УДК 513.881

М. М. ДРАГИЛЕВ

ОБ АБСОЛЮТНЫХ БАЗИСАХ В СЕМЕЙСТВАХ ПРОСТРАНСТВ КЕТЕ

1. *Под пространством Кете условимся понимать* F-пространство с абсолютным базисом. Если разные пространства Кете $X_r\,(r\in\rho)$ имеют один и тот же абсолютный базис (x_n), $x_n\in X_r\,(n=1,\ 2,\ \ldots;\ r\in\rho)$, то для краткости говорят, что (x_n) есть *базис семейства* $\{X_r\}$ (также *продолжаемый* базис). Возникают два вопроса:

а) каковы все продолжаемые базисы семейства $\{X_r\}$ (проблема *единственности* базиса)?

б) каковы все пространства Кете, имеющие тот же абсолютный базис (x_n) (проблема *продолжаемости* базиса)?

Оба вопроса мало изучены. В связи с проблемой единственности вводят специальные отношения эквивалентности между продолжаемыми базисами*.

Определение 1 [1]. *Два абсолютных базиса* (x_n) *и* (y_n) *семейства пространств Кете* $\{X_r\}$ *называют*

а) *совместно предэквивалентными, если найдется последовательность положительных чисел* (λ_n), *такая, что* $(y_n)\sim(\lambda_n x_n)$ *в каждом пространстве семейства;*

б) *совместно квазиэквивалентными, если найдется перестановка индексов* $\sigma(n)$, *такая, что базисы* (y_n) *и* $(x_{\sigma(n)})$ *совместно предэквивалентны.*

В простейшем частном случае, когда $X_r=A_r$, $0<r<\infty$ (т. е. X_r — пространство функций, аналитических в круге $|z|<r$, с обычной топологией), все базисы семейства совместно квазиэквивалентны [1]. То же верно для пары вложенных пространств Кете с общим *согласованно правильным* базисом (сохраняющим, по определению, некоторые свойства степенного базиса пространств A_r).

---

* Напомним, что последовательности элементов (x_n) и (y_n) топологического векторного пространства X называют эквивалентными в X ($(x_n)\sim(y_n)$), если каждая из них является образом другой при автоморфизме пространства.

В настоящей статье дается новое доказательство этих фактов, использующее методику работ [2] и [3]. Исследуется также связь между продолжаемостью абсолютных базисов и вопросами интерполирования линейных операторов в пространстве Кете.

2. Определение 2 [4]. *Пусть X и $X^1 (X^1 \subset X)$ — счетно-нормированные пространства Кете с общим абсолютным базисом (x_n). Базис (x_n) называют согласованно правильным, если найдутся определяющие системы норм $(|\cdot|_p)$ в X и $(|\cdot|_p^1)$ в X^1, такие, чтобы выполнялись неравенства:*

$$\frac{|x_n|_p}{|x_n|_{p+1}} \geqslant \frac{|x_{n+1}|_p}{|x_{n+1}|_{p+1}}; \quad \frac{|x_n|_p^1}{|x_n|_{p+1}^1} \geqslant \frac{|x_{n+1}|_p^1}{|x_{n+1}|_{p+1}^1}; \tag{1}$$

$$1 \geqslant \frac{|x_n|_p}{|x_n|_q^1} \geqslant \frac{|x_{n+1}|_p}{|x_{n+1}|_q^1} \quad (n,\ p,\ q = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Например, степенной базис пространств A_r и $A_{r_1} (r_1 > r)$ является согласованно правильным.

Теорема 1 [4]. *Все согласованно правильные базисы пары пространств Кете X, $X^1 (X^1 \subset X)$ совместно предэквивалентны.*

Доказательство (ср. [2]). Пусть (x_n) и (y_n) — два согласованно правильных базиса пары пространств X, X^1. Как известно, найдутся определяющие системы норм $(|\cdot|_p)$ в X и $(|\cdot|_p^1)$ в X^1, удовлетворяющие неравенствам (1) и обладающие свойствами, если

$$U_p = \{x \in X : |x|_p \leqslant 1\},\ U_p^1 = \{x \in X : |x|_p^1 \leqslant 1\},$$

