УДК 517.9

Д. Ш. ЛУНДИНА

КОМПАКТНОСТЬ МНОЖЕСТВА БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Рассмотрим одномерный оператор Шредингера

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \, (-\infty < x < \infty)$$

с вещественным бесконечно дифференцируемым потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим неравенствам

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|q^{(k)}(x)|\,dx < \infty \ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Оператор H самосопряжен, его непрерывный спектр двукратен и заполняет всю положительную полуось. Кроме того, он может иметь конечное число простых отрицательных собственных значений $\mu_n < \mu_{n-1} < \cdots < \mu_1 < 0$.

Как известно [1], при всех значениях λ из замкнутой верхней (нижней) полуплоскости уравнение $-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$ имеет решения $e^+(\lambda,\ x)\,(e^-(\lambda,\ x))$, представимые в виде

$$\begin{aligned} e^+(\lambda,\ x) &= e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} K^+(x,\ t)\,e^{i\lambda t}\,dt = \\ &= \exp\left\{i\lambda x - \int_x^{\infty} \sigma^+(\lambda,\ t)\,dt\right\}; \\ (e^-(\lambda,\ x) &= e^{i\lambda x} + \int_{-\infty}^{x} K^-(x,\ t)\,e^{i\lambda t}\,dt = \\ &= \exp\left\{i\lambda x + \int_{-\infty}^{x} \sigma^-(\lambda,\ t)\,dt\right\}), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\sigma(\lambda, t)$ удовлетворяет уравнению $\sigma'(\lambda, t) + 2i\lambda\sigma(\lambda, t) + \sigma^2(\lambda, t) - q(t) = 0$ (2) и при $|\lambda| \to \infty$ разлагается в асимптотический ряд

$$\sigma(\lambda,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(t)}{(2i\lambda)^k}; \tag{3}$$

$$\sigma_1(t) = q(t),\ \ \sigma_2(t) = -q'(t),$$

$$\sigma_3(t) = q''(t) - q(t)^2,\ \ \sigma_4(t) = -q'''(t) + 2\frac{d}{dt}q(t)^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_{k+1}(t) = -\sigma_k'(t) + \sum_{j=1}^{k-1} \sigma_{k-j}(t)\,\sigma_j(t)\ (k=2,\ 3,\ \ldots). \tag{4}$$

При $-\infty < \lambda < \infty$ решения $e^+(\lambda,\ x)$, как и решения $e^-(\lambda,\ x)$, образуют полный набор собственных функций непрерывного спектра, отвечающих собственным значениям $\mu = \lambda^2$, и они связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} e^+(\lambda,\ x) &= b(\lambda)\,e^-(-\lambda,\ x) + a(\lambda)\,e^-(\lambda,\ x); \\ e^-(-\lambda,\ x) &= -b(-\lambda)\,e^+(\lambda,\ x) + a(\lambda)\,e^+(-\lambda,\ x), \end{aligned} \tag{5}$$

где $2i\lambda a(\lambda) = W\{e^+(\lambda, x), e^-(-\lambda, x)\}$; $2i\lambda b(\lambda) = W\{e^-(\lambda, x), e^+(\lambda, x)\}$; $W\{f, g\} = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$ — вронскиан функций $f(x)$, $g(x)$.

Функция $2i\lambda a(\lambda)$ голоморфна в верхней полуплоскости и непрерывна в замкнутой верхней полуплоскости. В верхней полуплоскости она имеет конечное число нулей $i\varkappa_k$ $(\varkappa_n \geqslant \varkappa_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_1 > 0)$, квадраты которых есть отрицательные собственные значения оператора $H: \mu_k = (i\varkappa_k)^2$.

Решение $e^+(i\varkappa_k, x)$, как и решение $e^-(-i\varkappa_k, x)$, является собственной функцией оператора H, соответствующей собственному значению $\mu_k = (i\varkappa_k)^2$. Они связаны между собой неравенствами

$$e^+(i\varkappa_k, x) = C_k^+ e^-(-i\varkappa_k, x),\quad e^-(-i\varkappa_k, x) = C_k^- e^+(i\varkappa_k, x),$$
$$C_k^+ C_k^- = 1,$$

а их нормировочные коэффициенты $(m_k^+)^2$ $(m_k^-)^2$ выражаются через C_k^+, C_k^-, $a(\lambda)$ следующим образом:

$$(m_k^\pm)^{-2} \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |e^\pm(\pm i\varkappa_k, x)|^2\, dx = iC_k^\pm \dot{a}(i\varkappa_k)$$

(точкой обозначается дифференцирование по λ).

