УДК 517.53

А. Ф. ГРИШИН, А. М. РУССАКОВСКИЙ

СВОБОДНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В настоящей статье мы будем пользоваться терминологией работы [1].

Определение 1. *Символом* $[\rho(r),\ h(\theta)]$, *где* $\rho(r)$ — *уточненный порядок*, $\rho(r)\to\rho>0$ *при* $r\to\infty$, $h(\theta)$ — 2π — *периодическая тригонометрически* ρ-*выпуклая функция, обозначается класс целых функций, индикатор которых относительно уточненного порядка* $\rho(r)$ *не превосходит* $h(\theta)$.

Мы будем обозначать $v(r)=r^{\rho(2)}$, причем будем считать, что $v(r)$ — неубывающая функция на положительной полуоси и $v(0)=v(+0)=1$.

Определение 2. *Дивизор* $D=\{s_k;\ q_k\}_{k=1,2,\ldots}$ (*т. е. множество различных комплексных чисел* s_k *вместе с их кратностями* q_k, $q_k\geqslant 1$ — *целое число) называется интерполяционным в классе* $[\rho(r),\ h(\theta)]$, *если для любой последовательности комплексных чисел* $\lambda_{k,j}$, $j=1,\ldots,q_k$, $k=1,2,\ldots$, *удовлетворяющих условию*

$$\varlimsup_{k\to\infty}\left[\frac{1}{v(|s_k|)}\ln\max_{1\leqslant j\leqslant q_k}\frac{|\lambda_{k,j}|}{(j-1)!}-h(\arg s_k)\right]\leqslant 0, \tag{1}$$

существует целая функция $F(z)$ *класса* $[\rho(r),\ h(\theta)]$ *со свойством*

$$F^{(j-1)}(s_k)=\lambda_{k,j},\ j=1,\ldots,q_k,\ k=1,2,\ldots \tag{И}$$

Для дальнейшего нам понадобятся следующие определения и обозначения, взятые в основном из работы [2].

Определение 3. *Отображение* $T(z)$, *определенное на неограниченном множестве* E, *называется асимптотически тождественным на бесконечности, если* $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in E}} z^{-1}(T(z)-z)=0$.

Определение 4. *Неограниченное множество* E *называется множеством регулярного роста целой функции* $f(z)$ *относительно индикатора* $h(\theta)$, *если*

1) $h(\theta) \geqslant h_f(\theta)$, *где* $h_f(\theta)$ — *индикатор функции* $f(z)$;

2) *существует отображение* T, *определенное на* E, *асимптотически тождественное на бесконечности и такое, что*

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in T(E)}} \left[\frac{1}{v(|z|)} \ln|f(z)| - h(\arg z)\right] = 0.$$

Через $C(z, \alpha)$ мы будем обозначать открытый круг с центром в точке z радиуса α. Пусть $D = \{s_k;\ q_k\}_{k=1,2,\ldots}$ — дивизор, G — множество в $\boldsymbol{C}$. Обозначим $n_D(G) = \sum\limits_{s_k\in G} q_k$.

Пусть K — компакт в $\boldsymbol{C}$, $K_\sigma = \overline{\bigcup\limits_{z\in K} C(z, \sigma)}$, K^t — гомотетия компакта K с коэффициентом t и центром в точке $z = 0$. Обозначим

$$d_D(K) = \lim_{\sigma\to 0} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{n_D((K_\sigma)^t)}{v(t)}; \quad \Phi_{D,z}(\alpha) = \frac{(n_D(C(z, \alpha|z|)) - q_z)^+}{v(|z|)},$$

где q_z — кратность ближайшей к точке z точки s_k (если таких точек несколько, то будем брать наибольшую кратность).