то

$$d_{n-1}(U_q,\ U_p) = \frac{|x_n|_p}{|x_n|_q},\ d_{n-1}(U_q^1,\ U_p^1) = \frac{|x_n|_p^1}{|x_n|_q^1} (p \leqslant q);$$

$$d_{n-1}(U_q^1,\ U_p) = \frac{|x_n|_p}{|x_n|_q^1} (n,\ p,\ q = 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $d_n(\cdot,\cdot) (n = 0,\ 1,\ \ldots)$ — относительные n-поперечники соответствующих окрестностей нуля. Еще две определяющие системы норм $(\|\cdot\|_p)$ в X и $(\|\cdot\|_p)$ в X^1 удовлетворяют аналогичным условиям:

$$\frac{\|y_n\|_p}{\|y_n\|_{p+1}} \geqslant \frac{\|y_{n+1}\|_p}{\|y_{n+1}\|_{p+1}}, \quad \frac{\|y_n\|_p^1}{\|y_n\|_{p+1}^1} \geqslant \frac{\|y_{n+1}\|_p^1}{\|y_{n+1}\|_{p+1}^1};$$

$$1 \geqslant \frac{\|y_n\|_p}{\|y_n|_q^1} \geqslant \frac{\|y_{n+1}\|_p}{\|y_{n+1}\|_q^1} (n,\ p,\ q = 1,\ 2,\ \ldots);$$

$$d_{n-1}(V_q,\ V_p) = \frac{\|y_n\|_p}{\|y_n\|_q},\ d_{n-1}(V_q^1,\ V_p^1) = \frac{\|y_n\|_p^1}{\|y_n\|_q^1} (p \leqslant q);$$

$$d_{n-1}(V_q^1,\ V_p) = \frac{\|y_n\|_p}{\|y_n\|_q^1} (n,\ p,\ q = 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $$V_p = \{x \in X : \|x\|_p \leqslant 1\}, \quad V_p^1 = \{x \in X : \|x\|_p^1 \leqslant 1\} \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

При этом можно без ограничения общности считать, что $U_1 \supset \supset V_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset V_p \supset U_{p+1} \supset V_{p+1} \supset \cdots$ (это достигается разрежением последовательностей (U_p), (V_p), $(|\cdot|_p)$, $(\|\cdot\|_p)$ и умножением оставшихся окрестностей нуля и норм на соответствующие константы), а также, что

$$U_1^1 \supset V_1^1 \supset U_2^1 \supset \cdots \supset V_p^1 \supset U_{p+1}^1 \supset V_{p+1}^1 \supset \cdots$$

Теперь из элементарных свойств n-поперечников будут вытекать неравенства

$$d_{n-1}(U_{r+1}U_p) \leqslant d_{n-1}(V_r, V_p) \ (r \geqslant p);$$
$$d_{n-1}(V_r, V_p) \leqslant d_{n-1}(U_r, U_{p+1})\,(r > p);$$
$$d_{n-1}(U_{r+1}^1, U_p^1) \leqslant d_{n-1}(V_r^1, V_p^1)\,(r \geqslant p);$$
$$d_{n-1}(V_r^1, V_p^1) \leqslant d_{n-1}(U_r^1, U_{p+1}^1)\,(r > p).$$

Отсюда находим

$$\frac{|x_n|_p}{\|y_n\|_p} \leqslant \frac{|x_n|_{r+1}}{\|y_n\|_r}, \quad \frac{|x_n|_p^1}{\|y_n\|_p^1} \leqslant \frac{|x_n|_{r+1}^1}{\|y_n\|_r^1} (n, p, r = 1, 2, \ldots).$$

Так как, кроме того, $U_p \supset V_p \supset V_r^1 \supset U_{r+1}^1$ и $V_r \supset U_{r+1} \supset U_p^1 \supset \supset V_p^1$ при всех r и p, то

$$d_{n-1}(U_{r+1}^1, U_p) \leqslant d_{n-1}(V_r^1, V_p);$$
$$d_{n-1}(V_p^1, V_r) \leqslant d_{n-1}(U_p^1, U_{r+1})\,(n, p, r = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно,

$$\frac{|x_n|_p}{\|y_n\|_p} \leqslant \frac{|x_n|_{r+1}^1}{\|y_n\|_r^1}; \quad \frac{|x_n|_p^1}{\|y_n\|_p^1} \leqslant \frac{|x_n|_{r+1}}{\|y_n\|_r} (n, p, r = 1, 2, \ldots).$$

