УДК 513.88

М. И. ОСТРОВСКИЙ

СВОЙСТВА БАНАХА—САКСА, ИНЪЕКТИВНОСТЬ И РАСТВОРЫ ПОДПРОСТРАНСТВ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

1. Пусть X и Y — замкнутые подпространства банахова пространства Z; $B(X)$ и $B(Y)$ — их замкнутые шары единичного радиуса; $S(X)$ и $S(Y)$ — единичные сферы. Раствором X и Y называется [1] величина

$$\Theta(X, Y) = \max\{\sup_{x\in S(X)} \operatorname{dist}(x, Y), \sup_{y\in S(Y)} \operatorname{dist}(y, X)\}.$$

Будем использовать также введенную в [2] модификацию раствора:

$$\Lambda(X, Y) = \max\{\sup_{x\in S(X)} \operatorname{dist}(x, B(Y)), \sup_{y\in S(Y)} \operatorname{dist}(y, B(X))\}.$$

Краткие сведения о растворах и библиографию см. в работе [3]. Нам понадобятся следующие определения [4, 5]:

Определение 1. *Говорят, что банахово пространство X обладает свойством Банаха—Сакса (записывается: $X\in BS$), если каждая ограниченная последовательность $(x_n)\subset X$ содержит подпоследовательность (e_n), средние Чезаро $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k$ которой сходятся в сильной топологии.*

Определение 2. *Говорят, что банахово пространство X обладает знакопеременным свойством Банаха—Сакса (записывается: $X\in ABS$), если каждая ограниченная последовательность $(x_n)\subset X$ содержит подпоследовательность (e_n), знакопеременные средние Чезаро $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k e_k$ которой сходятся в сильной топологии.*

В настоящей работе будет изложен некоторый общий метод отделения пространств в смысле раствора и затем применен для отделения пространств, обладающих одним из указанных двух свойств Банаха—Сакса, от пространств, им не обладающих, а также для единообразного получения теорем 2, 3, 4 из работы [3]. Будут получены некоторые другие результаты о свойствах Банаха—Сакса. В заключительной части работы устанавливается связь между растворами и инъективностью банаховых пространств.

2. Пусть X — некоторое банахово пространство. Обозначим через $(\sum\oplus X)_\infty$ банахово пространство последовательностей $(x_i) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $x_i\in X$, для которых $\sup_i \|x_i\| < \infty$, с нормой

$\|(x_i)\| = \sup\limits_i \|x_i\|$. Пусть $(F_\alpha)_{\alpha\in A} = ((f_i^\alpha))_{\alpha\in A}$ — некоторое множество финитных числовых последовательностей таких, что $\sum\limits_i |f_i^\alpha| = 1$. Каждая последовательность F_α порождает линейный оператор $(\sum \oplus X)_\infty \to X$, который мы также обозначим F_α, определенный формулой $F_\alpha((x_i)) = \sum\limits_i f_i^\alpha x_i$; норма этого оператора, очевидно, равна 1.

Определение 3. *Будем говорить, что множество* $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ *отделено от нуля в* X, *если существует последовательность* $(x_n) \subset B(X)$ *такая, что* $\inf\limits_\alpha \|F_\alpha((x_n))\| > 0$.

Определение 4. *Показателем множества* (F_α) *в* X *назовем величину* $h(X, (F_\alpha))$ *супремума тех* δ, *для которых существует* $(x_n) \subset B(X)$ *с* $\inf\limits_\alpha \|F_\alpha((x_n))\| \geqslant \delta$.

Теорема 1. *Пусть* X *и* Y — *подпространства банахова пространства* Z. *Тогда для любого множества* (F_α) *имеем* $\Lambda(X, Y) \geqslant |h(X, (F_\alpha)) - h(Y, (F_\alpha))|$ **(1)**; $\Theta(X, Y)(1 + h(Y, (F_\alpha))) \geqslant h(X, (F_\alpha)) - h(Y, (F_\alpha))$ **(2)**.

Доказательство. Будем считать, что $h(X, (F_\alpha)) \geqslant h(Y, (F_\alpha))$. Пусть $(x_n) \subset B(X)$ такова, что $\inf\limits_\alpha \|F_\alpha((x_n))\| > h(X, (F_\alpha)) - \varepsilon$.