Наконец, условимся о таких обозначениях. Если $D = \{s_k;\ q_k\}_{k=1,2\ldots}$ — дивизор, то $|D| = \bigcup\limits_k s_k$. Включение $D \subset D' = \{a_n\ p_n\}_{n=1,2,\ldots}$ означает, что $|D| \subset |D'|$ и если $s_k = a_n$, то $q_k \leqslant p_n$. Если $f(z)$ — целая функция, то через D_f будем обозначать дивизор ее корней, через $n_f(G)$ и $\Phi_{f,z}(\alpha)$ — величины, построенные с помощью дивизора D_f.

Теперь мы в состоянии сформулировать теорему, доказательство которой составляет содержание настоящей работы.

Теорема. *Пусть* $D = \{s_k;\ q_k\}_{k=1,2,\ldots}$ — *дивизор*, $\rho(r)$ — *уточненный порядок* $\rho > 0$, $h(\theta)$ — 2π — *периодическая* ρ-*тригонометрически выпуклая функция*. Тогда следующие пять утверждений эквивалентны:

1) дивизор D является интерполяционным в классе $[\rho(r), h(\theta)]$;

2) для любой последовательности $\lambda_{k,j}$, удовлетворяющей условию (1), существует целая функция $F(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$, обладающая свойством (И);

3) существует конечный набор $f_1(z), \ldots, f_\nu(z)$ целых функций класса $[\rho(r), h(\theta)]$ таких, что $D \subset \bigcap\limits_{j=1}^{\nu} D_{f_j} = \{a_n;\ p_n\}_{n=1,2,\ldots}$, причем

$$\lim_{\substack{a_n\to\infty \\ a_n\in|D|}} \left[\frac{1}{v(|a_n|)} \ln \sum_{j=1}^{\nu} \frac{|f_j^{(p_n)}(a_n)|}{p_n!} - h(\arg a_n)\right] = 0; \tag{2}$$

4) существует целая функция $f(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$ такая, что

$$D \subset D_f = \{a_n;\ p_n\}_{n=1,2,\ldots},\ \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{v(|a_n|)}\ln\frac{|f^{(p_n)}(a_n)|}{p_n!} - h(\arg a_n)\right] = 0; \tag{3}$$

5.1) для любого компакта $K \subset C$ выполняется неравенство $d_D(K) \leqslant \mu_H(K)$, где μ_H — риссовская мера субгармонической функции $H(z) = h(\arg z)|z|^\rho$;

5.2) $$\lim_{\delta\to 0}\sup_z \int_0^\delta \frac{\Phi_{D,z}(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = 0;$$

5.3) $$\lim_{k\to\infty}\frac{q_k \ln|s_k|}{v(|s_k|)} = 0.$$

Вопросами интерполяции в классе $[\rho(r),\ h(\theta)]$ занимались Б. Я. Левин [1], О. С. Фирсакова*, А. В. Братищев**, К. Г. Малютин [3] и авторы работ [2, 4]. Причем мы упомянули лишь те работы, которые были в поле зрения авторов при написании настоящей статьи. Отметим, что сформулированная теорема является в некотором смысле завершающим исследованием по задаче свободной интерполяции в классе $[\rho(r),\ h(\theta)]$.

Доказательство. Импликации $2 \Rightarrow 1$ и $4 \Rightarrow 3$ тривиальны. Докажем импликацию $3 \Rightarrow 1$.

Утверждение $3 \Rightarrow 1$ близко к содержанию работы [4], и его доказательство можно вывести из этой работы. Здесь будет приведено несколько иное доказательство. Часть его состоит в получении оценки снизу функции $\sum_{j=1}^{v}|f_j(z)|$ в окрестностях точек s_k. Оценки такого рода ранее фигурировали в работе [5], а также в несколько иной ситуации [6].

Пусть $\tilde{D} = \bigcup_j D_{f_j}$. Из утверждения 3 следует, что существует такая константа N_1, что будет выполняться неравенство

$$n_{\tilde{D}}(r) = n_{\tilde{D}}(C(0,\ r)) \leqslant N_1 v(r). \tag{4}$$

С каждым целым положительным числом k мы свяжем некоторое множество чисел и функций. Из того, как определены числа

---

* Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций.— Докл. АН СССР, 1958, 120, № 3, с. 477—480.

