УДК 517.535

Е. А. ГОРИН

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ В СВЯЗИ С ОДНОЙ ЗАДАЧЕЙ Б. П. ПАНЕЯХА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ НОРМАХ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. При $\sigma > 0$ и $p > 0$ обозначим через $W_\sigma^p(\mathbf{R}^n)$ линейное пространство непрерывных комплексных функций f на $\mathbf{R}^n$, для которых

$$\|f\| \overset{\text{def}}{=} \left(\int_{R^n} |f|^p\,dx\right)^{1/p} < \infty,$$

а преобразование Фурье, понимаемое в смысле распределений, сосредоточено в прямоугольнике $\{\xi \in \mathbf{R}^n : |\xi_k| \leqslant \sigma,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$. Если $p \geqslant 1$, то W_σ^p является банаховым пространством относительно поточечных операций и введенной нормы. При $p = \infty$ норма заменяется sup-нормой на $\mathbf{R}^n$. Известно, что при конечных p функции класса W_σ^p исчезают на бесконечности в $\mathbf{R}^n$. Кроме того, они продолжаются в комплексное $\mathbf{C}^n$ до целых функций экспоненциального типа.

Задача, о которой идет речь, заключается в описании таких борелевских подмножеств $E \subset \mathbf{R}^n$, что

$$\|f\| \leqslant c\left(\int_E |f|^p\,dx\right)^{1/p}$$

для всех функций $f \in W^p_\sigma$ с константой $c = c(\sigma, p, E)$, общей по W^p_σ.

Эту задачу в связи с некоторыми вопросами теории дифференциальных уравнений сформулировал Б. П. Панеях в 1961 г., а полностью она была решена примерно 10 лет назад. Ответ таков: множество E должно быть относительно плотно в $\boldsymbol{R}^n$. Последнее означает, что при некоторых $l > 0$ и $\alpha > 0$ каждый куб с ребром l и осями, параллельными осям координат, содержит порцию множества E лебеговой меры не меньше α. Достаточность имеет место при всех σ и p. Необходимость вытекает из выполнения неравенства для всех сдвигов хотя бы одной нетривиальной функции $f \in W^p_\sigma$ при фиксированных σ и конечном $p > 0$. Рассмотрение именно указанных кубов удобно при выяснении вопроса о формировании константы $c(\sigma, p, E)$.

Б. П. Панеях отметил необходимость, а при $n = 1$ установил и достаточность, используя для этого весьма деликатные средства [1]. Полностью задача была решена в работах В. Н. Логвиненко и Ю. Ф. Середы [2] и В. Э. Кацнельсона [3], установивших существенно более общий факт. Напомним, что полунепрерывная сверху вещественная функция u в $\boldsymbol{C}^n$ называется полисубгармонической, если она является субгармонической по каждому переменному в отдельности при фиксированных остальных. Неотрицательная функция f называется логарифмически полисубгармонической, если $u = \log f$ является полисубгармонической (аналогично эти свойства определяются для функций, заданных в областях). В работах [2, 3] установлено следующее. Если f — логарифмически полисубгармоническая функция в $\boldsymbol{C}^n$, для которой

$$f(z) \leqslant Ce^{\sigma \sum\limits_1^n |z_k|} \tag{1}$$

$$\text{и} \quad \int\limits_{R^n} f(x)\,dx < \infty, \tag{2}$$

а E — относительно плотное множество $\boldsymbol{R}^n$, то

$$\int\limits_{R^n} f(x)\,dx \leqslant c_1 e^{c_2\sigma} \int\limits_E f(x)\,dx,$$

где константы c_1 и c_2 зависят только от n, l и α.

Так как для $f \in W^p_\sigma$ функция $|f|^p$ удовлетворяет всем перечисленным условиям, то решается и упомянутая выше задача Б. П. Панеяха.

