УДК 517.98

Ф. ЛЕФФЛЕР

МАКСИМАЛЬНЫЕ Ор*-АЛГЕБРЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ТОЛЬКО ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть D — плотная область в гильбертовом пространстве, $L_+(D)$ — алгебра всех операторов, каждый из которых вместе со своим сопряженным оставляет D инвариантной. $L_+(D)$ является примером так называемых Ор*-алгебр (определение будет приведено ниже). Ор*-алгебры стали рассматриваться в связи с математическими вопросами квантовой теории поля.

При изучении алгебр $L_+(D)$ возникает вопрос: существуют ли области D, для которых $L_+(D)$ состоит только из ограниченных операторов? В настоящей работе построен континуум различных таких областей (см. теоремы 1, 2).

Статья состоит из двух пунктов. В первом даются необходимые определения, а во втором формулируются и доказываются основные теоремы.

1. Пусть D — плотное линейное множество гильбертова пространства H. Обозначим через $L_+(D)$ множество всех линейных

(ограниченных и неограниченных) операторов A с областью определения $D(A)=D$, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) $AD\subset D$; 2) $D(A^*)\supset D$, $A^*D\subset D$. $L_+(D)$, снабженная инволюцией $A\to A^+=A^*|_D$, является $*$-алгеброй. Произвольную $*$-подалгебру в $L_+(D)$, которая содержит единичный оператор, принято называть Op^*-алгеброй. Заметим, что каждый оператор $A\in L_+(D)$ — замыкаемый в H оператор. Кроме того, в работе [1] было показано, что в $L_+(D)$, $D\neq H$, не существует замкнутых операторов.

Напомним, что подмножество топологического векторного пространства E называется нигде не плотным, если его замыкание не имеет внутренних точек. Множество $B\subset E$ называют множеством первой категории в E, если оно представимо в виде счетного объединения нигде неплотных множеств; в противном случае его называют множеством второй категории.

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема о замкнутом графике [2, с. 226]: Пусть E и F — пространства Фреше. Если G — векторное подпространство пространства F, являющееся множеством второй категории в F, Ψ: $G\to E$ и график Ψ замкнут в $F\times E$, *то* $G=F$ *и* Ψ *непрерывно.*

С помощью этой теоремы получаем, что в случае, если D является множеством второй категории в H, $L_+(D)$ состоит только из ограниченных операторов. В частности, если $D=H$, то $L_+(D)=L_+(H)=B(H)$, где $B(H)$ — множество всех линейных непрерывных операторов.

2. Рассмотрим в качестве гильбертова пространства $H=L^2(0,1)$ с обычным скалярным произведением. Хорошо известно, что в случае ограниченного отрезка $L^\infty(0,1)\subset L^p(0,1)\subset L^2(0,1)$, $2<p<\infty$. Кроме того, $L^p(0,1)$, $2\leqslant p\leqslant\infty$, плотно по гильбертовой норме в $L^2(0,1)$. Поэтому имеет смысл рассматривать алгебру $L_+(L^p(0,1))$. Прежде всего покажем, что $D^p\subset L^2$ не является множеством второй категории. Действительно, множества $S_n=\left\{f(x):\int_0^1|f(x)|^p\,dx\leqslant n\right\}$ замкнуты, имеют пустую внутренность и $L^p(0,1)=\bigcup_{n\geqslant 0}S_n$. Наша задача — показать, что в $L_+(L^p(0,1))$ нет неограниченных операторов. Для этого будет использована следующая теорема Ласснера [1, с. 281].

Теорема. *Пусть на D существует норма $\|\cdot\|_1$, которая сильнее гильбертовой нормы $\|\cdot\|$. Тогда, если оператор $A=A^+\in L_+(D)$ непрерывен относительно нормы $\|\cdot\|_1$, т. е. $\|A\varphi\|_1\leqslant K\cdot\|\varphi\|_1$, $\varphi\in D$, то A является ограниченным оператором относительно гильбертовой нормы.*

Для доказательства нашего результата достаточно показать, что любой оператор $A=A^+\in L_+(L^p(0,1))$ является ограниченным оператором в банаховом пространстве $L^p(0,1)$. Проверим замкнутость графика оператора $A=A^+\in L_+(L^p(0,1))$. Пусть $x_n\xrightarrow{L^p}x$ и $Ax_n\xrightarrow{L^p}$

$\xrightarrow{L^p} y$ (1). Очевидно, что тогда x лежит в $L^p(0, 1)$. Осталось показать, что $Ax = y$. Но так как L^p-норма сильнее, чем L^2-норма, то из (1) следует $x_n \xrightarrow{L^2} x$ и $Ax_n \xrightarrow{L^2} y$ (2). С другой стороны, $A \in L_+(L^p(0, 1))$, т. е. A является замыкаемым оператором в $L^2(0, 1)$. Но тогда из уравнения (2) следует, что $\bar{A}x = y$. Получаем, что $Ax = \bar{A}x = y$. Это и означает, что оператор A замкнут как оператор в банаховом пространстве $L^p(0, 1)$. Тогда по теореме о замкнутом графике он непрерывен и применима теорема Ласснера. Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 1. $L_+(L^p(0, 1))$, $p > 2$, *состоит только из ограниченных операторов, а* $L^p(0, 1)$ *не является множеством второй категории в* $L^2(0, 1)$.

Теорема 2. $L_+(L^p(0, 1))$ *и* $L_+(L^q(0, 1))$ *при* $p, q \geqslant 2$, $p \neq q$, *неизоморфны.*

Доказательство. Допустим, что существует $*$-изоморфизм τ из $L_+(L^p(0, 1))$ на $L_+(L^q(0, 1))$, $p, q \geqslant 2$, $p \neq q$. А. Ульман показал, что тогда существует унитарное отображение W такое, что: 1) $W(L^p(0, 1)) = L^q(0, 1)$; 2) $\tau(A) = WAW^{-1}$ для всех $A \in L_+(L^p(0, 1))$ [3, 4]. С помощью теоремы о замкнутом графике можно показать, что W тогда является топологическим изоморфизмом банаховых пространств $L^p(0, 1)$ и $L^q(0, 1)$, что при $p \neq q$ невозможно.

Таким образом построен континуум плотных в H областей D таких, что $L_+(D)$ попарно неизоморфны и все $L_+(D)$ состоят только из ограниченных операторов.

Заметим, что теорема 1 допускает следующее обобщение.

Теорема 3. *Пусть на* $D \subset H$, $D \neq H$, *существует норма* $\|\cdot\|_1$, *относительно которой* D *является банаховым пространством. Тогда* $L_+(D)$ *содержит только ограниченные в* H *операторы.*

Список литературы: 1. *Lassner G.* Topological algebras of operators.— Rep. on math. physics, 1972, 3, p. 279—293. 2. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967.—257 с. 3. *Uhlmann A.* Properties of the algebras $L_+(D)$. — Prepr., Dubna, 1974, E2-8149. — 119 p. 4. *Рид. М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2.—М.: Мир, 1978.—395 с.

Поступила в редколлегию 24.06.83.