УДК 517. 535. 4

А. Э. ЕРЕМЕНКО

О ВАЛИРОНОВСКИХ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА

Используем стандартные обозначения теории мероморфных функций [1]. Число $a \in \boldsymbol{C}$ называется исключительным значением в смысле Ж. Валирона мероморфной функции f, если

$$\Delta(a, f) = \limsup_{r \to \infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)} > 0.$$

Множество таких a обозначаем через $E_V(f)$. А. Хилленгрен [2] дал следующее описание множества $E_V(f)$ для мероморфных функций конечного порядка. Назовем множество $E \subset \boldsymbol{C}$ H-множеством, если существует последовательность $(a_k) \subset \boldsymbol{C}$ и число $\eta > 1$ такие, что любая точка $a \in E$ содержится в бесконечном множестве кругов $|z - a_k| < \exp(-\delta_k)$ **(1)**, причем $\delta_{k+1}/\delta_k = \eta$. Результат А. Хилленгрена состоит в том, что для любой мероморфной функции f конечного порядка множество $\{a \in \boldsymbol{C} : \Delta(a, f) > x\}$ есть H-множество при любом x, $0 < x < 1$. С другой стороны, для любого H-множества E найдется целая функция f конечного порядка и число $x > 0$, такие, что $\Delta(a, f) > x$ при $a \in E$.

Структура множества $E_V(f)$ для важного подкласса целых функций — функций вполне регулярного роста в смысле Б. Я. Левина — А. Пфлюгера (в. р. р.) изучалась в работах [3, 4]. В этих работах доказано, что если f — целая функция в. р. р., то $E_V(f)$ содержит множество тех $a \in \boldsymbol{C}$, для которых $f - a$ не есть функция в. р. р., и может отличаться от него не более чем на конечное число точек

В [3, 4] построены примеры целых функций в. р. р., для которых $E_V(f)$ имеет мощность континуума.

Настоящая работа посвящена дальнейшему исследованию множества $E_V(f)$ для целых функций f в. р. р. Рассмотрим также более широкий класс функций Reg^+. Этот класс состоит из целых функций, имеющих в. р. р. на тех лучах, где индикатор неотрицателен. Заметим, что в определении функции в. р. р. и функции класса Reg^+ участвует уточненный порядок $\rho(r)$. Всюду далее будем считать, что $\rho(r) \equiv \rho = \mathrm{const}$. Рассмотрение общего случая не вызывает дополнителных трудностей. Функции класса Reg^+ порядка $\leqslant 1/2$ не могут иметь валироновских исключительных значений. Поэтому ограничимся далее функциями порядка $> 1/2$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in \mathrm{Reg}^+$. *Если* $a \notin E_V(f)$, *то функция* $f - a$ *в. р. р.*

Эта теорема представляет собой вариант теоремы 1 из [4], однако приведем для полноты ее доказательство.

Доказательство. Следуя В. С. Азарину [5], рассмотрим семейство субгармонических функций $u_t(z) = t^{-\rho} \log|f(tz) - a|$, где $a \notin E_V(f)$. Рассмотрим предельное множество $\mathrm{Fr}[f-a]$ этого семейства при $t \to \infty$. Предел понимается в смысле обобщенных функций. Поскольку $f \in \mathrm{Reg}^+$, для любой функции $v \in \mathrm{Fr}[f-a]$ справедливо $v^+(re^{i\theta}) = r^\rho h^+(\theta)$, где ρ — порядок; h — индикатор функции f. Поскольку $a \notin E_V(f)$, справедливо $m(r, 0, f-a) = o(r^\rho)$, $r \to \infty$, следовательно, $v \geqslant 0$ для всех $v \in \mathrm{Fr}[f-a]$. Таким образом, $\mathrm{Fr}[f-a]$ состоит из одной функции $r^\rho h^+(\theta)$, т. е. $f - a$ в. р. р. (см. [5]), что и требовалось.

Назовем множество $E \subset \boldsymbol{C}$ H_0-множеством, если найдется последовательность кругов (1) такая, что каждая точка $a \in E$ принадлежит бесконечному множеству кругов, причем $\delta_{k+1}/\delta_k \to \infty$, $k \to \infty$. Легко видеть, что конечное объединение H_0-множеств снова является H_0-множеством. Такие множества использовались в работе Д. Дрейсина [6], методы которой позволяют получить следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathrm{Reg}^+$. *Тогда* $E_V(f)$ *есть* H_0-*множество.*

Теорема 3. *Пусть* E — *некоторое* H_0-*множество. Тогда существует целая функция* $f \in \mathrm{Reg}^+$ *и число* $x > 0$ *такие, что* $\Delta(a, f) > x$ *для всех* $a \in E$.