Доказательства сформулированного предложения, приведенные в [2, 3], отличаются одно от другого. В. Н. Логвиненко нашел довольно простое доказательство, отвечающее случаю $p = \infty$, и указал интересные новые приложения (в докладе на семинаре по банаховым алгебрам и комплексному анализу осенью 1983 г.). Легко убедиться, рассматривая функционалы «значение в точке $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$», что случай $p = \infty$ выводится, например, из случая $p = 2$. В этой связи естественно было искать простое доказательство и в остальных случаях. Мы приводим здесь простое и короткое доказательство одного общего функционального неравенства, из которого уже стандартными средствами выводится сформулированное выше предложение. В нашем рассуждении используется основная идея работы [2], связанная с привлечением неравенства между средним арифметическим и геометрическим, однако проще оформленная. До последнего шага наше рассуждение не использует субгармоничности и проходит на локально-компактной группе X. На последнем шаге возможен переход к равномерным алгебрам (надо использовать меры Иенсена; мы на этом не останавливаемся, так как не можем пока указать нетривиальных приложений) и к функциям, (логарифмически) полисубгармоническим в произведении полуплоскостей; при этом, конечно, получается не оценка интеграла по X через интеграл по E, а некоторая оценка интеграла по «параллельной орбите».

Кроме того, мы покажем, что в равномерной ситуации утверждаемое неравенство без оценки констант может быть выведено из общих соображений, связанных только с компактностью. Класс функций, для которых такое неравенство справедливо, существенно расширяется за пределы W^{∞}_{σ}, а условия на E ослабляются.

Глубокое и весьма нетривиальное дополнение к сформулированному выше результату было сделано Б. Я. Левиным. В докладе на Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного в 1971 г. в г. Харькове Б. Я. Левин сообщил, что полисубгармоническая функция в C^n, удовлетворяющая оценке $\leqslant \sigma \sum_{1}^{n} |z_k|$ на бесконечности и ограниченная на относительно плотном подмножестве $E \subset R^n$, ограничена и всюду в R^n. Отсюда следует, что в сформулированном выше результате для логарифмически полисубгармонических функций, удовлетворяющих условию (1), априорное предположение (2) можно снять: интегралы в утверждаемом неравенстве оба сходятся или нет. Именно в таком виде результат в конечном счете установлен в работе [3], а в [2] дано доказательство соответствующего утверждения для модулей аналитических функций экспоненциального типа.

В заключение отметим, что Б. Ерике и В. П. Хавин для W^p_σ-пространств нашли очень близкое доказательство. Работа этих авторов в тот момент готовилась к печати. В отличие от нашей заметки общая схема Б. Ерике и В. П. Хавина относится не к группам (или алгебрам), а к задаче Дирихле и затрагивает широкий круг проблем теории функций. Интересно было бы выяснить, нельзя ли на том или ином коротком пути дотянуть до теоремы Б. Я. Левина.

2. На протяжении этого пункта X — произвольное множество или локально-компактная группа, а μ — вероятностная мера на X. Условия измеримости мы не оговариваем. В случае группы все

рассматриваемые подмножества предполагаются борелевскими, а меры — регулярными. Функции, встречающиеся под знаком логарифма, считаются неотрицательными.

Классическое неравенство между средним геометрическим и арифметическим

$$\exp \int\limits_X \log f \, d\mu \leqslant \int\limits_X f \, d\mu \tag{3}$$

положительно однородно. Поэтому его достаточно доказывать в предположении, что правая часть в (3) равна 1, а в этом предположении оно получится, если проинтегрировать неравенство $\log f \leqslant \leqslant f - 1$.

Пусть $X = A \cup B$, причем $A \cap B = \varnothing$. Положим $\alpha = \mu(A)$, $\beta = \mu(B)$ и будем считать эти числа положительными.

Лемма 1. *В указанных предположениях*

$$\exp \int\limits_X \log f \, d\mu \leqslant \frac{1}{\alpha^\alpha \beta^\beta} \left(\int\limits_A f \, d\mu\right)^\alpha \left(\int\limits_B f \, d\mu\right)^\beta. \tag{4}$$

Доказательство. Мы просто применяем дважды неравенство (3):

$$\exp \int\limits_X \log f \, d\mu = \exp \int\limits_A \log f \, d\mu \cdot \exp \int\limits_B \log f \, d\mu =$$

$$= \left[\exp \frac{1}{\mu(A)} \int\limits_A \log f \, d\mu\right]^{\mu(A)} \cdot \left[\exp \frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B \log f \, d\mu\right]^{\mu(B)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu(A)^{\mu(A)} \, \mu(B)^{\mu(B)}} \left(\int\limits_A f \, d\mu\right)^{\mu(A)} \cdot \left(\int\limits_B f \, d\mu\right)^{\mu(B)}.$$

