > p$ и такая константа γ_1, что $\|x\|_X \leqslant \gamma_1 \|x\|_{J_{q_1}}$ для всех $x \in X$. Возьмем $p < q_2 < q_1$. Для него найдется такое γ_2, что $\|x\|_{J_{q_2}} \leqslant \gamma_2 \|x\|_X$. Кроме этого, $\|x\|_{J_{q_1}} \leqslant \|x\|_{J_{q_2}}$. Следовательно, на пространстве X все нормы $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_{J_{q_1}}$, $\|\cdot\|_{J_{q_2}}$ эквивалентны. Тогда X является замкнутым подпространством как J_{q_1}, так и J_{q_2}. Из предложения 1 вытекает, что в X можно выбрать подпространство Y, изоморфное l_{q_2}, а в нем, в свою очередь, подпространство Z, изоморфное l_{q_1}. Композиция изоморфизма $l_{q_1} \to Z$, вложения $Z \hookrightarrow Y$ и изоморфизма $Y \to l_{q_2}$ является изоморфизмом l_{q_1} на некоторое подпространство l_{q_2}. Но, как известно [6, с. 115], каждый оператор, действующий из l_{q_1} в l_{q_2}, при $1 \leqslant q_2 < q_1 < \infty$ компактен, поэтому такого изоморфизма существовать не может.

2) Для пространства J_{p-0}.

Пусть X — бесконечномерное банахово подпространство J_{p-0}. Из категорных соображений или из регулярности индуктивного предела J_{p-0} следует, что существует такое $1 < q_2 < p$, что $X \subseteq J_{q_2}$. Пусть $q_2 < q_1 < p$. Поскольку $X \subseteq J_{q_2}$, то из теоремы о замкнутом графике вытекает, что вложение $X \hookrightarrow J_{q_2}$ непрерывно, поэтому существует γ_2, такое, что $\|x\|_{J_{q_2}} \leqslant \gamma_2 \|x\|_X$ для всех $x \in X$. С другой стороны, топология нормы $\|\cdot\|_{J_{q_1}}$ на пространстве X мажорирует топологию нормы $\|\cdot\|_X$, ведь последняя является следом индуктивной топологии. Следовательно, существует γ_1, такое, что $\|x\|_X \leqslant \gamma_1 \|x\|_{J_{q_1}}$. Далее применяется в точности то же рассуждение, что и в предыдущем случае.

Список литературы: 1. *Пличко А. Н.* Условия рефлексивности и квазирефлексивности топологических векторных пространств.— Укр. мат. журн., 1975, 27, № 1, с. 24—32. 2. *Lindenstrauss J. Tzafriri L.* Classical Banach spaces. I.— Berlin — Heidelberg — New-York: Springer — Verlag, 1977.— 117 p. 3. *Банах С. С.* Курс функціонального аналізу.— Київ: Радянська школа, 1948.— 216 с. 4. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства.— М.: Мир, 1967.— 256 с. 5. *Макаров Б. М.* Об индуктивных пределах нормированных пространств.— Вестн. Ленингр. ун-та, сер. мат., мех. и астр., 1965, 13, вып. 3, с. 50—58. 6. *Мильман В. Д.* Геометрическая теория пространств Банаха, ч. II.— Усп. мат. наук, 1971, 26, № 6, с. 73—149.

Поступила в редколлегию 24.04.83.