Докажем (1). Пусть $(y_n) \subset B(Y)$ такова, что $\|x_n - y_n\| \leqslant \Lambda(X, Y) + \varepsilon$ и, следовательно, $\|F_\alpha((x_n - y_n))\| \leqslant \Lambda(X, Y) + \varepsilon$. Тогда $\inf\limits_\alpha \|F_\alpha((y_n))\| \geqslant \inf\limits_\alpha \|F_\alpha((x_n))\| - \sup\limits_\alpha \|F_\alpha((x_n - y_n))\| \geqslant h(X, (F_\alpha)) - \Lambda(X, Y) - 2\varepsilon$, откуда $h(Y, (F_\alpha)) \geqslant h(X, (F_\alpha)) - \Lambda(X, Y) - 2\varepsilon$. Устремляя ε к нулю, получаем (1). Для доказательства (2) возьмем $(y_n) \subset Y$ такую, что $\|x_n - y_n\| \leqslant \Theta(X, Y) + \varepsilon$. Имеем $\|y_n\| \leqslant 1 + \Theta(X, Y) + \varepsilon$, кроме того,

$$\inf_\alpha \|F_\alpha((y_n))\| \geqslant h(X, (F_\alpha)) - \Theta(X, Y) - 2\varepsilon.$$

Из этих двух неравенств заключаем, что $h(Y, (F_\alpha)) \geqslant (h(X, (F_\alpha)) - \Theta(X, Y) - 2\varepsilon)/(1 + \Theta(X, Y) + \varepsilon)$, устремляя ε к нулю, получаем $h(Y, (F_\alpha)) \geqslant (h(X, (F_\alpha)) - \Theta(X, Y))/(1 + \Theta(X, Y))$, что равносильно неравенству (2).

Следствие. *При любом изометричном вложении пространств* l_p *и* l_q, $1 \leqslant p$, $q < \infty$, *в объемлющее банахово пространство, справедлива оценка:* $\Lambda(l_p, l_q) \geqslant (1/2)|2^{1/p} - 2^{1/q}|$ **(3)**. Этот результат является обобщением замечания из работы [6, с. 74], в которой (3) было получено при $1 \leqslant p < 2$, $q = 2$.

Для доказательства (3) рассмотрим множество $A = \{(i, j);\ i, j \in \mathbf{N},\ i < j\}$ и последовательности $F_{(i,j)} = (0, \ldots, 0, 1/2, 0, \ldots, 0, -1/2, 0, \ldots)$, где $1/2$ стоит на i-м, а $(-1/2)$ — на j-м месте. По лемме 1.5 из работы [7] имеем для таких (F_α): $h(l_p, (F_\alpha)) = 2^{1/p}/2$. Поэтому (3) следует из (1).

Напомним, что банахово пространство называется суперрефлексивным, если оно изоморфно равномерно выпуклому (это одно из эквивалентных определений). Пространство называется B-выпуклым, если $\sup_n \inf \{d(l_1^n, Y) : Y \subset X, \dim Y = n\} = \infty$, где d — дистанция Банаха—Мазура. Связь между свойствами Банаха—Сакса, суперрефлексивностью и B-выпуклостью обсуждается в [4, с. 358] и [5, с. 194].

Опишем интересующие нас свойства в терминах отделенности от нуля некоторых множеств последовательностей:

Предложение 1. а) *Пусть* (C_α) — *множество всех финитных числовых последовательностей* (c_i^α) *с* $\sum_i |c_i^\alpha| = 1$. *Множество* (C_α) *отделено от нуля в тех и только в тех пространствах, которые содержат изоморфную копию* l_1. *При этом, если* X *содержит изоморфную копию* l_1, *то* $h(X, (C_\alpha)) = 1$.

б) *Пусть* (R_α) — *множество всех последовательностей вида* $(a_1, \ldots, a_k, -a_{k+1}, \ldots, -a_n, 0, \ldots)$, *где* $a_i \geqslant 0$; $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1/2$; $\sum_{i=k+1}^{n} a_i = 1/2$. *Множество* (R_α) *отделено от нуля в* X *тогда и только тогда, когда* X *нерефлексивно.* При этом для любого нерефлексивного X имеем $1/2 \leqslant h(X, (R_\alpha)) \leqslant 1$.