Функции $r^-(\lambda) = b(\lambda)\, a(\lambda)^{-1}$, $r^+(\lambda) = -b(-\lambda)\, a(\lambda)^{-1}$ называются соответственно левым и правым коэффициентами отражения, а наборы величин $\{r^-(\lambda), i\varkappa_k, m_k^-\}$, $\{r^+(\lambda), i\varkappa_k, m_k^+\}$ — левыми и правыми данными рассеяния.

Потенциал $q(x)$ однозначно восстанавливается по левым или правым данным рассеяния. Для нахождения потенциала нужно составить уравнение Марченко:

$$F^+(x+y) + K^+(x, y) + \int_x^{\infty} F^+(y+t)\, K^+(x, t)\, dt = 0;$$

$$F^+(x+y) = \sum_{k=1}^{n} (m_k^+)^2 e^{-\varkappa_k(x+y)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^+(\lambda)\, e^{i\lambda(x+y)}\, d\lambda$$

$$\left(\text{или } F^-(x+y) + K^-(x, y) + \int_{-\infty}^{x} F^-(t+y)\, K^-(x, t)\, dt = 0;\right.$$

$$\left. F^-(x+y) = \sum_{k=1}^{n} (m_k^-)^2 e^{\varkappa_k(x+y)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^-(\lambda)\, e^{-i\lambda(x+y)}\, d\lambda \right)$$

и решить его относительно $K^+(x, y)$ (или $K^-(x, y)$). При этом потенциал $q(x)$ выражается через ядра операторов преобразования (1) $K^+(x, y)$, $K^-(x, y)$ по формулам

$$K^+(x, x) = \frac{1}{2}\int_x^{\infty} q(t)\, dt,\quad K^-(x, x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} q(t)\, dt.$$

Известны необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять набор $\{r^+(\lambda),\ i\varkappa_k,\ m_k^+\}$ (или $\{r^-(\lambda),\ i\varkappa_k,\ m_k^-\}$), чтобы он представлял собой правые (или левые) данные рассеяния некоторого оператора H рассматриваемого вида [1, с. 274]. В частности, при любых $\varkappa_k > 0$ $m_k^+ > 0$ набор $\{0,\ i\varkappa_k,\ m_k^+\}$ есть правые данные рассеяния оператора H этого вида. Такие потенциалы называются безотражательными (коэффициенты отражения $r^+(\lambda)$, $r^-(\lambda)$ тождественно равны нулю). Явные формулы для безотражательных потенциалов были получены Баргманом [2] еще до того, как была развита общая теория обратных задач. Безотражательные потенциалы называются также баргмановскими.

Лемма 1. *Для безотражательных потенциалов* ($r^+(\lambda) \equiv r^-(\lambda) \equiv 0$) *решения* $e^+(\lambda, x)$, $e^-(\lambda, x)$ *представимы в виде*

$$e^+(\lambda, x) = e^{i\lambda x} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda - i\lambda_k^+(x)}{\lambda + i\varkappa_k}, \quad e^-(\lambda, x) = e^{i\lambda x} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda - i\lambda_k^+(x)}{\lambda - i\varkappa_k}. \tag{6}$$

Доказательство. В случае безотражательного потенциала

$$F^+(x+y) = \sum_{k=1}^{n} (m_k^+)^2 e^{-\varkappa_k(x+y)}, \quad F^-(x+y) = \sum_{k=1}^{n} (m_k^-)^2 e^{\varkappa_k(x+y)},$$

откуда из уравнений, которым удовлетворяют функции $K^+(x, y)$, $K^-(x, y)$ следует, что

$$K^+(x, y) = -\sum_{k=1}^{n} (m_k^+)^2 e^{-\varkappa_k y}\left[e^{-\varkappa_k x} + \int_x^\infty K^+(x, t)\, e^{-\varkappa_k t}\, dt\right] =$$
$$= -\sum_{k=1}^{n} (m_k^+)^2 e^{-\varkappa_k y} e^+(i\varkappa_k, x);$$
$$K^-(x, y) = -\sum_{k=1}^{n} (m_k^-)^2 e^{\varkappa_k y}\left[e^{\varkappa_k x} + \int_{-\infty}^{x} K^-(x, t)\, e^{\varkappa_k t}\, dt\right] =$$
$$= -\sum_{k=1}^{n} (m_k^-)^2 e^{\varkappa_k y} e^-(-i\varkappa_k, x).$$