Лемма 2. *Если* $\mu(E) \geqslant \delta > 0$, *то*

$$\exp \int\limits_X \log f \, d\mu \leqslant 2 \left(\int\limits_E f \, d\mu\right)^\delta \left(\int\limits_X f \, d\mu\right)^{1-\delta}. \tag{5}$$

Доказательство. Неравенство (5) положительно одно родно. Поэтому можно предположить, что

$$\int\limits_X f \, d\mu = 1,$$

и неравенство приводится к виду

$$\exp \int\limits_X \log f \, d\mu \leqslant 2 \left(\int\limits_E f \, d\mu\right)^\delta. \tag{6}$$

Если $\mu(E) = 1$, то неравенство (6) слабее, чем (3). В противном случае полагаем $A = E$, $B = X \setminus E$ и применяем лемму 1. Так как $t^t (1 - t)^{1-t} \geqslant 1/2$ при $0 < t < 1$, то неравенство (6) легко вытекает из неравенства (4). Заметим, что константу 2 в неравенстве (5), вообще говоря, нельзя заменить меньшей, но при $\delta \to 0$ наилучшая константа стремится к 1.

Теорема 1. *Пусть X — локально-компактная группа с правой мерой Хаара λ и μ — вероятностная мера на X. Пусть E — такое подмножество в X, что $\mu(xE) \geqslant \delta > 0$ для всех $x \in X$. Если $f \in L^1(X, \lambda)$, то*

$$\int\limits_X \left\{\exp \int\limits_X \log f(xt)\, d\mu(t)\right\} d\lambda(x) \leqslant 2 \Big(\int\limits_E f\, d\lambda\Big)^{\delta} \Big(\int\limits_X f\, d\lambda\Big)^{1-\delta}. \tag{7}$$

Доказательство. Зададим вероятностную меру μ_x условием

$$\int\limits_X g(xt)\, d\mu(t) = \int\limits_X g(t)\, d\mu_x(t).$$

Тогда $\mu_x(E) \geqslant \delta$ и из неравенства (5) вытекает, что

$$\begin{aligned} \exp \int\limits_X \log f(xt)\, d\mu(t) &= \exp \int\limits_X \log f(t)\, d\mu_x(t) \leqslant \\ \leqslant 2 \Big(\int\limits_X f(t)\, \alpha_E(t)\, d\mu_x(t)\Big)^{\delta} &\Big(\int\limits_X f(s)\, d\mu_x(s)\Big)^{1-\delta} = \\ = 2 \Big(\int\limits_X f(xt)\, \alpha_E(xt)\, d\mu(t)\Big)^{\delta} &\Big(\int\limits_X f(xs)\, d\mu(s)\Big)^{1-\delta}, \end{aligned}$$

где α_E — характеристическая функция (индикатор) множества E. Неравенство Гельдера для неотрицательных функций можно записать в виде

$$\int\limits_X g_1^{\delta} g_2^{1-\delta}\, d\lambda \leqslant \Big(\int\limits_X g_1 d\lambda\Big)^{\delta} \Big(\int\limits_X g_2 d\lambda\Big)^{1-\delta}.$$

Используя это неравенство и теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned} &\int\limits_X \Big(\int\limits_X f(xt)\, \alpha_E(xt)\, d\mu(t)\Big)^{\delta} \Big(\int\limits_X f(xs)\, d\mu(s)\Big)^{1-\delta} d\lambda(x) \leqslant \\ &\leqslant \Big(\int\limits_{X\times X} f(xt)\, \alpha_E(xt)\, d\mu(t)\, d\lambda(x)\Big)^{\delta} \Big(\int\limits_{X\times X} f(ys)\, d\mu(s)\, d\lambda(y)\Big)^{1-\delta} = \\ &= \Big(\int\limits_{X\times X} f(x)\, \alpha_E(x)\, d\lambda(x)\, d\mu(t)\Big)^{\delta} \Big(\int\limits_{X\times X} f(y)\, d\lambda(y)\, d\mu(s)\Big)^{1-\delta} = \\ &= \Big(\int\limits_E f\, d\lambda\Big)^{\delta} \Big(\int\limits_X f\, d\lambda\Big)^{-\delta}, \end{aligned}$$

и теорема доказана.