в) *Пусть* (SR_α) — *множество всех последовательностей вида* $(0, \ldots, 0, a_1, \ldots, a_k, -a_{k+1}, \ldots, -a_n, 0, \ldots)$, *где* $a_i \geqslant 0$; $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1/2$; $\sum_{i=k+1}^{n} a_i = 1/2$ *и перед* a_1 *стоит* $n(n-1)/2$ *нулей. Множество* (SR_α) *отделено от нуля в* X *тогда и только тогда, когда* X *не суперрефлексивно.* При этом для любого несуперрефлексивного X имеем $h(X, (SR_\alpha)) = 1$.

г) *Пусть* (B_α) — *множество всех последовательностей вида* $(0, \ldots, 0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$, *где* $\sum_{i=1}^{n} |a_i| = 1$ *и перед* a_1 *стоит* $n(n-1)/2$ *нулей. Множество* (B_α) *отделено от нуля в* X *тогда и только тогда, когда* X *не* B-*выпукло.* При этом для любого не B-выпуклого X имеем $h(X, (B_\alpha)) = 1$.

д) *Пусть* (A_α) — *множество всех последовательностей вида* $(0, \ldots, 0, \varepsilon_1/n, 0, \ldots, 0, \varepsilon_n/n, 0, \ldots)$, *где* $\varepsilon_k = \pm 1$; ε_k/n *стоит на* m_k-*м месте;* $m_1 < \ldots < m_n$ — *натуральные числа. Множество* (A_α) *отделено от нуля в* X *тогда и только тогда, когда* $X \notin ABS$. При этом для любого $X \notin ABS$ имеем $h(X, (A_\alpha)) = 1$.

е) *Пусть* (BS_α) — *множество всех последовательностей вида* $(0, \ldots, 0, 1/(2n), 0, \ldots, 0, 1/(2n), 0, \ldots, 0, (-1/(2n)), 0, \ldots, 0, (-1/(2n)), 0, \ldots)$, *где* $1/(2n)$ *стоит на* $m_1, \ldots, m_n$-*х местах,* $-1/(2n)$ *на* $m_{n+1}, \ldots, m_{2n}$-*х местах,* $(m_i)_{i=1}^{2n}$ — *возрастающая последовательность натуральных чисел. Множество* (BS_α) *отде-*

лено от нуля в X *тогда и только тогда, когда* $X \notin BS$. При этом для любого $X \notin BS$ имеем $1/2 \leqslant h(X, (BS_\alpha)) \leqslant 1$.

Доказательство. а) непосредственно следует из принадлежащего Джеймсу предложения 2. е. 3 в [8. I]; б) является переформулировкой результатов Джеймса [5, с. 136]; в) является переформулировкой известных результатов теории суперрефлексивных пространств [5, с. 215]; г) непосредственно следует из принадлежащей Гизи леммы I. е. 4 в [8. II]; д) легко выводится из теоремы III. I работы [4].

Докажем е). В [4, с. 367] отмечено, что $BS = ABS \wedge R$, (R — рефлексивность). Так как $(BS_\alpha) \subset (R_\alpha) \cap (A_\alpha)$, то, в силу б) и д), множество (BS_α) отделено от нуля в любом пространстве $X \notin BS$, при этом для любого $X \notin BS$ имеем $1/2 \leqslant h(X, (BS_\alpha)) \leqslant 1$. Пусть теперь X таково, что (BS_α) отделено от нуля в нем. Пусть $\delta > 0$ и $(x_n) \subset B(X)$ таковы, что $\inf\limits_\alpha \| BS_\alpha((x_n)) \| \geqslant \delta$. Отсюда и из вида (BS_α) ясно, что (x_n) не содержит подпоследовательностей, сходящихся по Чезаро.

Замечание. Из оценки (2) теоремы 1 и пунктов б), в), г) предложения 1 следуют теоремы 2, 3, 4 из работы [3].