Если эти формулы для ядер операторов преобразования $K^+(x, y)$, $K^-(x, y)$ подставить в (1), то решения $e^+(\lambda, x)$, $e^-(\lambda, x)$ запишутся в виде

$$e^+(\lambda, x) = e^{i\lambda x}\left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(m_k^+)^2 e^{-\varkappa_k x} e^+(i\varkappa_k, x)}{i(\lambda + i\varkappa_k)}\right];$$
$$e^-(\lambda, x) = e^{i\lambda x}\left[1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(m_k^-)^2 e^{\varkappa_k x} e^-(-i\varkappa_k, x)}{i(\lambda - i\varkappa_k)}\right]$$

и, следовательно,

$$e^{+}(\lambda, x) = e^{i\lambda x}\frac{P^{+}(\lambda, x)}{\Pi^{+}(\lambda)}, \quad e^{-}(\lambda, x) = e^{i\lambda x}\frac{P^{-}(\lambda, x)}{\Pi^{-}(\lambda)},$$

где

$$\Pi^{+}(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda + i\varkappa_k), \quad \Pi^{-}(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda - i\varkappa_k), \text{ а}$$

$$P^{+}(\lambda, x) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k p_k^{+}(x), \quad P^{-}(\lambda, x) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k p_k^{-}(x) -$$

некоторые полиномы от λ с коэффициентами, зависящими от x. Обозначая корни этих полиномов соответственно через $i\lambda_k^{+}(x)$, $i\lambda_k^{-}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, получим для решений $e^{+}(\lambda, x)$, $e^{-}(\lambda, x)$ следующие представления:

$$e^{+}(\lambda, x) = e^{i\lambda x}\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda - i\lambda_k^{+}(x)}{\lambda + i\varkappa_k}, \quad e^{-}(\lambda, x) = e^{i\lambda x}\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda - i\lambda_k^{-}(x)}{\lambda - i\varkappa_k}.$$

В случае безотражательного потенциала решения $e^{+}(-\lambda, x)$ и $e^{-}(-\lambda, x)$ на вещественной оси связаны, согласно (5), равенством $e^{-}(-\lambda, x) = a(\lambda)e^{+}(-\lambda, x)$, поэтому, используя последние формулы, будем иметь

$$e^{-i\lambda x}\prod_{k=1}^{n}\frac{-\lambda - i\lambda_k^{-}(x)}{-\lambda - i\varkappa_k} = e^{-i\lambda x}\prod_{k=1}^{n}\frac{-\lambda - i\lambda_k^{+}(x)}{-\lambda + i\varkappa_k}\cdot\frac{\lambda - i\varkappa_k}{\lambda + i\varkappa_k}$$

$\left(\text{при } r^{\pm}(\lambda) \equiv 0 \; a(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda - i\varkappa_k}{\lambda + i\varkappa_k}\right)$ и, следовательно, $\prod_{k=1}^{n}(\lambda + i\lambda_k^{+}) \times$
$\times (x)) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda + i\lambda_k^{-}(x))$.

Таким образом, при соответствующей нумерации корней $\lambda_k^{+}(x) = \lambda_k^{-}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и окончательно решения $e^{+}(\lambda, x)$, $e^{-} \times$ $\times (\lambda, x)$ могут быть записаны в виде (6):

$$e^{+}(\lambda, x) = e^{i\lambda x}\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda - i\lambda_k^{+}(x)}{\lambda + i\varkappa_k}, \quad e^{-}(\lambda, x) = e^{i\lambda x}\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda - i\lambda_k^{+}(x)}{\lambda - i\varkappa_k}.$$