Если предположить, что при некотором $\varepsilon > 0$ существует такая мера μ, удовлетворяющая условиям теоремы 1, что

$$\int\limits_X \left\{\exp \int\limits_X \log f(xy)\, d\mu(y)\right\} d\lambda(x) \geqslant \varepsilon \int\limits_X f\, d\lambda, \tag{8}$$

то, сопоставляя (7) и (8), получим

$$\int\limits_X f\,d\lambda \leqslant \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}} \int\limits_E f\,d\lambda.$$

Вместе с тем — и это классический факт — для логарифмически полисубгармонических f в $\boldsymbol{C}^n$, удовлетворяющих условиям (1) и (2), и относительно плотного $E \subset \boldsymbol{R}^n$ такие μ и $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, E) > 0$ легко предъявляются. Для полной ясности мы остановимся на этом подробнее в следующем пункте.

3. Пусть u — полисубгармоническая в произведении полуплоскостей $y_k = \operatorname{Im} z_k \geqslant 0$ функция, для которой

$$u(z) \leqslant \sum_1^n \sigma_k |z_k| + \tau \tag{9}$$

при некоторых неотрицательных σ_k и τ и

$$\int\limits_{R^n} u^+(x) \prod_1^n \frac{dx_k}{1+x_k^2} < \infty, \tag{10}$$

где, как обычно, $a^+ = \max\{a, 0\}$ для $a \in \boldsymbol{R}$. Тогда

$$u(z) \leqslant \sum_1^n \sigma_k y_k + \int\limits_{R^n} u(t)\, P(z, t)\, dt, \tag{11}$$

где

$$P(z, t)\, dt = \prod_1^n \frac{y_k}{\pi} \frac{dt_k}{|z_k - t_k|^2}$$

— произведение одномерных форм Пуассона для полуплоскости. Оценку (11) можно вывести из (9) и (10), применяя индукцию по n. Основным является случай $n = 1$. В этом случае можно предположить сначала, что $u \geqslant 0$ (при $n = 1$ индекс k мы опускаем). Применяя формулу Пуассона для полукруга, граница которого состоит из отрезка $-\xi \leqslant R \leqslant \xi$ и полуокружности $\zeta = \mathrm{Re}^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, и полагая затем $R \to \infty$, получим оценку $u \leqslant sy + v$ с некоторой константой $s > \sigma$ и гармонической функцией v, совпадающей с интегральным слагаемым в правой части неравенства (11). Заметим, что в данном случае $v \geqslant 0$, так как $u \geqslant 0$. Функция $w = (u - v - \sigma y)^+$ является субгармонической, удовлетворяет линейной оценке роста и, кроме того, $w \,|\, \boldsymbol{R} = 0$, $w \,|\, i\boldsymbol{R} \leqslant \tau$. Применяя теорему Фрагмена — Линделефа в углах $x > 0$, $y > 0$ и $x < 0$, $y > 0$, получаем, что $w \leqslant \tau$ всюду, а так как $w \,|\, \boldsymbol{R} = 0$, то отсюда следует, что $w = 0$. Общий случай сводится к знакоопределенному путем рассмотрения последовательности $u_N = N + \max\{-N, u\}$ и предельного перехода при $N \to \infty$.

При очевидных предположениях относительно логарифмически полисубгармонической функции f в произведении полуплоскостей из неравенства (11) получается неравенство

$$f(z) \leqslant \exp\left\{\sum_{1}^{n} \sigma_k y_k + \int_{R^n} \log f(x+t)\, P(iy,\ t)\, dt\right\}. \tag{12}$$

Так как при каждом y (с ненулевыми компонентами) мера μ, определяемая соотношением $d\mu(t) = P(iy,\ t)\, dt$, является вероятностной, то в предположении суммируемости из неравенства (12) и неравенства между средним арифметическим и геометрическим вытекает неравенство

$$\int_{R^n} f(x+iy)\, dx \leqslant e^{\sum_{1}^{n} \sigma_k y_k} \int_{R^n} f(x)\, dx. \tag{13}$$

Пусть E — относительно плотное множество $\boldsymbol{R}^n$, характеризуемое введенными выше параметрами l и α, и пусть μ — вероятностная мера на $\boldsymbol{R}^n$, определяемая соотношением $d\mu(t) = P(iy,\ t)\, dt$. Легко проверить, что тогда

$$\mu(x+E) \geqslant \delta = \frac{\alpha}{\pi^n} \prod_{1}^{n} \frac{y_k}{l^2 + y_k^2} \tag{14}$$

для всех $x \in \boldsymbol{R}^n$. Максимальное δ получается при $y_k = l$.

