УДК 519.4

А. Р. МИРОТИН

ОБ АБЕЛЕВЫХ ПОЛУГРУППАХ С ИНВАРИАНТНОЙ МЕРОЙ

Пусть (S, τ) — абелева топологическая полугруппа, μ — внутренне регулярная инвариантная мера на S, определенная на σ-алгебре $\mathcal{B}(S)$ борелевских подмножеств S, причем каждая точка из S обладает окрестностью конечной меры. Как показано в [1, теорема 2], в этом случае существует локально компактная абелева группа (G, T') и непрерывный гомоморфизм Q из S на подгруппу $\Sigma \subset G$, порождающую G, $\operatorname{int}\Sigma \neq \varnothing$. При этом $\Sigma = S/\sim$, где $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $xz = yz$ при некотором $z \in S$, Q — естественное отображение S на Σ. Кроме того, $\nu(E) = \mu(Q^{-1}E)$ при $E \in \mathcal{B}(\Sigma) \cap \mathcal{B}(S)$, где ν — мера Хаара группы G [1, с. 331; 2]. Ниже будет доказано, что G совпадает со второй группой характеров $\hat{X}$ полугруппы S, причем Q есть естественное отображение из S в $\hat{X}$ (характером мы называем непрерывный гомоморфизм из S в одномерный тор $\boldsymbol{T}$).

Обозначив через ν' сужение меры ν на σ-кольцо $\mathcal{B}(\Sigma) \cap \mathcal{B}(G)$ и пусть $g \in L^1(\Sigma, \nu')$. Тогда $\int g d\nu' = \int g \circ Q d\mu$. Если $g_a: t \to g(t-a)$, то $g_a \in L^1(\Sigma, \nu')$ при $a \in \Sigma$ (мы полагаем $g \mid (G/\Sigma) = 0$).

Лемма 1. *Отображение $a \to g_a$ из Σ в $L^1(\Sigma, \nu')$ непрерывно.*

Определим топологию Γ на группе $\hat{G}$ характеров группы G с помощью системы окрестностей единицы $\Gamma(g_1, \ldots, g_n; \varepsilon) = \{\psi \in \hat{G} : |\hat{g}_j(\psi) - \hat{g}_j(1)| < \varepsilon,\ j = 1, \ldots, n\}$, где $n \in N$; $\varepsilon > 0$, $g_j \in L^1(\Sigma, \nu')$; $\hat{g}_j$ — преобразование Фурье.

Лемма 2. *Отображение $(a; \psi) \to \psi(a)$ из $(\Sigma, \mathcal{T}' \mid \Sigma) \times (\hat{G}, \Gamma)$ в $\boldsymbol{T}$ непрерывно.*

Будем рассматривать на $\hat{G}$ также компактно-открытую топологию P', базу окрестностей единицы в которой образуют множества $P'(K; \varepsilon) = \{\psi \in \hat{G} : |\psi(t) - 1| < \varepsilon$ при $t \in K\}$, где K пробегает $\mathscr{C}(G)$, $\varepsilon > 0$ (здесь и далее $\mathscr{C}(Y)$ — система всех компактных подмножеств пространства Y), топологию P_1' с базой окрестностей единицы $\{P'(K_1; \varepsilon): K_1 \in \mathscr{C}(\Sigma),\ \varepsilon > 0\}$ и топологию P_2', определяемую базой окрестностей единицы $\{P'(Q(C); \varepsilon) : C \in \mathscr{C}(S),\ \varepsilon > 0\}$.

Лемма 3. $P' = P_2'$.

Доказательство. Для любого $K \in \mathscr{C}(G)$ существует такой $a \in \Sigma$, что $K_1 = aK \in \mathscr{C}(\Sigma)$ [3, с. 819]. Поскольку $P'(K_1 \cup \{a\}; \varepsilon/2) \subset P'(K; \varepsilon)$, то $P' = P_1'$. Лемма 2 дает $P_1' \leqslant \Gamma$. Для завершения доказательства достаточно убедиться, что $\Gamma \leqslant P_2'$. Выберем произвольно $\Gamma(g_1, \ldots, g_n; \varepsilon)$ $(g_j \neq 0)$. Пусть $C \in \mathscr{C}(S)$ таково, что $\int\limits_{S/C} |g_j \circ Q| d\mu < \frac{\varepsilon}{4}$ при $j = 1, \ldots, n$. Тогда $\int\limits_{\Sigma/Q(C)} |g_j| d\nu' < \frac{\varepsilon}{4}$.

Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2} \min\limits_j \frac{1}{\|g_j\|}$. При $\psi \in P'(Q(C); \delta)$ будем иметь

$|\hat{g}_i(\psi)-\hat{g}_i(1)|<\varepsilon$, т. е. $P^t(Q(C);\ \delta)\subset\Gamma(g_1, \ldots, g_n;\ \varepsilon)$, что и требовалось доказать.

Обозначим через X группу характеров полугруппы S, наделенную компактно-открытой топологией, окрестности единицы в которой будут обозначаться $P(C;\ \varepsilon)$ $(C\in\mathscr{C}(S),\ \varepsilon>0)$.

Предложение. *Группа G (алгебраически и топологически) изоморфна второй группе характеров X полугруппы S, и при этом изоморфизме отображение Q переходит в естественное отображение ω: $S\to\hat{X}$.*

Доказательство. Отождествим $\hat{G}$ с группой характеров полугруппы Σ, и пусть $i{:}\ \psi\to\psi\circ Q$ — отображение из $\hat{G}$ в X. Это — инъективный гомоморфизм. Для любого $\chi\in X$ при $x\sim y$ будем иметь $\chi(x)=\chi(y)$. Следовательно, $\chi=\xi\circ Q$, где ξ — гомоморфизм из Σ в $\boldsymbol{T}$. Ясно, что ξ непрерывен в фактор-топологии τ' полугруппы Σ. В силу [1, с. 318, лемма 4; с. 328, лемма 7] в Σ существует идеал N, открытый в топологии $\mathscr{T}'$ и такой, что $\tau'|N=\mathscr{T}'|N$. Следовательно, $\xi|N$, а вместе с ним и ξ, суть $\mathscr{T}'$ — непрерывны. Таким образом, $\xi\in\hat{G}$ и i — биекция. Далее, i отображает $P'(Q(C);\ \varepsilon)$ на $P(C;\ \varepsilon)$ для любого $C\in\mathscr{C}(S)$. С учетом леммы 3 это означает, что i — гомеоморфизм. Тогда двойственное отображение $\hat{i}{:}\ \hat{X}\to\hat{\hat{G}}=G$ тоже есть изоморфизм топологических групп.

Наконец, для любых $\chi\in X$, $x\in S$ имеем $\omega(x)(\chi)=\chi(x)=$ $=\psi(Q(x))$, где $\psi\in G$. Рассматривая точку $Q(x)\in G$ как элемент $\hat{\hat{G}}$, отсюда получаем $\omega(x)(i(\psi))=Q(x)(\psi)$, т. е. $\hat{i}\circ\omega=Q$, что и завершает доказательство.

Доказанное предложение в соединении с основной теоремой из работы [1, с. 314] приводит к следующему результату.

Теорема. *Пусть ω — естественное отображение абелевой топологической полугруппы S с инвариантной мерой μ в свою вторую группу характеров $\hat{X}$. Тогда* а) *отображение ω — непрерывный гомоморфизм;* б) *полугруппа $\omega(S)$ порождает $\hat{X}$,* $\mathrm{int}\,\omega(S)\neq\varnothing$; в) $\mu(C)=\nu(\omega(C))$ *для любого $C\in\mathscr{C}(S)$, где ν — мера Хаара группы $\hat{X}$;* г) *отображение ω инъективно тогда и только тогда, когда S — полугруппа с сокращениями;* д) *отображение ω есть топологическое вложение тогда и только тогда, когда S — полугруппа с непрерывной инверсией (т. е. если направленности (s_α) и (t_α) точек из S таковы, что $s_\alpha t_\alpha\to st$, $s_\alpha\to s$,* то *$t_\alpha\to t$).*

Список литературы: 1. *Paterson A. L. T.* Invariant measure semigroups.— Proc. London. Math. Soc., 1977, 35, p. 313—332. 2. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. — М.: Наука, 1975.—235 с. 3. *Миротин А. Р., Мухин В. В.* Об инвариантных мерах, продолжающихся с полугруппы на группу ее частных. — Мат. заметки, 1978, 24:6, с. 819—828.

Поступила в редколлегию 23.11.83.