Заметим, что этими формулами в случае безотражательного потенциала осуществляется аналитическое продолжение решения $e^{+}(\lambda, x)$ в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda < 0$ и решения $e^{-}(\lambda, x)$ — в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda > 0$ как мероморфных функций. При этом числа $i\lambda_k^{+}(x)$, которые лежат в верхней (нижней) полуплоскости, имеют следующий спектральный смысл: их квадраты являются отрицательными собственными значениями самосопряженной краевой задачи —

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \; y(x_0) = 0 \; (x_0 \leqslant x < \infty);$$
$$(-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \; y(x_0) = 0 \; (-\infty < x \leqslant x_0)$$

и, следовательно, все числа $i\lambda_k^{+}(x)(k = 1, 2, \ldots, h)$ при любом x лежат на мнимой оси, и их модули $|\lambda_k^{+}(x)|$ являются неотрицательными корнями функции

$$e^{+}(i\varkappa, x)\, e^{-}(-i\varkappa, x) \; (0 \leqslant \varkappa < \infty).$$

Лемма 2. *Занумерованные в порядке возрастания модули корней* $i\lambda_k^{+}(x)(k = 1, 2, \ldots n)$ *при любом* x *перемежаются с корнями функции* $\varkappa a(i\varkappa)$, *т. е. выполняются неравенства*

$$0 = \varkappa_0 \leqslant |\lambda_1^{+}(x)| \leqslant \varkappa_1 \leqslant |\lambda_2^{+}(x)| \leqslant \varkappa_2 \leqslant \ldots \leqslant \varkappa_{n-1} \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda_n^{+}(x)| \leqslant \varkappa_n. \qquad (7)$$

Доказательство. Функция $\varkappa a(i\varkappa)$ имеет на полуоси $[0, \infty]$ корни $\varkappa_0 = 0, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$. Обозначим через K множество всех $x \in (-\infty, \infty)$, при которых выполняется хотя бы одно из равенств $e^{+}(i\varkappa_k, x)\, e^{-}(-i\varkappa_k, x) = 0 \, (k = 0, 1, \ldots, n)$. Множество K, очевидно, конечно, и если $x \bar{\in} K$, то функция

$$f(\varkappa) = \frac{e^{+}(i\varkappa, x)\, e^{-}(-i\varkappa, x)}{\varkappa a(\varkappa)}$$

непрерывна на каждом интервале $(0, \varkappa_1), (\varkappa_1, \varkappa_2), \ldots, (\varkappa_{n-1}, \varkappa_n)$ $(\varkappa_n, \infty)$, стремится к нулю при $\varkappa \to \infty$ и становится бесконечно большой, когда $\varkappa$ стремится к концам этих интервалов.

Покажем теперь, что функция $f(\varkappa)$ монотонно убывает на каждом из этих интервалов, т. е. докажем неравенство

$$\frac{\partial}{\partial\varkappa}\left(\frac{e^{+}(i\varkappa, x)\, e^{-}(-i\varkappa, x)}{\varkappa a(\varkappa)}\right) < 0 \; (0 \leqslant \varkappa < \infty).$$

Из уравнений

$$-y'' + q(x)y = -\varkappa^2 y, \; -\left(\frac{\partial y}{\partial\varkappa}\right)'' + q(x)\frac{\partial y}{\partial\varkappa} = -2\varkappa y - \varkappa^2\frac{\partial y}{\partial\varkappa},$$

которым удовлетворяют функции $e^{+}(i\varkappa, x)$, $\partial e^{+}(i\varkappa, x)/\partial\varkappa$ и

$$e^{-}(-i\varkappa, x), \; \frac{\partial e^{-}(-i\varkappa, x)}{\partial\varkappa},$$

следует, что

$$-2\varkappa y^2 = -y\left(\frac{\partial y}{\partial\varkappa}\right)'' + y''\frac{\partial y}{\partial\varkappa} = \left(y'\frac{\partial y}{\partial\varkappa} - y\frac{\partial y'}{\partial\varkappa}\right)'.$$

Поэтому

$$-2\varkappa\int_x^\infty |e^+(i\varkappa,\ x)|^2dx = -e^+(i\varkappa,\ x)'\,\frac{\partial e^+(i\varkappa,\ x)}{\partial\varkappa} + e^+(i\varkappa x)\,\frac{\partial e^+(i\varkappa x)'}{\partial\varkappa};$$

$$-2\varkappa\int_{-\infty}^{x} |e^-(-i\varkappa,\ x)|^2dx = e^-(-i\varkappa,\ x)'\,\frac{\partial e^-(-i\varkappa,\ x)}{\partial\varkappa} -$$

$$-e^-(-i\varkappa,\ x)\,\frac{\partial e^-(-i\varkappa,\ x)'}{\partial\varkappa},$$