Доказательство теоремы 2. Пусть I — замкнутая дуга на единичной окружности такая, что $h(\theta) \leqslant 0$, $\theta \in I$, h — индикатор функции f. Положим

$$m(r, a, I) = \int_I \log^+ |f(re^{i\theta}) - a|^{-1} d\theta.$$

Теорема 2 вытекает из такого утверждения: множество

$$E(I) = \{a \in \boldsymbol{C} : \limsup_{r \to \infty} r^{-\rho} m(r, a, I) > 0\} \qquad (2)$$

есть H_0-множество. Докажем это утверждение. Согласно известной теореме об индикаторе найдется функция $\varphi(r) \downarrow 0$, $r \to \infty$ такая, что $\log|f(re^{i\theta})| \leqslant \varphi(r) r^\rho$, $\theta \in I$ **(3)**. Будем считать, что φ убывает настолько медленно, что правая часть (3) монотонно растет к ∞ и, кроме того, $\varphi(r) > (\log r)^{-1}$ **(4)**. Положим $D(r, R) = \{z : r < |z| < rR, \arg z \in I\}$; $I(r) = \{z : |z| = r, \arg z \in I\}$; $K(r, R) = \{z : 2r < |z| < rR/2, \arg z = \theta_0\}$, где $0 < r < \infty$, $R \geqslant 5$, θ_0 — середина дуги I. Пусть $P(x, z)$ — ядро Пуассона области $D(r, R)$ ($x \in \partial D$, $z \in D$). Обозначим

$$\tau(R) = \inf\{P(x, z) : x \in I(r), z \in K(r, R)\}.$$

Эта величина не зависит от r по соображениям подобия. Из неравенства Гарнака следует, что $\tau(R) > 0$, $5 \leqslant R < \infty$.

Лемма. *Существует функция* $R(r) \geqslant 5$, $R(r) \uparrow \infty$ *такая, что*

$$\tau(R(r)) - 2^{\rho+1}(R(r))^\rho \sqrt{\varphi(2rR(r))} > (\log r)^{-1}; \tag{5}$$

$$R(r) \leqslant \log r + 5, \quad r \geqslant r_0. \tag{6}$$

Доказательство. Положим $r_0 = \min\{r \geqslant 1 : g(5, r) \geqslant (\log r)^{-1}\}$, где $g(R, r) = \tau(R) - 2^{\rho+1}R^\rho \sqrt{\varphi(2rR)}$. Пусть уже выбрано r_n, $n \geqslant 0$. В качестве r_{n+1} берем число $\min\{r \geqslant r_n + e^n : g(n+6, r) \geqslant (\log r)^{-1}\}$. Такой выбор возможен потому, что $\varphi(r) \to 0$, $r \to \infty$. Полагая $R(r) = n + 5$ при $r_n \leqslant r < r_{n+1}$, получаем нужную функцию

Для каждого $a \in E(I)$ рассмотрим множество

$$\Gamma(a) = \{r : r^{-\rho} m(r, a, I) \geqslant \sqrt{\varphi(2rR(r))}\}. \tag{7}$$

Это множество неограниченно в силу (2). Выберем число $r_0(a) \geqslant r_0$ (r_0 из леммы) так, чтобы выполнялось

$$\max(\log 2, \log|a|) \leqslant \varphi(r) r^\rho, \quad r \geqslant r_0(a). \tag{8}$$

Это возможно в силу допущения о том, что $\varphi(r) r^\rho \to \infty$. Пусть $r \in \Gamma(a) \cap [r_0(a), \infty) = \Gamma_0(a)$. Оценим субгармоническую функцию $\log|f(z) - a|$ на $K(r, R(r))$, пользуясь (3), (8), (7), (5), (4):

$$\begin{gathered}\log|f(z) - a| \leqslant \max_{z \in \partial D(r, R(r))} \log|f(z) - a| - \\ - \int_{I(r)} P(x, z) \log^+ \frac{1}{|f(x) - a|} dx \leqslant 2\varphi(2rR(r))(2rR(r))^\rho - \\ - \tau(R(r)) m(r, a, I) \leqslant \{2^{\rho+1}\varphi(2rR(r))(R(r))^\rho - \\ - \tau(R(r)) \sqrt{\varphi(2rR(r))}\} r^\rho \leqslant -\sqrt{\varphi(2rR(r))} (\log r)^{-1} r^\rho \leqslant \\ \leqslant -(\log r)^{-2} r^\rho.\end{gathered} \tag{9}$$

Пусть $r_1 \in \Gamma_0(a)$, $r_2 \in \Gamma_0(b)$, $K(r_1, R(r_1)) \cap K(r_2, R(r_2)) \neq \varnothing$, $z_0 \in K(r_1, R(r_1)) \cap K(r_2, R(r_2))$. Учитывая (9), получим $|b - a| \leqslant |f(z_0) - b| + |f(z_0) - a| \leqslant \exp(-r_1^{1/2})$ **(10)**.