Кроме того, из оценки (2) теоремы 1 и предложения 1 непосредственно вытекают такие утверждения:

Следствие 1. *Если* X *содержит подпространство, изоморфное* l_1, *а* Y *— нет, то* $\Theta(X, Y) = 1$.

Следствие 2. *Если* $X \in BS$, $Y \notin BS$, *то* $\Theta(X, Y) \geqslant 1/2$.

Следствие 3. *Если* $X \in ABS$, $Y \notin ABS$, *то* $\Theta(X, Y) = 1$.

Введенные в определении 4 показатели обладают таким свойством:

Предложение 2. *Пусть* Y *— подпространство* X. *Тогда для любого множества последовательностей* (F_α) *имеем* $h(X, (F_\alpha)) \geqslant h(X/Y, (F_\alpha))$.

Доказательство. Пусть $(y_n) \subset B(X/Y)$ такова, что $\inf\limits_\alpha \| F_\alpha((y_n)) \| \geqslant h(X/Y, (F_\alpha)) - \varepsilon$, а $(x_n) \subset (1+\varepsilon) B(X)$ такова, что $Qx_n = y_n$ (Q — фактор-отображение). Тогда $\inf\limits_\alpha \| F_\alpha((x_n/(1 + \varepsilon))) \| \geqslant (h(X/Y, (F_\alpha)) - \varepsilon)/(1+\varepsilon)$. Устремляя ε к нулю, получаем требуемое.

Из предложений 1 и 2 вытекает такая серия хорошо известных фактов:

Следствие. *Пусть* Y *— подпространство* X, *а* X *обладает одним из следующих свойств: не содержит* l_1, *суперрефлексивно, рефлексивно,* B*-выпукло,* ABS, BS. *Тогда и* X/Y *обладает тем же свойством.*

3. Покажем, что для свойств ABS и BS положительно решается «задача трех пространств».

Теорема 2. *Пусть* $X \subset Y$. *Если* X/Y, $Y \in ABS$, *то* $X \in ABS$.

Доказательство. Нам понадобится следующее утверждение, принадлежащее Брюнелю и Сачестону (см. [4, с. 359; 5, с. 235]):

Пусть (x_n) — ограниченная последовательность в банаховом пространстве X. Тогда существует подпоследовательность $(e_n) \subset \subset (x_n)$ и полунорма L, определенная на множестве S финитных числовых последовательностей, такие, что для любого $a = (a_i) \in S$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\nu = \nu(a, \varepsilon) \in N$, для которого

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{n_i} \right\| - L(a) \right| < \varepsilon$$

для любых $\nu \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$. Эта полунорма является нормой, если (что в дальнейшем и будет предполагаться) (x_n) не имеет подпоследовательностей Коши (см. [5, с. 236]). Пополнение S по этой норме называется растягивающей моделью пространства X, построенной на последовательности (x_n); (e_n) называется фундаментальной последовательностью этой модели.

Согласно теоремам III.1 и II. 2 из [4] имеем $X \notin ABS$ тогда и только тогда, когда у X существует растягивающая модель, последовательность ортов которой эквивалентна каноническому базису l_1. Пусть $X \notin ABS$; (e_n) — фундаментальная последовательность растягивающей модели, для которой существует $\delta > 0$ такое, что для любого $a = (a_i) \in S$ имеем $\delta\Sigma |a_i| \leqslant L(a) \leqslant \delta^{-1}\Sigma |a_i|$. Обозначим через Q фактор-отображение X на X/Y. На последовательности (Qe_n) построим растягивающую модель пространства X/Y. Пусть $(Qe_{m(i)})_{i=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность этой модели. В силу того что $X/Y \in ABS$, найдется $(b_1, \ldots, b_k, 0, \ldots) \in S$ с $\Sigma |b_i| = 1$ и такое натуральное ν, что при $\nu \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$; $n_j \in \{m(i)\}_{i=1}^{\infty}$ имеем $\left\| \sum_{i=1}^{k} b_i Q e_{n_i} \right\| < \delta/2$. Пусть $m(p)$ — наименьшее число в последовательности $\{m(i)\}_{i=1}^{\infty}$, превосходящее ν. Рассмотрим векторы $y_1 = \sum_{i=1}^{k} b_i Q e_{m(p+i)}, \ \ldots, \ y_q = \sum_{i=1}^{k} b_i Q e_{m(p+(q-1)k+i)}, \ \ldots$ Имеем $\| y_q \| < \delta/2$, поэтому найдутся векторы $z_q \in X$ такие, что $Qz_q = y_q$ и $\| z_q \| < \delta/2$. Рассмотрим векторы $h_q = \sum_{i=1}^{k} b_i e_{m(p+(q-1)k+i)} - z_q$. Очевидно, что $h_q \in Y$. Орты растягивающей модели пространства Y, построенной на последовательности (h_q), эквивалентны каноническому базису l_1, так как

