УДК 519.9+575.1

А. А. КРАПИВИН, Ю. И. ЛЮБИЧ

ОБЩИЙ ВИД ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ БЕРНШТЕЙНОВСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Квадратичное отображение $V: x_j' = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik,j} x_i x_k \, (j = 1, \ldots, n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$ в себя называется *бернштейновским* (или *стационарным*) оператором, если выполнены тождества $s(Vx) = s^2(x)$, $V^2 x = s^2(x) Vx$ (1), где

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Изучение таких отображений стимулируется их ролью в основаниях популяционной генетики (см. [1], гл. 4,5).

В силу (1) «единичная» гиперплоскость $H = \{x \mid s(x) = 1\}$ инвариантна для V и $V^2 = V$ на H. Следовательно, все точки множества $F_V = \operatorname{Im}(V|_H)$ неподвижны для V. Обратно, если $Vx = x$ и $x \neq 0$, то в силу (1) $s(x) = 1$, т. е. $x \in H$, а тогда $x \in F_V$. Итак, F_V совпадает с множеством неподвижных точек оператора V, отличных от нуля. Заметим, что множество F_V связно (как образ связного множества H при непрерывном отображении V).

Пусть $x \in F_V$. Тогда линейный оператор $L_x = V'_x$ (производная оператора V в точке x) удовлетворяет уравнению $L_x^2 = L_x$, т. е. является проектором. Вместе с тем L_x — непрерывная функция от x. Следовательно, целые числа $m = \operatorname{rg} L_x$ и $\delta = \operatorname{def} L_x$ не зависят от x. Пара (m, δ) называется *типом* оператора V. Напомним теперь, что для любого гладкого отображения Φ: $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ максимум по x ранга производной Φ'_x называется *функциональным рангом* и обозначается $\operatorname{rg}_f \Phi$. Вместе с тем можно ввести *линейный ранг* $\operatorname{rg}_l \Phi$ как размерность линейной оболочки множества $\operatorname{Im} \Phi$. Очевидно, $\operatorname{rg}_f \Phi \leqslant \operatorname{rg}_l \Phi$.

Лемма. [1, с. 77]. *Если V — бернштейновский оператор, то* $\operatorname{rg}_f V = m$.

Бернштейновский оператор V называется *исключительным* (или *квазилинейным*), если $\operatorname{rg}_l V = m$. Двойственным образом это означает, что $\dim N_V = \delta$, где N_V — пространство исчезающих линейных форм, т. е. линейных форм, аннулирующих $\operatorname{Im} V$ (в общем случае $\dim N_V \leqslant \delta$).

В работе [2] (см. также [1, § 5.5]) были явно описаны исключительные бернштейновские операторы с неотрицательными коэффициентами. В настоящей статье это будет сделано без ограничения знаков коэффициентов.

По определению исключительного оператора максимальное число линейно независимых квадратичных форм среди $x'_1, \ldots, x'_n$ равно $\operatorname{rg}_l V = m$. Они функционально независимы*), ибо $\operatorname{rg}_l V = m$. Через них отображение V выражается следующим образом:

$$x'_i = f_i(x) \, (i = 1, \ldots, m), \quad x'_{m+j} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk} f_k(x)$$
$$(j = 1, \ldots, \delta) \tag{2}$$

где (α_{jk}) — постоянная матрица.

Из первого тождества (1) следует

$$\sum_{k=1}^{m} (1 + a_k) f_k = s^2, \tag{3}$$

$$\text{где } a_k = \sum_{j=1}^{\delta} \alpha_{jk}.$$

Из второго тождества (1) следует

$$f_i \left((f_1, \ldots, f_m, \sum_{k=1}^{m} \alpha_{1k} f_k, \ldots, \sum_{k=1}^{m} \alpha_{\delta k} f_k \right) =$$
$$= f_i s^2 = f_i \sum_{k=1}^{m} (1 + a_k) f_k \, (i = 1, \ldots, m).$$

*) Если две квадратичные формы линейно независимы, то они функционально независимы, но уже для трех форм это неверно, как показывает пример «пифагоровой тройки», $x_1^2 - x_2^2$, $2x_1x_2$, $x_1^2 + x_2^2$.