Рассмотрим теперь последовательность (t_m), $t_1 = r_0$, $t_{m+1} = (1/4) t_m R(t_m)$. Положим $J_m = [t_m, t_{m+1}]$. Если для некоторого

$a\in E(I)$ выполняется $J_m \cap \Gamma_0(a) \neq \varnothing$, выберем одно из таких a и обозначим его через a_m. Если таких a нет, положим $a_m = 0$. Пусть теперь $b\in E(I)$. Множество $\Gamma_0(b)$ пересекается с бесконечным числом отрезков J_m. В каждом из этих отрезков есть точка $r_m \in \Gamma_0(a_m)$ и точка $r^* \in \Gamma_0(b)$. Легко видеть, что $K(r_m, R(r_m)) \cap K(r^*, R(r^*)) \neq \varnothing$, поэтому в силу (10) имеем $|b - a_m| \leqslant \leqslant \exp(-t_m^{1/2}) = \exp(-\sigma_m)$ **(11)**. где $\sigma_{m+1}/\sigma_m \to \infty$. Теорема доказана.

Теорема 3 будет выведена из одного результата Д. Дрейсина [6]. Пусть f — целая функция порядка $\rho < \infty$ нормального типа. Предположим, что индикатор функции f неположителен на отрезке I и число θ_0 лежит внутри I. Обозначим через $n(r, a, \varepsilon)$ число a-точек функции f в секторе $\{z:|z| \leqslant r, \theta_0 - \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \leqslant \theta_0 + \varepsilon\}$. Скажем, что значение $a \in C$ максимально принимается в окрестности θ_0, если существует $\eta > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\limsup_{r\to\infty} r^{-\rho} n(r, a, \varepsilon) \geqslant \eta. \tag{12}$$

Д. Дрейсин показал в работе [6], что множество значений, максимально принимаемых в окрестности луча, есть H_0-множество. Далее, для любого H_0-множества E построена целая функция g порядка ρ, $1/2 < \rho < 1$ такая, что $\log M(r, g) \sim r^\rho$, $r \to \infty$ **(13)** и индикатор этой функции g $h(\theta) \leqslant 0$ при $|\theta - \pi| \leqslant \pi\left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)$ **(14)**, все значения из E максимально принимаются функцией g в окрестности $\theta_0 = \pi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Пусть g — функция, описанная выше. Покажем сначала, что $\Delta(a, g) > x$ для всех $a \in E$ и некоторого $x > 0$. Рассмотрим семейство субгармонических функций $u_t(z) = t^{-\rho} \log|g(tz) - a|$, где $a \in E$ фиксировано. Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и найдем с помощью (12) последовательность $t_k \to \infty$ такую, что

$$t_k^{-\rho} n(t_k, a, \varepsilon) > \eta/2 > 0. \tag{15}$$

Семейство $\{u_t\}$ предкомпактно [5], поэтому, выбирая, если нужно, подпоследовательность, будем считать, что $u_{t_k} \to u$ при $k \to \infty$. В силу (14) выполняется

$$u(re^{i\theta}) \leqslant 0, \quad |\theta - \pi| \leqslant \pi\left(1 - \frac{1}{2\rho}\right).$$

Положим $\alpha = e^{-1}(\eta/4)^{1/\rho}$. Имеем $n(\alpha t_k, a, \varepsilon) \leqslant N(e\alpha t_k, a, \varepsilon) \leqslant \leqslant N(e\alpha t_k, a) \leqslant T(e\alpha t_k, g) \leqslant \log M(e\alpha t_k, g) \leqslant (\eta/4)\, t_k^\rho$ **(16)**. Далее, известно, что риссовская мера функции u_{t_k} слабо сходится к риссовской мере μ функции u. Следовательно, в силу (15), (16) $\mu(K) > > \eta/4$, где через K обозначен сектор $\{z: \alpha \leqslant |z| \leqslant 1, |\arg z - \pi| \leqslant$

$\leqslant \varepsilon\}$. Следовательно, $u(z) \leqslant -x < 0$ в K, где x зависит только от η и ρ. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{r \to \infty} r^{-\rho} \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} \log^+ |g(re^{i\theta}) - a|^{-1} d\theta > 0. \tag{17}$$

Пусть h — индикатор g. Возьмем функцию g_1 в. р. р. порядка ρ нормального типа с индикатором $h_1(\theta) = c \cos \rho\theta$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, где c настолько велико, что $h(\theta) < c \cos \rho\theta$, $|\theta| < \pi/2\rho$. Очевидно, что функция $f = g + g_1 \in \mathrm{Reg}^+$. Из (17) следует, что $E \subset E_V(f)$, что и требовалось.

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970. — 591 с. 2. *Hyllengren A.* Valiron deficient values for meromorphic functions in the plane.— Acta math., 1970, **124**. N 1—2, p. 1—8. 3. *Гольдберг А. А., Еременко А. Э., Островский И. В.* О сумме целых функций вполне регулярного роста. — ДАН УССР, 1982, № 2, с. 8—11. 4. *Гольдберг А. А., Еременко А. Э., Островский И. В.* О сумме целых функций вполне регулярного роста. — Изв. АН АрмССР, 1983, **18**, № 1, с. 3—14. 5. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка. — Мат. сб., 1979, **108**, № 2, с. 147—167. 6. *Drasin D.* Value distribution of entire functions in the regions of small growth. — Ark. mat., 1974, **12**, N 2, p, 139—150.

Поступила в редколлегию 04.11.83.