** О разрешимости интерполяционной задачи в классах $[\rho(r),\ H(\theta)]$ и $[\rho(r),\ H(\theta)]$.— Механика сплошной среды, Ростов н/Д, 1981, с. 49—54.

a_n в утверждении 3, следует, что $s_k = a_{n_k}$. Обозначим $m_k = p_{n_k}$,

$$\varphi_k(z) = f_{j_k}(z), \quad \text{где} \quad |f_{j_k}^{(m_k)}(s_k)| = \max_j |f_j^{(m_k)}(s_k)|,$$

$$\tilde{l}_k = \operatorname{dist}(s_k, \ |D| \setminus s_k), \quad l_k = \min\left(\frac{1}{(1+|s_k|)\,v(|s_k|)}, \ \tilde{l}_k\right).$$

Пусть $\psi(\zeta) = \varphi_k(s_k + l_k\zeta)\, \varsigma^{-m_k} l_k^{-m_k} m_k!\, (\varphi_k^{(m_k)}(s_k))^{-1}$, $\tilde{\varphi}_k(\zeta) = \varphi_k(s_k + \zeta)$. Обозначим также $M(r, f) = \sup\limits_{|z| \leqslant r} |f(z)|$.

Пусть $E = \bigcup\limits_k C(s_k, \ \frac{1}{2} l_k)$. Тогда из неравенства (4) следует, что

$$\sum_k l_k \leqslant \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)\,v(t)}\, dn_{\bar{D}}(t) < \infty,$$

т. е. множество E покрывается системой кругов с конечной суммой радиусов.

Пусть $f(z)$ — некоторая целая функция, $h_f(\theta)$ — ее индикатор. Зафиксируем произвольное положительное ε. Известно, что можно найти положительные числа $\delta = \delta(\varepsilon, f, \rho(r))$, $R = R(\varepsilon, f, \rho(r))$ такие, что при $r \geqslant R$, $|z - re^{i\theta}| \leqslant \delta r$ будет выполняться неравенство $\ln|f(z)| \leqslant (h_f(\theta) + \varepsilon)\, v(r)$ (5). Это следствие теоремы 28 главы I из [1], непрерывности индикатора и свойств уточненного порядка.

Напишем формулу Иенсена для функции $\varphi_k(z)$:

$$m_k \ln \delta |s_k| + \int_0^{\delta|s_k|} \frac{n_{f_k}(C(s_k, t)) - m_k}{t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|\varphi_k(s_k + \delta|s_k| e^{i\theta})|\, d\theta + \ln \frac{m_k!}{|\varphi_k^{(m_k)}(s_k)|}. \tag{6}$$

Тогда из определения $\varphi_k(z)$, утверждения 3 и неравенства (5), примененного к функции $\varphi_k(z)$, следует, что

$$\lim_{k \to \infty} \frac{m_k \ln|s_k|}{v(|s_k|)} = 0. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь функцию $\psi(\zeta)$. Это целая функция, $\psi(0) = 1$. По теореме об оценке модуля голоморфной функции снизу [1, гл. 1, теорема 11] в круге $C\left(0, \ \frac{1}{2}\right)$, но вне исключительного множества, покрываемого кругами с суммой диаметров 4η, справедлива оценка

$$\ln|\psi(\zeta)| > -\left(2 + \ln\frac{3e}{2\eta}\right) \ln M(e, \psi).$$

Возьмем $\eta = \frac{1}{32}$. Тогда круговая проекция исключительного множества на полуось $\zeta > 0$ покрывает не более половины сегмента