и, значит,

$$-2\varkappa\int_x^\infty |e^+(i\varkappa,\ x)|^2dx = \frac{\partial}{\partial\varkappa}\left(\frac{e^+(i\varkappa,\ x)'}{e^+(i\varkappa,\ x)}\right)e^+(i\varkappa,\ x)^2;$$

$$-2\varkappa\int_{-\infty}^{x} |e^-(-i\varkappa,\ x)|^2dx = -\frac{\partial}{\partial\varkappa}\left(\frac{e^-(-i\varkappa,\ x)'}{e^-(-i\varkappa,\ x)}\right)e^-(-i\varkappa,\ x)^2.$$

Отсюда следует, что при $0 \leqslant \varkappa < \infty$

$$\frac{\partial}{\partial\varkappa}\left(\frac{e^+(i\varkappa,\ x)'}{e^+(i\varkappa,\ x)} - \frac{e^-(-i\varkappa,\ x)'}{e^-(-i\varkappa,\ x)}\right) < 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial\varkappa}\left\{\frac{W\{e^+(i\varkappa,\ x),\ e^-(-i\varkappa,\ x)\}}{e^+(i\varkappa,\ x)\,e^-(-i\varkappa,\ x)}\right\} < 0.$$

Так как $W\{e^+(i\varkappa,\ x),\ e^-(-i\varkappa,\ x)\} = -2\varkappa a(\varkappa)$, то тем самым доказано неравенство

$$\frac{\partial}{\partial\varkappa}\left\{\frac{-2\varkappa a(\varkappa)}{e^+(i\varkappa,\ x)\,e^-(i-i\varkappa,\ \tilde{x})}\right\} < 0\quad (0 \leqslant \varkappa < \infty)$$

и, значит,

$$\frac{\partial}{\partial\varkappa}\left\{\frac{e^+(i\varkappa,\ x)\,e^-(-i\varkappa,\ x)}{\varkappa a(\varkappa)}\right\} < 0\quad (0 \leqslant \varkappa < \infty)$$

и монотонность убывания функции $f(\varkappa)\,(0 \leqslant \varkappa < \infty)$ доказана.

Таким образом, каждый из интервалов $(0,\ \varkappa_1),\ \ldots,\ (\varkappa_{n-1},\ \varkappa_n)$ взаимно однозначно и непрерывно отображается функцией $f(\varkappa)$ на всю вещественную ось, а интервал $(\varkappa_n,\ \infty)$ — на полуось $(\infty,\ 0)$. Следовательно, в каждом интервале $(0,\ \varkappa_1),\ (\varkappa_1,\ \varkappa_2),\ \ldots,\ (\varkappa_{n-1},\ \varkappa_n)$ лежит один простой корень функции $f(\varkappa)$ и других корней на полуоси $[0,\ \infty)$ она не имеет. Корни функции $f(\varkappa)$ совпадают с корнями функции $e^+(i\varkappa,\ x)\,e^-(-i\varkappa,\ x)$, которые, согласно предыдущему, равны $|\lambda_k^+(x)|\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Поэтому при $x \overline{\in} K$ выполняются следующие строгие неравенства:

$$0 < \lambda_1^+|\,\lambda_1^+(x)\,|\,(x) < \varkappa_1 < \lambda_2^+|\,\lambda_2^+(x)\,|\,(x) < \varkappa_2 < \ldots < \varkappa_{n-1} < |\,\lambda_n^+(x)\,| < \varkappa_n.$$

Так как множество K конечно, то, совершая предельный переход, приходим к неравенствам (7) уже при всех вещественных x.

Перейдем теперь к оценкам модулей безотражательных потенциалов и их производных.

Лемма 3. *Для безотражательных потенциалов справедливы следующие равенства:*

$$\int_x^\infty \sigma_p(t)\,dt = -\frac{2^p}{p}\sum_{k=1}^n [(\varkappa_k)^p - (-\lambda_k^+(x))^p], \tag{8}$$

где $\varkappa_k$ — корни функции $a(i\varkappa)\,(0<\varkappa<\infty)$, а $\lambda_k^+(x)$ — корни функции $e^+(i\varkappa, x)\,e^-(-i\varkappa, x)\,(0<\varkappa<\infty)$.

