УДК 517.5

А. А. ГОЛЬДБЕРГ, И. В. ОСТРОВСКИЙ

ОБ ЭФФЕКТЕ ПЭЙЛИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ

1°. Будем предполагать известными основные понятия и стандартные обозначения неванлинновской теории [1], а также основные свойства целых характеристических функций (ц. х. ф.), функций распределения (ф. р.) [2].

В 1932 г. Пэйли [3] построил пример целой функции f любого наперед заданного порядка $\rho \geqslant 0$, для которой

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \ln M(r, f)/T(r, f) = \infty. \tag{1}$$

Если для целой функции f выполняется (1), то будем говорить, что для нее имеет место эффект Пэйли. Пусть f — ц. х. ф., F — соответствующая ф. р. Обозначим через S_f множество точек роста функции F, через D_f — множество ее точек разрыва. Множество S_f не пусто и замкнуто, а $D_f \subset S_f$ не более чем счетно и содержит все изолированные точки S_f. Множество S_f ограничено тогда и только тогда, когда f — целая функция экспоненциального типа. В этом случае она является функцией вполне регулярного роста в смысле Б. Я. Левина — А. Пфлюгера [4, с. 323] и, следовательно, эффект Пэйли для нее не может иметь места. Если множество S_f не ограничено, то для f возможен любой порядок $\rho \geqslant 1$. Может ли при наперед заданных $\rho \geqslant 1$, неограниченном S_f и $D_f \subset S_f$ иметь место эффект Пэйли? В случае, когда $S_f = [0, \infty)$, а D_f плотно в S_f, утвердительный ответ следует из анализа одного примера В. П. Петренко [5, с. 60]. Здесь дается утвердительный ответ в общем случае.

Теорема 1. *Пусть A — замкнутое неограниченное множество на $(-\infty, \infty)$, B — его не более чем счетное подмножество, содержащее все изолированные точки A, а ρ — число $\geqslant 1$. Существует ц. х. ф. f порядка ρ, для которой $S_f = A$, $D_f = B$ и имеет место эффект Пэйли.*

Замечание 1. Теорему 1 можно дополнить утверждением, что если $B = \varnothing$ (и, следовательно, A не имеет изолированных точек), то ф. р. F, отвечающую ц. х. ф. f, можно выбрать непрерывной. Если же $B = \varnothing$ и, кроме того, пересечение A с любым интервалом либо пусто, либо имеет положительную лебегову меру, то ф. р. F можно выбрать абсолютно непрерывной.

Замечание 2. В случае $\rho = 1$ теорему 1 можно дополнить утверждением, что для любой сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ функции Φ можно подчинить рост ц. х. ф. f ограничению $\ln M(r, f) = O(r\Phi(r))$, $r \to \infty$.

Теорема 1 будет выведена из такого результата, относящегося к теории абсолютно сходящихся в плоскости рядов Дирихле и представляющего, возможно, самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Пусть $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k \uparrow \infty$. Существует целая функция*

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k \geqslant 0, \tag{2}$$

заданного порядка $\rho \geqslant 1$, для которой имеет место эффект Пэйли.

2°. Чтобы получить теорему 1 из теоремы 2, понадобится следующая

Лемма. *Пусть f — ц. х. ф., для которой множество S_f неограничено, F — соответствующая ф. р. Существует такая убывающая на $[0, \infty)$ функция $\tau_f \equiv \tau_f(r) > 0$, что если ф. р. F_1 удовлетворяет условию*

$$J(r) = \int_r^\infty \{|F(t) - F_1(t)| + |F(-t) - F_1(-t)|\}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \tau_f(r), \quad r \geqslant r_0, \tag{3}$$

то соответствующая ей характеристическая функция f_1 является ц. х. ф. и выполняется $\ln M(r, f - f_1) = o(T(r, f))$, $r \to \infty$. (4)

Доказательство. Положим $\omega(r) = \{\ln M(r/2, f)/(3r)\}^{1/2}$. Так как $\ln M(r/2, f)$ — выпуклая функция от r, $f(0) = 1$, а в силу неограниченности S_f имеем $r = o(T(r, f))$, $r \to \infty$, то ω — строго возрастающая к $+\infty$ положительная функция на R_+. Положим

$$\tau_f(r) = (1 + r^2)^{-1} \exp\left\{-\int_{\omega(0)}^r \psi(u)\,du\right\}, \quad r \geqslant \omega(0),$$

где через ψ обозначена функция, обратная к ω. Тогда, так как $\psi(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, имеем при любом $c > 0$ оценку $J(r) = O(e^{-cr})$, $r \to \infty$.