Теорема 2. *Пусть f — логарифмически полисубгармоническая функция в произведении верхних полуплоскостей, удовлетворяющая условию типа* (1). *Если $f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$, то*

$$\int_{R^n} f(x+iy)\, dx \leqslant 2e^{\sum_{1}^{n} \sigma_k y_k} \left(\int_E f\, dx\right)^{\delta} \left(\int_{R^n} f\, dx\right)^{1-\delta}, \tag{15}$$

где δ определяется по формуле (14), а E — относительно плотное подмножество в $\boldsymbol{R}^n$, характеризуемое параметрами l и α. Если $f \in L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, то

$$\sup_{R^n} f(x+iy) \leqslant e^{\sum_{1}^{n} \sigma_k y_k} (\sup_E f)^{\delta} (\sup_{R^n} f)^{1-\delta}. \tag{16}$$

Доказательство. Неравенство (15) получится, если проинтегрировать неравенство (12) и применить теорему 1. Для доказательства неравенства (16) можно предположить, что $f \in (L^1 \cap L^\infty)(\boldsymbol{R}^n)$, так как общий случай легко сводится к этому. В данном предположении при всех $p \geqslant 1$ функция f^p удовлетворяет условиям первой части теоремы с заменой σ_k на $p\sigma_k$. Применяя неравенство (15) к f^p, беря корень p-й степени из обеих частей и полагая $p \to \infty$, мы получим неравенство (16), так как для любой меры L^p-нормы функции, входящей во все L^p, при $p \to \infty$ стремятся к (существенной) верхней грани этой функции.

Для получения теоремы Логвиненко — Середы — Кацнельсона (в предположении суммируемости) теорему 2 остается дополнить неравенством (13). В соответствии со сказанным в конце п. 2, беря в (14) значение δ, отвечающее $y_k = l$, мы получим, что в этом случае

$$\int_{R^n} f\,dx \leqslant \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}} \int_E f\,dx,$$

$$\text{где } \varepsilon = e^{-2n\sigma l}, \quad \delta = \alpha/(2\pi l)^n.$$

В равномерной оценке множитель $2^{1/\delta}$ снимается. Например, для всех $f \in B_\sigma = W_\sigma^\infty(\boldsymbol{R})$ (класс Бернштейна)

$$\sup_R |f| \leqslant e^{\frac{4\pi\sigma l^2}{\alpha}} \sup_E |f|.$$

В приложениях, которые дает последнему неравенству В. Н. Логвиненко, важно, что в показателе $4\pi\sigma l^2/\alpha$, кроме множителя l/α, характеризующего относительную плотность множества E, имеется еще множитель l, который в определенных ситуациях полезно считать малым.

4. Остановимся на равномерной ситуации. Не считая тривиальной леммы, мы ограничимся одним простым примером.

Пусть X — метрический компакт и $C(X)$ — пространство всех непрерывных функций на X с топологией равномерной сходимости. Основными объектами будут служить некоторое семейство $F \subseteq C(X)$ неотрицательных функций и некоторое семейство M регулярных борелевских мер на X, связанные между собой перечисляемыми ниже условиями.

Относительно семейства F предполагается, что оно предкомпактно в $C(X)$, не содержит функции, тождественно равной 0 и становится компактом после присоединения этой функции. Далее, отмечается некоторая регулярная борелевская (конечная) мера λ на X, такая, что $\lambda(Z_f) = 0$ для всех $f \in F$, где Z_f — множество нулей функции f. Фиксируем вещественное число $\alpha > 0$. Семейство $M = M(\alpha, \lambda, F)$ составляют все такие меры μ, что $\mu(E) \leqslant \lambda(E)$ для всех борелевских подмножеств $E \subseteq X$ и $\mu(X) \geqslant \alpha$. Заметим, что в этой ситуации $\int_X f d\mu > 0$ для всех $f \in F$ и $\mu \in M$.