$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. Из способа построения исключительного множества, примененного при доказательстве упомянутой выше теоремы, следует, что каждая связанная компонента исключительного множества содержит корень $\psi(\zeta)$ из круга $|\zeta| \leqslant 1$. Тогда существует константа N_2 такая, что часть дополнения к круговой проекции исключительного множества на сегменте $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ содержит не более $N_2 v(|s_k|)$ компонент. Поэтому в этом дополнении найдется сегмент $[t_k, u_k] \subset \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ такой, что $\sigma_k = u_k - t_k > N_3 (v(|s_k|))^{-1}$ (8). При $|\zeta| \in [t_k, u_k]$ будут справедливы соотношения

$$|\varphi_k(s_k + l_k\zeta)| = \frac{|\varphi_k^{(m_k)}(s_k)|}{m_k!} |\zeta|^{m_k} l_k^{m_k} |\psi(\zeta)| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{|\varphi_k^{(m_k)}(s_k)|}{m_k!} |\zeta|^{m_k} l_k^{m_k} (M(e, \psi))^{-(2+\ln 48e)}.$$

Так как

$$M(e, \psi) \leqslant M(e, \tilde{\varphi}_k) e^{-m_k} l_k^{-m_k} m_k! \, |\varphi_k^{(m_k)}(s_k)|^{-1} = M_k e^{-m_k} l_k^{-m_k},$$
$$\text{где } M_k = m_k! \, M(e, \tilde{\varphi}_k) \, |\varphi_k^{(m_k)}(s_k)|^{-1},$$

то при указанных ζ справедливы оценки

$$\mu_k(s_k + l_k\zeta)| \geqslant \frac{|\varphi_k^{(m_k)}(s_k)|}{m_k!} 4^{-m_k} l_k^{m_k} e^{(2+\ln 48e)m_k} l_k^{(2+\ln 48e)m_k} M_k^{-(2+\ln 48e)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{|\varphi_k^{(m_k)}(s_k)|}{m_k!} l_k^{(3+\ln 48e)m_k} M_k^{-(2+\ln 48e)}. \tag{9}$$

Допустим, $\tilde{l}_k < 1$. Пусть $\tilde{l}_k = |s_k - s_j|$. Рассмотрим функцию $\varphi_j(z)$. Пусть $D_{\varphi_j} = (b_n; \beta_n)_{n=1,2,\ldots}$, $b_{n_1} = s_j$, $b_{n_2} = s_k$. Тогда $\beta_{n_1} = m_j$. Напишем формулу Иенсена для функции $\varphi_j(z)$:

$$-\sum_{0 < |b_n - s_j| < 1} \beta_n \ln |b_n - s_j| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\varphi_j(s_j + e^{i\theta})| \, d\theta + \ln \frac{m_j!}{|\varphi_j^{(m_j)}(s_j)|}.$$

Так как $m_k \leqslant \beta_{n_2}$, то

$$-m_k \ln \tilde{l}_k \leqslant -\beta_{n_2} \ln |s_k - s_j| \leqslant \ln M(1, \tilde{\varphi}_j) +$$
$$+ \ln \frac{m_j!}{|\varphi_j^{(m_j)}(s_j)|} \leqslant \ln M_j. \tag{10}$$

Известно, что существует константа N_4 и функции $\chi_k \in C^\infty(\mathbf{C})$ такие, что $\chi_k(z) \in [0, 1]$, $\chi_k(z) = 1$ при $|z - s_k| \leqslant l_k t_k$, $\chi_k(z) = 0$ при $|z - s_k| \geqslant l_k u_k$, $\left|\frac{\partial \chi_k}{\partial \bar{z}}\right| \leqslant N_4 l_k^{-1} \sigma_k^{-1}$.

Пусть теперь $\lambda_{k,j}$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию (1). Обозначим

$$\Lambda_k(z) = \sum_{j=1}^{q_k} \frac{\lambda_{k,j}}{(1-1)!}(z-s_k)^{j-1}; \quad \lambda_k(r) = \sup_{|z-s_k|<r} |\Lambda_k(z)|;$$

$$\alpha_j(z) = \sum_k \frac{\partial \chi_k(z)}{\partial \bar z} \Lambda_k(z) \frac{\overline{f_j(z)}}{\sum_{n=1}^{\nu} |f_n(z)|^2}.$$