Так как $f_1, \ldots, f_m$ функционально независимы, то в действительности выполняются тождества

$$f_i\left(x_1, \ldots, x_m, \sum_{k=1}^{m} \alpha_{1k} x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{m} \alpha_{\delta k} x_k\right) = x_i \sigma$$

$$(i = 1, \ldots, m), \text{ где}$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^{m} (1 + a_k)\, x_k. \tag{4}$$

Положим*)

$$v_j = x_{m+j} - \sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk} x_k \, (j = 1, \ldots, \delta).$$

Тогда $f_i(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1} - v_1, \ldots, x_n - v_\delta) = x_i \sigma \, (i = 1, \ldots, m)$, откуда по формуле Тейлора

$$f_i(x) = x_i \sigma(x) + \sum_{j=1}^{\delta} v_j(x)\, \omega_{ij}(x) \, (i = 1, \ldots, m), \tag{5}$$

где $\omega_{ij}(x)$ — некоторые линейные формы. Введем линейные формы

$$w_j = \sum_{k=1}^{m} (1 + a_k)\, \omega_{kj} \, (j = 1, \ldots, \delta).$$

Из (3) — (5) следует

$$s^2 = \sigma^2 + \sum_{j=1}^{\delta} v_j w_j.$$

Но, с другой стороны,

$$s^2 - \sigma^2 = (s + \sigma)\left(\sum_{j=1}^{\delta} x_{m+j} - \sum_{k=1}^{m} a_k x_k\right) = (s + \sigma) \sum_{j=1}^{\delta} v_j.$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{\delta} v_j (w_j - s - \sigma) = 0.$$

Так как $v_1, \ldots, v_\delta$ линейно независимы, то

$$w_j - s - \sigma = \sum_{k=1}^{\delta} \beta_{jk} v_k \, (j = 1, \ldots, \delta),$$

где $(\beta_{ik})_{i,\,k=1}^{\delta}$ — антисимметричная постоянная матрица.

Итак, доказана

Теорема. *Каждый исключительный бернштейновский оператор имеет вид*

$$x_k' = f_i(x) \, (i = 1, \ldots, m), \quad x_{m+j}' = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk} f_k(x) \, (j = 1, \ldots, \delta),$$

*) Легко видеть, что $v_1, \ldots, v_\delta$ — базис подпространства N_V.

где $m \geqslant 1$, $\delta = n - m$, (α_{jk}) — *постоянная* $(\delta \times m)$*-матрица,*

$$f_i(x) = x_i\sigma(x) + \sum_{j=1}^{\delta} v_j(x)\,\omega_{ij}(x)\,(i = 1, \ldots, m).$$

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{m} (1 + a_k)\,x_k,\ \ a_k = \sum_{j=1}^{\delta} \alpha_{jk}\,(k = 1, \ldots, m),$$

$$v_j(x) = x_{m+j} - \sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk}x_k\,(j = 1, \ldots, \delta)$$

и, наконец, $\omega_{ij}(x)$ — *линейные формы, удовлетворяющие соотношениям*

$$\sum_{k=1}^{m} (1 + a_k)\,\omega_{kj}(x) = s(x) + \sigma(x) + \sum_{k=1}^{\delta} \beta_{jk}v_k(x)\,(j = 1, \ldots, \delta),$$

где $(\beta_{jk})_{j,\,k=1}^{\delta}$ — *антисимметричная постоянная матрица.*

Непосредственно проверяется обратное, т. е. каждое отображение указанного вида является исключительным бернштейновским оператором. Таким образом, получен общий вид для этого класса операторов.

Список литературы: 1. *Любич Ю. И.* Математические структуры в популяционной генетике.— К.: Наук. думка, 1983.— 296 с. 2. *Любич Ю. И.* Квазилинейные бернштейновские популяции.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1976 вып. 26, с. 79—84.

Поступила в редколлегию 25.11.83.