Лемма 3. *Если $\mu_i \in M$ и $\mu_i \to \nu$ (слабо), то $\nu \in M$.*

Доказательство. Пусть G — открытое множество и g — непрерывная функция, сосредоточенная в G, причем $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$. Имеем

$$\int_X g\,d\nu = \lim_i \int_X g\,d\mu_i \leqslant \lambda(G).$$

Так как это верно для всех g с указанными свойствами, то $\nu(G) \leqslant \lambda(G)$. Следовательно, $\nu(E) \leqslant \lambda(E)$ для всех борелевских подмножеств $E \subseteq X$.

Следствие. *Если* $\mu_i \in M$, $f_i \in F$ *и* $\int\limits_X f_i \, d\mu_i \to 0$, *то* $\sup\limits_X f_i \to 0$.

Действительно, предполагая противное и переходя к подпоследовательностям, мы можем считать, что $\mu_i \to \mu \in M$ (слабая сходимость), $f_i \to f$ (равномерная сходимость) и $\sup\limits_X f_i \geqslant \varepsilon > 0$. Но из последних двух условий вытекает, что $f \in F$, а из двух первых,— что $\int\limits_X f \, d\mu = 0$. Однако такая комбинация исключена.

Пример. Пусть X — компакт в $\boldsymbol{R}^n$ и $\{\xi_i\}$ — такая последовательность точек из $\boldsymbol{R}^n$, что $\bigcup\limits_i \{\xi_i + X\} = \boldsymbol{R}^n$. Фиксируем константы a, $A > 0$ и обозначим через $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{a,\,A}$ семейство всех функций f, аналитических в произведении полос $|\operatorname{Im} z_k| < a$ в $\boldsymbol{C}^n$, для которых

$$|f(z)| \leqslant A \sup_{R^n} |f| < \infty. \tag{17}$$

Заметим, что $\boldsymbol{F}$ инвариантно относительно вещественных сдвигов (но не образует линейного пространства). Пусть λ — такая конечная регулярная борелевская мера на X, что $\lambda(X \cap Z_f) = 0$ для всех $f \in \boldsymbol{F}$, и μ — такая регулярная борелевская мера на $\boldsymbol{R}^n$, что $\mu(\xi_i + E) \leqslant \lambda(E)$ для всех борелевских подмножеств $E \subseteq X$ и $\mu(\xi_i + X) \geqslant \alpha > 0$ для всех i.

В перечисленных условиях существует такая константа γ, общая для всех $f \in \boldsymbol{F}$, что

$$\sup_{R^n} |f| \leqslant \gamma \sup_i \int\limits_{\xi_i + X} |f| \, d\mu.$$

Действительно, предполагая противное, мы сможем указать такую последовательность индексов i и соответствующую последовательность функций $f_i \in \boldsymbol{F}$, что

$$\sup_{R^n} |f_i| \leqslant 1, \quad \sup_{\xi_i + X} |f_i| \geqslant \varepsilon > 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{\xi_i + X} |f_i| \, d\mu \to 0.$$

Из теоремы Витали и условия (17) вытекает, что семейство сужений $f \mid X$, где $f \in F$ и $\sup\limits_{R^n} |f| \leqslant 1$, компактно в $C(X)$. Так как $\boldsymbol{F}$ инвариантно относительно вещественных сдвигов, то отсюда следует, что существование последовательности f_i с указанными свойствами приводит к противоречию со следствием леммы 3.

Функции из $W_\sigma^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ принадлежат $F_{a,\,A}$ при всех $a > 0$ и $A = \exp n\sigma a$. Если $d\mu = \chi \, dt$, где χ — характеристическая функция относительно плотного подмножества, то в качестве X можно взять куб с ребром l, а в качестве λ — меру Лебега. Вместе с тем возможны и чисто сингулярные меры μ. Очевидно, что описанный пример включается в гораздо более широкую схему.

Список литературы: 1. *Панеях Б. П.* О некоторых теоремах типа Пэли — Винера.— ДАН СССР, 1961, **138**, № 1, с. 47—50. 2. *Логвиненко В. Н., Середа Ю. Ф.* Эквивалентные нормы в пространстве целых функций экспоненциального типа.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1974, вып. 20, с. 102—111. 3. *Кацнельсон В. Э.* Эквивалентные нормы в пространствах целых функций.— Мат. сб., 1973, **92**(134), № 1(9), с. 34—54.

Поступила в редколлегию 18.01.84.