Считаем, что $\alpha_j(z) = 0$ в тех точках, где правая часть последнего равенства не определена. Так как круги $C\left(s_k, \frac{1}{2} l_k\right)$ не пересекаются, то из оценки (8) следует, что $\alpha_j(z) \in C^\infty(\boldsymbol{C})$. Пусть $E_k = \{z\colon l_k t_k \leqslant |z - s_k| \leqslant l_k u_k\}$. Тогда при $z \in E_k$ справедливы оценки

$$|\alpha_j(z)| \leqslant N_4 l_k^{-1} \sigma_k^{-1} \lambda_k(1)\, l_k^{-2(3+\ln 48 e) m_k} \times$$
$$\times M_k^{2(2+\ln 48 e)} \left(\frac{m_k!}{|\varphi_k^{(m_k)}(s_k)|}\right)^2 |f_j(z)|.$$

Из утверждения 3, определения M_k и неравенства (5) следует, что $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{\ln M_k}{v(|s_k|)} \leqslant 0$. Точно так же $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{\ln \max\limits_{|s_k - s_j| \leqslant 1} M_j}{v(|s_k|)} \leqslant 0$. Тогда из неравенств (10) и (7) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln l_k^{-(3+\ln 48 e) m_k}}{v(|s_k|)} = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\ln l_k^{-1}}{v(|s_k|)} = 0.$$

Из неравенства (8) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{v(|s_k|)} \ln \sigma_k = 0$. Из неравенства $q_k \leqslant m_k$, неравенств (7) и (1) следует, что

$$\varlimsup_{k\to\infty} \left[\frac{1}{v(|s_k|)} \ln \lambda_k(1) - h(\arg s_k)\right] \leqslant 0. \tag{11}$$

Из утверждения 3 и неравенства (5) следует, что

$$\varlimsup_{k\to\infty} \left[\frac{1}{v(|s_k|)} \ln \max_{z\in E_k} |f_j(z)| - h(\arg s_k)\right] \leqslant 0.$$

Из утверждения 3 и определения $\varphi_k(z)$ следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \left[\frac{1}{v(|s_k|)} \ln \frac{m_k!}{|\varphi_k^{(m_k)}(s_k)|} + h(\arg s_k)\right] = 0.$$

Из всех этих соотношений, из того, что множества E_k не пересекаются, и того, что $\alpha_j(z) = 0$ при $z \bar\in \bigcup\limits_k E_k$ следует, что

$$\varlimsup_{z\to\infty} \frac{\ln|\alpha_j(z)|}{v(|z|)} = 0.$$

Далее мы воспользуемся методом Б. Я. Левина построения целой мажоранты. Существует (см., например [3]) уточненный порядок $\rho_1(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty}\rho_1(r)=\rho$, такой, что справедливы соотношения

$$\overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{\ln|\alpha_j(z)|}{v_1(|z|)}=0,\ \lim_{z\to\infty}\frac{v_1(|z|)}{v(|z|)}=0,\ v_1(r)=r^{\rho_1(r)}.$$

Так как $\alpha_j(z)=0$ при $z\overline{\in}E$, а множество E покрывается кругами с конечной суммой радиусов, то существует (см., например, [3]) целая функция $g_j(z)$ вполне регулярного роста с индикатором относительно уточненного порядка $\rho_1(r)$, равным 1, такая, что $(1+|z|)^4|\alpha_j(z)|\leqslant g_j(z)$. Рассмотрим теперь функцию

$$\beta_j(z)=-\frac{g_j(z)}{\pi}\iint\limits_C\frac{\alpha_j(\zeta)\,d\xi d\eta}{g_j(\zeta)(\zeta-z)},\quad \zeta=\xi+i\eta.$$

Известно, что $\partial\beta_j(z)/\partial\bar{z}=\alpha_j(z)$*. Кроме того, справедливо неравенство $|\beta_j(z)|\leqslant N_6|g_j(z)|$ (12).