Доказательство. Согласно формуле (6),

$$e^+(\lambda, x) = e^{i\lambda x}\prod_{k=1}^n \frac{\lambda - i\lambda_k^+(x)}{\lambda + i\varkappa_k} = e^{i\lambda x}\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\lambda_k^+(x)}{i\lambda}\right)\left(1 - \frac{\varkappa_k}{i\lambda}\right)^{-1},$$

откуда вытекает следующее разложение: $\ln e^+(\lambda, x)$ в окрестности бесконечно удаленной точки в ряд Лорана:

$$\ln e^+(\lambda, x) = i\lambda x + \sum_{p=1}^\infty \frac{1}{p\,(i\lambda)^p}\left[\sum_{k=1}^n \left[(-1)^{p-1}(\lambda_k^+(x))^p + (\varkappa_k^p)\right]\right].$$

С другой стороны, из формулы (1) следует, что

$$\ln e^+(\lambda, x) = i\lambda x - \int_x^\infty \sigma^+(\lambda, t)\,dt = i\lambda x - \sum_{p=1}^\infty \frac{2^{-p}}{(i\lambda)^p}\int_x^\infty \sigma_p(t)\,dt.$$

Сравнивая два последние равенства, находим, что

$$\int_x^\infty \sigma_p(t)\,dt = -\frac{2^p}{p}\sum_{k=1}^n [(\varkappa_k)^p - (-\lambda_k^+(x))^p].$$

Следствие. *Для четных $p = 2m$ справедливы неравенства*

$$0 \geqslant \int_x^\infty \sigma_{2m}(t)\,dt \geqslant -|\mu_n|^m \frac{2^{2m}}{2m}, \tag{9}$$

где μ_n — наименьшее собственное значение оператора H.

Действительно, согласно лемме 2,

$$\varkappa_{k-1} \leqslant |\lambda_k^+(x)| \leqslant \varkappa_k\,(k = 1, 2, \ldots, n;\ \varkappa_0 = 0),$$

откуда следует, что при четных $p = 2m$ справедливы неравенства

$$\varkappa_{k-1}^{2m} \leqslant [-\lambda_k^+(x)]^{2m} \leqslant \varkappa_k^{2m}\,(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Складывая эти неравенства, получим

$$-(\varkappa_n)^{2m}+\sum_{k=1}^{n}\varkappa_k^{2m}\leqslant\sum_{k=1}^{n}[-\lambda_k^+(x)]^{2m}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\varkappa_k^{2m},$$

так что

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}\varkappa_k^{2m}-[-\lambda_k^+(x)]^{2m}\leqslant\varkappa_n^{2m}=|\mu_n|^m.$$

Представление (8) леммы 3 и это неравенство приводят к оценке (9).

Из определения (4) $\sigma_p(t)$ следует, что

$$\int_x^\infty\sigma_2(t)\,dt=q(x),\quad\int_x^\infty\sigma_4(t)\,dt=q''(x)-2q(x)^2.$$

Подставляя эти выражения в неравенства (9), находим, что

$$0\geqslant q(x)\geqslant-2|\mu_n|,\quad 0\geqslant q''(x)-2q(x)^2\geqslant-4|\mu_n|^2$$

и, так как согласно первому неравенству $q(x)^2\leqslant4|\mu_n|^2$, то $8|\mu_n|^2\geqslant q''(x)\geqslant-4|\mu_n|^2$ и $|q''(x)|\leqslant8|\mu_n|^2$.

Таким образом, функция $\varphi(x)=q(x)+|\mu_n|$ удовлетворяет неравенствам $|\varphi(x)|\leqslant|\mu_n|$, $|\varphi''(x)|=|q''(x)|\leqslant8|\mu_n|^2$, откуда в силу неравенства Ландау-Адамара следует, что

$$|\varphi'(x)|=|q'(x)|\leqslant2\sqrt{8|\mu_n|^3}=4\sqrt{2}|\mu_n|^{3/2}.$$

Итак, доказано, что все безотражательные потенциалы удовлетворяют неравенствам $|q(x)|\leqslant2|\mu_n|$, $|q'(x)|\leqslant4\sqrt{2}|\mu_n|^{3/2}$, $|q''(x)|\leqslant\leqslant8|\mu_n|^2$.