Далее полагаем:

$$\lambda_n = \inf_r \frac{|x_n|_{r+1}}{\|y_n\|_r}, \quad \lambda_n^1 = \inf_r \frac{|x_n|_{r+1}^1}{\|y_n\|_r^1} (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда при любых p и r справедливы неравенства

$$\frac{|x_n|_p}{\|y_n\|_p} \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{|x_n|_{r+1}}{\|y_n\|_r}; \quad \frac{|x_n|_p^1}{\|y_n\|_p^1} \leqslant \lambda_n^1 \leqslant \frac{|x_n|_{r+1}^1}{|y_n|_r^1};$$
$$\frac{|x_n|_p}{\|y_n\|_p} \leqslant \lambda_n^1; \quad \frac{|x_n|_p^1}{\|y_n\|_p^1} \leqslant \lambda_n.$$

Следовательно, если $\lambda_n^0 = \min(\lambda_n, \lambda_n^1 (n = 1, 2, \ldots)$, будем иметь

$$|x_n|_p \leqslant |\lambda_n^0 y_n\|_p \leqslant |x_n|_{p+1}, \quad |x_n|_p^1 \leqslant \|\lambda_n^0 y_n\|_p^1 \leqslant |x_n|_{p+1}^1.$$

Значит, $(x_n) \sim (\lambda_n^0 y_n)$, причем эквивалентность имеет место как в X, так и в X^1.

Замечание. Из того, что базисы (x_n) и (y_n) предэквивалентны в каждом из пространств X, X^1, не вытекает их совместная предэквивалентность (см. [4, пример]).

Пусть X и Y — два F-пространства. Последовательности элементов (x_n), $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и (y_n), $y_n \in Y$ $(n = 1, 2, \ldots)$ называют *слабо* эквивалентными ($(x_n) \sim (y_n)$), если для любых непрерывных преднорм $|\cdot|$ в X и $\|\cdot\|$ в Y найдутся непрерывные нормы, соответственно $\|\cdot\|^1$ в Y и $|\cdot|^1$ в X, такие, что $|x_n| \leqslant \|y_n\|^1$ и $\|y_n\| \leqslant |x_n|^1$ при всех n. Очевидно, обычная эквивалентность влечет слабую, а для абсолютных базисов F-пространства оба понятия совпадают.

3. Определение 3. *Пусть* (X, X^1), $X \supset X^1$, — пара F-*пространств с общим абсолютным базисом. Говорят, что абсолютный базис* (x_n) *пары* (X, X^1) *слабо подчинен ее абсолютному базису* (y_n), *если найдутся числа* $\lambda_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *и функция* $k(n)$, $k(n) \to \infty$, *такие, что* $(x_n) \sim (\lambda_n y_{k(n)})$, *причем слабая эквивалентность имеет место как в* X, *так и в* X^1.

Лемма 1. *Абсолютные базисы* (x_n) *и* (y_n) *пары пространств Кете* (X, X^1), $X \supset X^1$, *слабо подчинены друг другу.*

Доказательство (ср. [3]). Пусть $(|\cdot|_p)$ и $(|\cdot|_p^1)$ — определяющие системы преднорм, соответственно в X и в X^1. Заметим, что ту же топологию в X можно задать системой преднорм

$$\sum_n |x_n'(\cdot)|\,|x_n|_p \ (p = 1, 2, \ldots),$$

либо системой преднорм

$$\sum_n |y_n'(\cdot)|\,|y_n|_p \ (p = 1, 2, \ldots),$$

где $x_n'(\cdot)$ и $y_n'(\cdot)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — коэффициентные функционалы базисов (x_n) и (y_n). Это легко позволяет так выбрать определяющую систему преднорм в X, чтобы выполнялись неравенства:

$$|x|_p = \sum_n |x_k'(x)|\,|x_k|_p \leqslant \sum_n |y_n'(x)|\,|y_n|_p \leqslant |x|_{p+1};$$