Положим теперь $F(z)=\sum\limits_k\chi_k(z)\Lambda_k(z)-\sum\limits_{j=1}^{\nu}\beta_j(z)f_j(z)$. Тогда $\frac{d}{dz}F(z)=0$, т. е. $F(z)$ — целая функция. Она, очевидно, обладает свойством (И). Из неравенств (11), (12), свойств функций $g_j(z)$ и утверждения 3 следует, что ее индикатор не превосходит $h(\theta)$. Тем самым импликация $3\Rightarrow1$ доказана.

Докажем теперь импликацию $4\Rightarrow2$. Для случая $q_k=1$, $\forall k$ ее впервые доказал К. Г. Малютин [2]; в работе [3] было дано другое доказательство, которое переносится без существенных изменений на общий случай. Приведем его здесь для полноты изложения.

Как уже было доказано выше, $4\Rightarrow3\Rightarrow1$. Поэтому найдется целая функция $F(z)$ класса $[\rho(r),\ h(\theta)]$, решающая нашу интерполяционную задачу. Пусть $f(z)$ — такая целая функция вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$ относительно порядка $\rho(r)$, что $D\subset D_f$. Положим $\psi(r)=\sup\limits_{|z|=r}|F(z)||f(z)|^{-1}$.

Из свойств функций $F(z)$ и $f(z)$ следует, что $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ r\overline{\in}E_0}}\frac{1}{v(r)}\ln^+\psi(r)=0$, где E_0 — множество интервалов нулевой относительной меры.

Пусть $\rho_1(r)$ — такой уточненный порядок, что

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\overline{\in}E_0}}\frac{1}{v_1(r)}\ln^+\psi(r)=0,\ \lim_{r\to\infty}\frac{v_1(r)}{v(r)}=0,\ v_1(r)=r^{\rho_1(r)},$$

---

* Векуа И. Н. *Обобщенные аналитические функции*.— М.: Физматгиз' 1959.— 628 с.

и пусть $\varphi(z)$ — целая функция вполне регулярного роста с индикатором 1 относительно порядка $\rho_1(r)$.

Отметим, что в силу изложенного выше в плоскости существует множество кругов нулевой линейной плотности, вне которого отношение $\frac{F(z)}{\varphi(z) f(z)}$ стремится к нулю при $z \to \infty$. Функция $\varphi(z) \times \times f(z)$ есть целая функция вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$. Следовательно, такой же является функция $F_1(z) = F(z) + f(z)\varphi(z)$. Функция $F_1(z)$ обладает свойством (И). Импликация $4 \Rightarrow 2$ доказана.

Перейдем к импликации $1 \Rightarrow 5$. Докажем сначала, что $1 \Rightarrow 5.3$.

Пусть $F(z)$ — функция класса $[\rho(r), h(\theta)]$, решающая интерполяционную задачу для последовательности $\lambda_{k,j}$, где $\lambda_{k,j} = 0$, $j = 1, \ldots, q_k - 1$, $\lambda_{k,q_k} = (q_k - 1)! \exp\{h(\arg s_k) v(|s_k|)\}$. Тогда из формулы (6), примененной к функции $F(z)$, и неравенства (5) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{q_k \ln|s_k|}{v(|s_k|)} = 0$.

Обозначим $D(\alpha, \beta, \theta_1, \theta_2) = \{\alpha \leqslant |z| \leqslant \beta, \theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2\}$. В силу леммы 6 из [3] для любой функции $\varepsilon(r) \searrow 0$ при $r \to \infty$ найдется такое покрытие области $C \setminus C(0, R)$ областями $D_j = D^{t_j}(1, \beta_j, \theta_{1,j}, \theta_{2,j})$, что выполняются условия

$$i)\ \lim_{j\to\infty}(\beta_j - 1) = \lim_{j\to\infty}(\theta_{2,j} - \theta_{1,j}) = 0;$$

$$ii)\ \lim_{r\to\infty} r^{-\rho(r)} \sum_{D_j \cap C(0,r)\neq\varnothing} \max(1, \varepsilon(t_j) t_j^{\rho(t_j)}) = 0.$$