$$\liminf \left\| \sum_{j=1}^{l} c_j h_{s_j} \right\| \geqslant \liminf \left\| \sum_{j=1}^{t} c_j \sum_{i=1}^{k} b_i e_{m(p+(s_j-1)(k+i)} \right\| - \left(\sum_{j=1}^{l} |c_j|\right) \delta/2 \geqslant (\delta/2) \sum_{j=1}^{l} |c_j|$$

(где пределы берутся при $\nu \to \infty$ и $\nu \leqslant s_1 < \ldots < s_l$). Следовательно, $Y \notin ABS$, и полученное противоречие доказывает теорему 2.

Следствие (*п. 1 теоремы 3 в* [9]). *Если X/Y, $Y \in BS$, то $X \in BS$.*

Для доказательства применяем отмеченное в работе [4, с. 367] утверждение: $BS = ABS \wedge R$ (R — рефлексивность) и тот хорошо известный факт, что для R верен аналог теоремы 2.

4. Рассмотрим связь свойства Банаха—Сакса с методами суммирования, более общими, чем метод Чезаро.

Напомним некоторые определения [10, 11]. Бесконечная матрица вещественных чисел $A = (a_{ij})_{i=1,}^{\infty}{}_{j=1}^{\infty}$ называется регулярным методом суммирования, если для любой последовательности (x_i) векторов банахова пространства X из существования в сильной топологии $\lim\limits_{i\to\infty} x_i$ следует (в той же топологии) сходимость рядов $x_i' = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j$ и существование $\lim\limits_{i\to\infty} x_i'$, равного $\lim\limits_{i\to\infty} x_i$. Известная теорема Теплица—Сильвермана утверждает, что A является регулярным методом суммирования тогда и только тогда, когда

$$\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = M < \infty; \tag{4}$$

$$\lim_{i\to\infty} a_{ij} = 0 \text{ для каждого } j; \tag{5}$$

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = 1. \tag{6}$$

В дальнейшем будем рассматривать только регулярные методы суммирования. Пусть (x_n) — ограниченная последовательность в банаховом пространстве X. Говорят, что (x_n) суммируема методом A, если последовательность $x_i' = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j$ сильно сходится. Будем говорить, следуя [10, с. 234], что банахово пространство X обладает свойством Банаха—Сакса относительно A, если каждая ограниченная последовательность в X имеет подпоследовательность, суммируемую методом A. В случае, когда A есть матрица Чезаро (т. е. $a_{ij} = 1/i$ при $j \leqslant i$ и $a_{ij} = 0$ при $j > i$), получаем (обычное) свойство Банаха—Сакса.

Теорема 3. *Если* $\limsup\limits_{i} (\sup\limits_{j} |a_{ij}|) > 0$, *то класс пространств, обладающих свойством Банаха—Сакса относительно* A, *совпадает с классом конечномерных пространств, а если* $\lim\limits_{i} (\sup\limits_{j} |a_{ij}|) = 0$, *то — с классом пространств, обладающих (обычным) свойством Банаха—Сакса.*

Доказательство. Ясно, что конечномерные пространства обладают свойством Банаха—Сакса относительно любого регулярного метода A, так как в них каждая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.

Ввиду результата работы [11] пространства, обладающие свойством Банаха—Сакса относительно некоторого регулярного метода

A, рефлексивны, так что в дальнейшем будем рассматривать только рефлексивные пространства.