Покажем, что справедлива

Теорема. *Безотражательные потенциалы удовлетворяют неравенствам*

$$0\geqslant q(x)\geqslant-2|\mu|,\quad|q^{(k)}(x)|\leqslant C_k|\mu|^{1+\frac{k}{2}},\tag{10}$$

где μ — нижняя граница спектра соответствующего оператора Шредингера H; C_k — абсолютные константы ($C_1=4\sqrt{2}$, $C_2=8,\ldots$)

Доказательство. Функции $\sigma(\lambda,t)$, $\sigma(-\lambda,t)$ удовлетворяют уравнениям (2):

$$\sigma'(\lambda,t)+2i\lambda\sigma(\lambda,t)+\sigma^2(\lambda,t)-q(t)=0;$$
$$\sigma'(-\lambda,t)-2i\lambda\sigma(-\lambda,t)+\sigma^2(-\lambda,t)-q(t)=0,$$

следовательно,

$$[\sigma(\lambda,t)-\sigma(-\lambda,t)]'+2i\lambda[\sigma(\lambda,t)+\sigma(-\lambda,t)]+$$
$$+[\sigma(\lambda,t)+\sigma(-\lambda,t)][\sigma(\lambda,t)-\sigma(-\lambda,t)]=0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\sigma(\lambda, t) + \sigma(-\lambda, t) = -\frac{d}{dt}\ln(2i\lambda + \sigma(\lambda, t) - \sigma(-\lambda, t)) =$$
$$= -\frac{d}{dt}\ln\left(1 + \frac{\sigma(\lambda, t) - \sigma(-\lambda, t)}{2i\lambda}\right).$$

Воспользуемся асимптотическим разложением (3) и рекуррентными формулами (4):

$$2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2p}(t)}{(2i\lambda)^{2p}} = -\frac{d}{dt}\ln\left[1 + 2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2p-1}(t)}{(2i\lambda)^{2p}}\right].$$

Сравнивая коэффициенты при $(2i\lambda)^{-2p}$, получим

$$\sigma_{2p}(t) = \frac{d}{dt}[-q^{(2p-2)}(t) + Q(q^{(2p-4)}(t),\ q^{(2p-5)}(t),\ \ldots)],$$

где $Q(q^{(2p-4)}(t), \ldots)$ — однородный полином порядка $2p$, если множителю $[q^{(k)}(x)]^m$ приписать степень $(2+k)m$.

Предположим, что неравенства $|q^{(k)}(x)| \leqslant C_k|\mu|^{1+\frac{k}{2}}$ уже доказаны для $k = 0, 1, \ldots, 2p-4$. Тогда в силу однородности полинома $Q(q^{(2p-4)}(t), \ldots)$ выполняется неравенство $|Q(q^{(2p-4)}(t), \ldots)| \leqslant Q_p|\mu|^p$. Используя оценку (9), получим также

$$0 \geqslant q^{(2p-2)}(x) + Q(q^{(2p-4)}(x), \ldots) \geqslant -\frac{2^{2p}}{2p}|\mu|^p,$$

а значит,

$$|q^{(2p-2)}(x)| \leqslant C_{2p-2}|\mu|^p$$

и неравенство (10) верно и для $k = 2p-2$. В силу неравенства Ландау-Адамара оно верно и при $k = 2p-3$. Отсюда по индукции следует, что при всех $k = 1, 2, \ldots$ верно неравенство (10).

Следствие. *Безотражательные потенциалы удовлетворяют неравенству $0 \geqslant q(x) \geqslant 2\mu$, и их множество компактно относительно равномерной сходимости на каждом конечном интервале, как и множество их производных всех порядков, если спектры соответствующих операторов Шредингера ограничены снизу числом μ.*

Список литературы: 1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. — К.: Наук. думка, 1977.—358 с. 2. *Bargmann V.* On the 'connection between phase shifts and scattering potential. — Rev. Mod. Phys., v. 21, 488—493, 1949, p. 30—45.

Поступила в редколлегию 05.01.84.