Пусть D_j — система областей со свойствами $i)$ — $ii)$, построенная по функции $\varepsilon(t) = \frac{1}{\ln t}$. Выберем в каждой из областей D_j по точке $\alpha_j \in |D|$, если там такие точки есть. Множество выбранных точек обозначим A, а через B обозначим оставшиеся точки, так что $D = D_A \cup D_B$. Пусть $F(z)$ — целая функция класса $[\rho(r), h(\theta)]$ со свойством (И) для последовательности $\lambda_{k,j}$, где $\lambda_{k,j} = 0$, если $s_k \in A$ или $j \neq 1$, $\lambda_{k,1} = \exp\{h(\arg s_k) v(|s_k|)\}$ для $s_k \in A$.

Определим отображение T на множестве B следующим образом: если $s_k \in B \cap D_j$, то $T(s_k) = \alpha_j$. В силу свойств областей D_j отображение T — асимптотически тождественное на бесконечности. Кроме того, $\ln|F(z)| = h(\arg z) v(|z|)$ при $z \in T(B)$. Таким образом, множество B есть множество регулярного роста функции $F(z)$ относительно индикатора $h(\theta)$. Функция $F(z)$ обращается в ноль на дивизоре D_B.

Тогда по теореме 4 из [3] $d_{D_B}(K) \leqslant \mu_H(K)$ для любого компакта $K \subset C$. В силу определения множества A, условия 5.3, определения $\varepsilon(t)$ и свойств множеств D_j получаем, что $d_D(K) \leqslant \leqslant \mu_H(K)$ для любого компакта K. Справедливость условия 5.1 доказана.

Докажем теперь, что

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{s_k}\int_0^{\delta}\frac{\Phi_{D,\,s_k}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha = 0. \qquad (13)$$

Предположим противное, т. е. что существует такое $\varepsilon > 0$ и такие последовательности $\{a_k\} \subset |D|$ и $\delta_k \searrow 0$, что

$$\int_0^{\delta_k}\frac{\Phi_{D,\,a_k}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha > \varepsilon. \qquad (14)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $|a_{k+1}| > 2|a_k|$. Обозначим множество $\{a_k\}$ через A, множество $|D| \setminus A$ — через B. Пусть снова $F(z)$ — функция класса $[\rho(r),\ h(\theta)]$ со свойством (И) для последовательности $\lambda_{k,\,j}$, где $\lambda_{k,\,j} = 0$, если $s_k \overline{\in} A$ или $j = 1$, $\lambda_{k,\,1} = \exp\{h(\arg s_k)\,v(|s_k|)\}$, если $s_k \in A$.

Запишем формулу Иенсена при $s_k \in$ A:

$$\int_0^{r}\frac{n_{F,\,s_k}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|F(s_k + re^{i\theta})|\,d\theta - \ln|\lambda_{k,\,1}|. \qquad (15)$$

Положим $r = \delta|s_k|$ и заметим, что при $\alpha < 1$

$$n_{F,\,s_k}(\alpha|s_k|) \geqslant n_{D_B}(C(s_k,\ \alpha|s_k|)) = n_D(c(s_k, \alpha|s_k|)) - q_k. \qquad (16)$$

Разделим обе части формулы (15) на $v(|s_k|)$. После замены переменных в подынтегральном выражении и использования соотношения (16) получаем:

$$\int_0^{\delta}\frac{\Phi_{D,\,s_k}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \leqslant \frac{1}{v(|s_k|)}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|F(s_k + \delta|s_k|e^{i\theta})|\,d\theta - h(\arg s_k).$$

Теперь из неравенства (5) следует, что при достаточно малых δ и достаточно больших $|s_k|$ выполняется неравенство

$$\int_0^{\delta}\frac{\Phi_{D,\,s_k}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \leqslant \varepsilon,$$

что противоречит (14). Тем самым соотношение (13) доказано.

Для завершения доказательства 5.2 остается заметить, что при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ имеет место оценка $\Phi_{D,\,z}(\alpha) \leqslant M\Phi_{D,\,s_k}(\alpha)$, где s_k — ближайшая к точке z точка последовательности $\{s_k\}$. Импликация $1 \Rightarrow 5$ доказана.