Пусть X бесконечномерно и рефлексивно. Тогда в нем (см. [8.1] I.a.) можно найти нормированную, слабо сходящуюся к нулю, базисную последовательность (x_i). Имеем $\| x_i' \| \geqslant \sup_j | a_{ij} |/(2C)$ (C — базисная константа (x_i)). Так что если $\limsup_{i\to\infty} (\sup_j | a_{ij} |) > 0$, то x_i' не сходится к нулю сильно и X не обладает свойством Банаха—Сакса относительно A. Первая часть теоремы доказана.

Пусть X рефлексивно и не обладает свойством Банаха—Сакса. В силу предложения II.2 из [4] в X найдется слабо сходящаяся к нулю последовательность (e_n), являющаяся фундаментальной для растягивающей модели, орты которой эквивалентны каноническому базису l_1. Для любого регулярного метода A, имеющего вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \\ 0 & \ldots & 0 & a_{2(k_1+1)} & \ldots & a_{2k_2} & 0 & \ldots & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{3(k_2+1)} & \ldots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix},$$

можно найти подпоследовательность в (e_n) не суммируемую методом A. Следовательно, ввиду условий (4)—(6) это можно сделать для любого регулярного метода.

Пусть X обладает свойством Банаха—Сакса. Тогда из любой слабо сходящейся к нулю последовательности в X можно выделить подпоследовательность (e_i), все подпоследовательности которой равномерно суммируемы (к нулю) по Чезаро (это следует из результатов работы [10]) и, следовательно, можно найти последовательность положительных чисел $(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям $n\varepsilon_n > \| e_{k_1} + \ldots + e_{k_n} \| \ \forall k_1 < \ldots < k_n$; $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 \geqslant \ldots \geqslant \varepsilon_n \geqslant \ldots \to 0$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим теперь произвольный регулярный метод суммирования, удовлетворяющий условию $\lim_i (\sup_j | a_{ij} |) = 0$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $e_i' = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} e_j$. Оценим норму суммы $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^{+} e_j$ ($a_{ij}^{+} = \max(a_{ij}, 0)$), аналогично оценивается и $\sum_{j=1}^{\infty} (-a_{ij})^{+} e_j$. Ввиду условий Теплица—Сильвермана сумму можно считать конечной. Перенумеруем a_{ij}^{+} так, чтобы они образовывали невозрастающую последовательность $(a_{i\pi(j)}^{+})_{j=1}^{\infty}$, и пусть $a_{i\pi(p)}^{+}$ — последний ненулевой ее член. Тогда

$$\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^{+} e_j \| = \| \sum_{j=1}^{p} a_{i\pi(j)}^{+} e_{\pi(j)} \| = \| a_{i\pi(p)}^{+} (e_{\pi(1)} + \ldots + e_{\pi(p)}) +$$
$$+ (a_{i\pi(p-1)}^{+} - a_{i\pi(p)}^{+}) (e_{\pi(1)} + \ldots + e_{\pi(p-1)}) + \ldots + (a_{i\pi(1)}^{+} -$$

$$- a^{+}_{i\pi(2)}) e_{\pi(1)} \| \leqslant a^{+}_{i\pi(p)}\varepsilon_p \cdot p + (a^{+}_{i\pi(p-1)} - a^{+}_{i\pi(p)}) \varepsilon_{p-1} (p-1) + \ldots$$
$$\ldots + (a^{+}_{i\pi(1)} - a^{+}_{i\pi(2)}) \varepsilon_1 = a^{+}_{i\pi(1)}\varepsilon_1 + a^{+}_{i\pi(2)} (2\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \ldots$$
$$\ldots + a^{+}_{i\pi(p)} (\varepsilon_p \cdot p - \varepsilon_{p-1} (p-1)) \leqslant a^{+}_{i\pi(1)}\varepsilon_1 + \ldots + a^{+}_{i\pi(p)}\varepsilon_p.$$

Выберем q, начиная с которого $\varepsilon_q < \varepsilon/(4M)$. Тогда $a^{+}_{i\pi(q)}\varepsilon_q + \ldots + a^{+}_{i\pi(p)}\varepsilon_p < \varepsilon/4$. После этого выберем i, начиная с которого $\sup\limits_j |a_{ij}| < \varepsilon/(4(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{q-1}))$, тогда $a^{+}_{i\pi(1)}\varepsilon_1 + \ldots + a^{+}_{i\pi(q-1)}\varepsilon_{q-1} < \varepsilon/4$ и, следовательно, $\|\sum\limits_{j=1}^{\infty} a^{+}_{ij} e_j \| < \varepsilon/2$. Проведя аналогичные рассуждения для $\sum\limits_{j=1}^{\infty} (-a_{ij})^{+} e_j$, найдем i, начиная с которого $\|\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij} e_j\| < \varepsilon$. Поэтому последовательность (e_j) суммируема методом A. Теорема доказана.