$$|x|_p \leqslant \frac{1}{2^p}|x|_{p+1} \ (x \in X, \ p = 1, 2, \ldots).$$

С помощью аналогичных рассуждений получим

$$|x|_p^1 = \sum_k |x_k'(x)|\,|x_k|_p^1 \leqslant \sum_n |y_n'(x)|\,|y_n|_p^1 \leqslant |x|_{p+1}^1;$$

$$|x|_p^1 \leqslant \frac{1}{2^p}|x|_{p+1}^1 \ (x \in X^1, \ p = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда найдем:

$$\sum_k |x'_k(x)| \sup_p \max\left(\frac{|x_k|_p}{|x|_{p+1}};\ \frac{|x_k|_p^1}{|x|_{p+1}^1}\right) \leqslant \sum_p \sum_k |x'_k(x)| \times$$

$$\times \max\left(\frac{|x_k|_p}{|x|_{p+1}};\ \frac{|x_k|_p^1}{|x|_{p+1}^1}\right) \leqslant \sum_p \max\left(\frac{|x|_p}{|x|_{p+1}};\ \frac{|x|_p^1}{|x|_{p+1}^1}\right) \leqslant \sum_1^\infty \frac{1}{2^p} = 1$$

$$(n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Следовательно,

$$\sum_k |x'_k(y_n)| \sup_p \max\left(\frac{|x_k|_p}{|x|_{p+1}};\ \frac{|x_k|_p^1}{|x|_{p+1}^1}\right) \leqslant 1. \tag{2}$$

С другой стороны, при любых k, n и q будем иметь:

$$|y'_n(x_k)| = \frac{|y'_n(x_k)|\,|y_n|_q}{|y_n|_q} \leqslant \frac{|x_k|_{q+1}}{|y_n|_q},$$

$$|y'_n(x_k)| = \frac{|y'_n(x_k)|\,|y_n|_q^1}{|y_n|_q^1} \leqslant \frac{|x_k|_{q+1}^1}{|y_n|_q^1}.$$

Отсюда следует

$$|x'_k(y_n)\,y'_n(x_k)| \leqslant |x'_k(y_n)| \inf_q \min\left(\frac{|x_k|_{q+1}}{|y_n|_q};\ \frac{|x_k|_{q+1}^1}{|y_n|_q^1}\right).$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_k x'_k(y_n)\,y'_n(x_k) = y'_n(y_n) = 1\ (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

найдем

$$\sum_k |x'_k(y_n)| \inf_q \min\left(\frac{|x_k|_{q+1}}{|y_n|_q};\ \frac{|x_k|_{q+1}^1}{|y_n|_q^1}\right) \geqslant 1. \tag{3}$$

Сравнивая (2) и (3), заключаем, что для каждого n найдется индекс $k(n)$, такой, что

$$\sup_p \max\left(\frac{|x_{k(n)}|_p}{|y_n|_{p+1}};\ \frac{|x_{k(n)}|_p^1}{|y_n|_{p+1}^1}\right) \leqslant \inf_q \min\left(\frac{|x_{k(n)}|_{q+1}^1}{|y_n|_q};\ \frac{|x_{k(n)}|_{q+1}^1}{|y_n|_q^1}\right).$$

Теперь, если λ_n^{-1} — любое число, заключенное между левой и правой частью неравенства, получим

$$\frac{|x_{k(n)}|_p}{|y_n|_{p+1}} \leqslant \lambda_n^{-1} \leqslant \frac{|x_{k(n)}|_{q+1}}{|y_n|_q};$$

$$\frac{|x_{k(n)}|_p^1}{|y_n|_{p+1}^1} \leqslant \lambda_n^{-1} \leqslant \frac{|x_{k(n)}|_{q+1}^1}{|y_n|_q^1}\ (n,\ p,\ q = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Следовательно,

$$|\lambda_n x_{k(n)}|_p \leqslant |y_n|_{p+1} \leqslant |\lambda_n x_{k(n)}|_{p+2};$$
$$|\lambda_n x_{k(n)}|_p^1 \leqslant |y_n|_{p+1}^1 \leqslant |\lambda_n x_{k(n)}|_{p+2}^1$$

при всех p и n. Это означает, что последовательности (y_n) и $(\lambda_n x_{k(n)})$ совместно слабо эквивалентны, т. е. базис (y_n) слабо подчинен базису (x_n).