Докажем, наконец, импликацию $5 \Rightarrow 4$.

Из результатов работы [3] следует, что если выполнены условия 5.1 и 5.2, то существует целая функция $f(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$ и такая, что

$$D \subset D_f = \{a_n;\ p_n\},$$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_z \int_0^\delta \frac{\Phi_{f,z}(\alpha)}{\alpha} d\alpha = 0, \tag{17}$$

и корни $f(z)$, не входящие в множество $|D|$, имеют кратность 1.

Тот факт, что из (17) следует (3), был для случая, когда все p_n равны единице, доказан К. Г. Малютиным [2]. Докажем его в общем случае. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Вне C_0-множества функция $f(z)$ допускает оценку снизу $\ln|f(z)| \geqslant (h(\arg z) - \varepsilon)\, v(|z|)$, $|z| > r_\varepsilon$. В силу соотношения (17) можно выбрать δ столь малым, что

$$\int_0^\delta \frac{\Phi_{f, a_k}(\alpha)}{\alpha} d\alpha < \varepsilon. \tag{18}$$

Выберем далее $r_\delta > r_\varepsilon$ так, чтобы при $r > r_\delta$ выполнялось соотношение $r^{-1} \sum r_j < \frac{\delta}{2}$, где суммирование происходит по всем кружкам, образующим C_0-множество, попавшим в круг $C(0, r)$. Тогда, если $|a_k| > r_{\varepsilon, \delta}$, найдется такое $\delta_1 \in (0, \delta)$, что окружность $|z - a_k| = \delta_1 |a_k|$ будет лежать вне C_0-множества. При этом δ можно считать столь малым, что при $|z - a_k| = \delta_1 |a_k|$ $\ln|f(z)| \geqslant (h \times (\arg a_k) - 2\varepsilon)\, v(|a_k|)$ (19).

В силу формулы Иенсена

$$\ln\left|\frac{f^{(p_k)}(a_k)}{p_k!}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(a_k + \delta_1 |a_k| e^{i\theta})| - d\theta -$$

$$- \frac{1}{v(|a_k|)} \int_0^{\delta_1} \frac{\Phi_{f, a_k}(\alpha)}{\alpha} d\alpha - p_k \ln \delta_1 |a_k|. \tag{20}$$

Из соотношений (18) — (20) и условия 5.3 следует теперь, что

$$\varliminf_{k \to \infty} \left[\frac{1}{v(|a_k|)} \ln\left|\frac{f^{(p_k)}(a_k)}{p_k}\right| - h(\arg a_k)\right] \geqslant 0.$$

Неравенство

$$\varlimsup_{k \to \infty} \left[\frac{1}{v(|a_k|)} \ln\left|\frac{f^{(p_k)}(a_k)}{p_k!}\right| - h(\arg a_k)\right] \leqslant 0$$

справедливо для любой целой функции $f(z)$ с индикатором $h(\theta)$. Тем самым импликация $5 \Rightarrow 4$, а с ней и теорема, доказана.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: ГИТТЛ, 1956.—632 с. 2. *Гришин А. Ф.* О множествах регулярного роста целых функций.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1983, **40**, с. 36—47. 3. *Малютин К. Г.* Интерполяция голоморфными функциями: Дис. канд. техн. наук.— М., 1980.— 104 с. 4. *Руссаковский А. М.* Об интерполяции в классе целых функций, имеющих индикатор не выше данного.—Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, **37**, с. 111—114; 1984, **41**, с. 119—122. 5. *Berenstein C. A., Taylor B. A.* A new look at interpofation theory for entire functions of one variable.— Adv. Math., 1979, **33**, № 2, p. 109—143. 6. *Братищев А. В.* К одной задаче А. Ф. Леонтьева.— Докл. АН СССР, 1983, **270**, № 2, с. 265—267.

Поступила в редколлегию 18.01.84.