5. Перейдем к установлению связей между растворами и инъективностью банаховых пространств. Пусть X и Y — подпространства банахова пространства Z. Сферическим раствором X и Y называется [12] величина

$$\Omega(X, Y) = \max \{ \sup_{x \in S(X)} \operatorname{dist}(x, S(Y)), \sup_{y \in S(Y)} \operatorname{dist}(y, S(X)) \}.$$

Наклоном X и Y называется $\operatorname{dist}(S(X), Y)$. Нам понадобится известный факт (см. [2, с. 197]): если наклон X к Y ненулевой, то он совпадает с $1/\|P\|$, где P — проектор $\operatorname{Lin}(X \cup Y)$ на X параллельно Y.

Напомним, что (сепарабельное) банахово пространство X называется (сепарабельно) инъективным, если для любого (сепарабельного) банахова пространства V, содержащего X в качестве подпространства, существует непрерывная линейная проекция V на X. О таких пространствах см. в работе [8.1.2.f]. (Сепарабельное) банахово пространство X называется (P'_λ) P_λ-пространством (записывается $(X \in P'_\lambda)$ $X \in P_\lambda$), если для любого (сепарабельного) банахова пространства V, содержащего X в качестве подпространства, существует непрерывная линейная проекция V на X с нормой, не превосходящей λ. Путем склеивания вложений (см., например, [3, 6]) можно показать, что каждое (сепарабельно) инъективное пространство является (P'_λ) P_λ-пространством с некоторым λ.

Предложение 3. *Пусть X и Y — подпространства банахова пространства Z. Если $X \in P_\lambda$ (P'_λ) и $\Omega(X, Y) < 1/\lambda$ $(\Omega(X, Y) < 1/\lambda \wedge \Theta(X, Y) < 1/2)$, то Y изоморфно X, причем $d(X, Y) \leqslant (1 + \lambda\Omega(X, Y))/(1 - \lambda\Omega(X, Y))$* **(7)**, *где d — дистанция Банаха—Мазура.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $X \in P_\lambda$. Пусть P — проектор Z на X такой, что $\|P\| \leqslant \lambda$. Тогда для любого $y \in S(Y)$ имеем $(1 - \lambda\Omega(X, Y)) \leqslant \|Py\| \leqslant (1 + \lambda\Omega(X, Y))$, и нужно лишь доказать, что $PY = X$. Пусть это не так. Тогда найдется $x \in S(X)$ с $\operatorname{dist}(x, PY) \geqslant 1-\varepsilon$. Пусть $y \in S(Y)$ таков, что $\|x-y\| \leqslant \Omega(X, Y)+\varepsilon$. Имеем $\|x-Py\| \leqslant \lambda(\Omega(X, Y)+\varepsilon)$. Взяв ε меньше $1-\lambda\Omega(X, Y)/(1+\lambda)$, приходим к противоречию. Случай $X \in P'_\lambda$ рассматривается так же, поскольку ввиду $\Theta(X, Y) < 1/2$ можем по теореме М. Г. Крейна, М. А. Красносельского и Д. П Мильмана [1, теорема 3, с. 101] считать Y и Z сепарабельными. Предложение доказано.

Из предложения 3 и известных результатов: $l^\infty(\Gamma)$, $L^\infty(\mu) \in P_1$; $c_0 \in P'_2$ (см. [8.1.2.f]) непосредственно вытекает:

Следствие 1) $(\Omega(l^\infty(\Gamma), Y) < 1) \Rightarrow$ (*Y изоморфно* $l^\infty(\Gamma)$);
2) $(\Omega(L^\infty(\mu), Y) < 1) \Rightarrow$ (*Y изоморфно* $L^\infty(\mu)$);
3) $(\Omega(c_0, Y) < 1/2) \Rightarrow$ (*Y изоморфно* c_0).