Замечание. Понятие слабой подчиненности естественно распространяется на продолжаемые базисы произвольного семейства пространства Кете. Можно придать также более общую форму лемме 1: в семействе пространств Кете, упорядоченном по включению, любые два продолжаемых абсолютных базиса слабо подчинены друг другу.

Теорема 2. *Пусть (X, X^1), $X \supset X^1$, — пара пространств Кете с согласованно правильным базисом. Тогда все продолжаемые абсолютные базисы пары (X, X^1) совместно квазиэквивалентны.*

Доказательство. Как видно из леммы, всякий абсолютный базис пары (X, X^1) перестановкой элементов можно сделать согласованно правильным, а по теореме 1 любые два таких базиса совместно предэквивалентны.

4. Пусть, далее, X — пространство Кете с абсолютным базисом (x_n), $L(X)$ — класс линейных непрерывных операторов $T: X \to X$, $\Lambda(X, (x_n))$ — класс всех операторов $T \in L(X)$, представимых диагональной матрицей в базисе (x_n).

Определение 4. *Пусть (X, X^1), $X \supset X^1$, — пара пространств Кете с общим абсолютным базисом. Говорят, что пространство Кете Y обладает свойствами (L), (Λ) и (B) (по отношению к пространствам X и X^1), если соответственно выполнены следующие условия:* а) $L(Y) \supset L(X) \cap L(X^1)$; б) *найдется абсолютный базис (x_n) пары (X, X^1), продолжаемый в Y, такой, что* $\Lambda(Y, (x_n)) \supset \Lambda(X, (x_n)) \cap \Lambda(X^1(x_n))$ (4); в) *каждый абсолютный базис пары (X, X^1) продолжается в Y.*

Замечание. Из леммы 1 легко вытекает, что соотношения типа (4) могут только одновременно выполняться для всех абсолютных базисов пары (X, X^1), продолжаемых в Y.

Если существует абсолютный базис пары (X, X^1), продолжаемый в Y, то, очевидно, $(L) \Rightarrow (\Lambda)$, но $(\Lambda) \not\Downarrow (L)$. Известно также, что $(L) \Rightarrow (B)$ [5], $(B) \Rightarrow (L)$ и $(L) \Leftrightarrow (\Lambda) \wedge (B)$.

Определение 5. *Семейство пространств Кете $\{X_r : r \in \rho\}$, где ρ — вполне упорядоченное множество индексов, называют*

1) *правильным, если $X_r \supset X_{r_1}$ при $r < r_1$ и каждая пара (X_r, X_{r_1}) имеет один и тот же (не зависящий от r и r_1) согласованно правильный базис;*

б) *интерполяционным, если все промежуточные пространства между X_r и X_{r_1}, $r \neq r_1$, обладают свойством (L) по отношению к паре (X_r, X_{r^1}).*

Правильными интерполяционными семействами являются, например, некоторые шкалы пространств степенных рядов (риссовских центров) или обобщенных пространств степенных рядов. Из предыдущего непосредственно вытекает

Теорема 3. *В правильной интерполяционной шкале пространств Кете все абсолютные базисы пары пространств продолжаются в любое промежуточное пространство и при этом совместно квазиэквивалентны.*

Заметим, что правильность шкалы не обязательна для совместной квазиэквивалентности базисов [6].

Список литературы: 1. *Драгилев М. М.* О базисах аналитических функций, продолжаемых во внутреннюю область.—Мат. сб., 1961, 53, вып. 2, с. 207—218. 2. Djakow P. A short proof of theorem on quasi-equivalence of regular basis.— Studia Math, 1975, v. 53, N3, p. 269—271. 3. *Захарюта В. П., Конкдаков В. П.* О слабой эквивалентности базисов пространств Кете. — Изв. СКНЦ ВШ, 1983, 4, с. 12—15. 4. *Драгилев М. М.* О согласованно правильных базисах пространств Кете. — Мат. зам., 1971, 19, вып. 1, с. 115—122. 5. *Whittaker* J. M. Sur les series de base de polynomes qualconques, Paris, 1949. — 215р. 6. *Чалов П. А.* О квазиэквивалентности базисов в системе гильбертовых пространств: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Ростов н/Д, 1980.—78 с.

Поступила в редколлегию 26. 11. 82.