При выполнении условий предложения 3 можно, используя (7), оценить сверху те β, для которых $Y \in P_\beta$. Однако эти оценки будут хуже приводимых ниже.

Предложение 4. *Пусть X и Y — подпространства банахова пространства Z; $X \in P_\lambda (P'_\lambda)$ и $\Omega(X, Y) < 1/\lambda$, $(\Omega(X, Y) < 1/\lambda \wedge \wedge \Theta(X, Y) < 1/2)$. Тогда $Y \in P_\beta (P'_\beta)$, где $1/\beta = 1/\lambda - \Omega(X, Y)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $X \in P_\lambda$. Пусть Y — подпространство банахова пространства W. Рассмотрим пространство $V = (W \oplus Z)_1/M$, где $M = \{(y, -y) : y \in Y\}$. Найдется проектор $P: V \to X$ такой, что $\|P\| \leqslant \lambda$. Обозначим $N = \operatorname{Ker} P$. Тогда наклон $\operatorname{dist}(S(X), N) \geqslant 1/\lambda$, а $\operatorname{dist}(S(Y), N) \geqslant 1/\lambda - \Omega(X, Y) = 1/\beta$ и, следовательно, из $\operatorname{Lin}(N \cup Y)$ существует проектор на Y с нормой, не превосходящей β. Остается лишь показать, что замыкание $\operatorname{Lin}(N \cup Y)$ в сильной топологии совпадает с V. Пусть это не так. Тогда существует $a \in V$, $\|a\| = 1$ и $f \in V^*$, $\|f\| = 1$, $f(a) > 1-\varepsilon$. Имеем $f(Pa) = f(a)$. Поскольку $\|Pa\| \leqslant \lambda$, то найдется $x \in X$ с $\|Pa - x\| \leqslant \lambda(\Omega(X, Y)+\varepsilon)$; $f(x) = 0$, следовательно, $f(Pa) \leqslant \lambda(\Omega(X, Y)+\varepsilon)$. Взяв ε меньше, чем $(1-\lambda\Omega(X, Y))/(1+\lambda)$, приходим к противоречию.

Случай $X \in P'_\lambda$ можно рассматривать аналогично; это следует из рассуждения, проведенного при доказательстве предложения 3.

Список литературы: 1. *Крейн М. Г., Красносельский М. А., Мильман Д. П.* О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах.— Сб. трудов ин-та матем. АН УССР, 1948, **11**, с. 97—112. 2. *Гурарий В. И.* О растворах и наклонах подпространств банахова пространства.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1965, вып. 1, с. 194—204. 3. *Островский М. И.* О свойствах раствора и связанных с ним характеристик близости банаховых пространств.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1984, вып. 42, с. 97—107. 4. *Beauzamy B.* Banach—Saks propertias and spreading models.— Math. scand., 1979, **44**, p. 357—384. 5. *Dulst van D.* Reflexive and superreflexive Banach. spaces.— Amsterdam: Mathematish Centrum, 1978.—273 p. 6. *Кадец М. И.* Замечание о растворе подпространств.— Функцион. анализ и его прил., 1975, **9**, вып. 2, с. 73—74. 7. *Kottman C.* Packing and reflexivity in Banach spaces.— Trans. Amer. Math. Soc., 1970, **150**, p. 565—576. 8. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces I, II.—Berlin: Springer, 1977.—431 p. 9. *Годун Б. В., Раков С. А.* Свойство Банаха—Сакса и задача трех пространств.— Матем. заметки, 1982, **31**, вып. 1, с. 61—74. 10. *Erdös P., Magidor M.* A note on regular methods of summability and the Banach—Saks property.— Proc. Amer. Math. Soc., 1976, **59**, p. 232—234. 11. *Singer I.* A remark on reflexivity and summability.— Stud. math., 1965, **26**, p. 113—114. 12. *Гохберг И. Ц., Маркус А. С.* Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства.— Усп. матем. наук, 1959, **14**, вып. 5, с. 135—140.

Поступила в редколлегию 03.11.83.