Предположим, что ф. р. F_1 удовлетворяет условию (3). Тогда при $r \geqslant (r_0 + 1)e$ имеем

$$1 - F_1(r) + F_1(-r) \leqslant \int_{r/e}^r \{1 - F_1(t) + F_1(-t)\}\,d\ln t \leqslant$$
$$\leqslant \int_{r/e}^r \{|F(t) - F_1(t)| + |F(-t) - F_1(-t)|\}\,d\ln t +$$
$$+ \int_{r/e}^r \{1 - F(t) + F(-t)\}\,d\ln t \leqslant J(r/e) + 1 - F(r/e) +$$
$$+ F(-r/e).$$

Поскольку [2, с. 51] условие $1 - F(r) + F(-r) = O(e^{-cr})$, $r \to +\infty$, $\forall c > 0$, является необходимым и достаточным для того, чтобы соответствующая характеристическая функция была целой заключаем, что f_1 является ц. х. ф.

Имеем

$$f(z) - f_1(z) = \int_{-\infty}^\infty e^{izt} d(F(t) - F_1(t)) =$$
$$= -iz \int_{-\infty}^\infty e^{izt}(F(t) - F_1(t))\,dt,$$

откуда $M(r, f - f_1) \leqslant r \int_0^\infty e^{rt}\{|F(t) - F_1(t)| + |F(-t) - F_1(-t)|\} \times$

$\times dt = -r \int\limits_0^\infty e^{rt} dJ(t) = rJ(0) + r^2 \int\limits_0^\infty e^{rt} J(t)\, dt$. Используя выражение для $\tau_f(r)$ и условие (3), получим при $q > \max\{r_0, \omega(0)\}$:

$$M(r, f - f_1) \leqslant O(e^{qr}) + r^2 \int\limits_{\omega(0)}^{\infty} e^{rt} \tau_f(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant O(e^{qr}) + r^2 \left(\exp \max \left\{rt - \int\limits_{\omega(0)}^{t} \psi(u)\, du : t \geqslant \omega(0)\right\}\right) \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = O(e^{qr}) + \frac{1}{2} \pi r^2 \exp\left\{r\omega(r) - \int\limits_{\omega(0)}^{\omega(r)} \psi(u)\, du\right\} \leqslant$$

$$\leqslant O(e^{qr}) + \frac{1}{2} \pi r^2 \exp\{r\omega(r)\}, \quad r \to \infty.$$

Так как $r = o(T(r, f))$ и $r\omega(r) = (r \ln M(r/2, f)/3)^{1/2} \leqslant (rT(r, f))^{1/2} =$
$= o(T(r, f)), \ r \to \infty$,

то получаем оценку (4). Лемма доказана.

Предположим, что множества A, B и число ρ удовлетворяют условиям теоремы 1. Не уменьшая общности, можно считать, что множество A не ограничено справа. Выделим из A произвольную последовательность $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k \uparrow \infty$ и построим по ней согласно теореме 2 целую функцию g. Тогда функция $f(z) = g(iz)/g(0)$ является ц. х. ф., соответствующая ф. р. F является функцией скачков с разрывами во множестве $\{\lambda_k\}$. Легко видеть, что можно подобрать ф. р. F_1 таким образом, чтобы выполнялось (3) и чтобы, кроме того, множество ее точек роста совпадало с A, а множество точек разрыва — с B. В силу леммы соответствующая характеристическая функция f_1 будет ц. х. ф. и $\ln M(r, f_1) = \ln M(r, f) + o(T(r, f))$, $T(r, f_1) = T(r, f) + o(T(r, f))$, $r \to \infty$. В силу этих равенств эффект Пэйли будет иметь место и для f_1. Так как, кроме того, $S_{f_1} = A$, $D_{f_1} = B$, то f_1 является ц. х. ф., существование которой требовалось доказать. Справедливость замечания 1 следует из того, что ф. р. F_1 можно подобрать так, чтобы выполнялось (3) и, кроме того, дополнительные условия, указанные в формулировке замечания.

3°. Докажем теорему 2. Заметим прежде всего, что для функции g вида (2) выполняется $|g(z)| \leqslant g(\operatorname{Re} z)$, $M(r, g) = g(r)$. Чтобы имел место эффект Пэйли, достаточно наличие такого свойства: существуют $l_k \uparrow \infty$ и $\omega_k \downarrow 0$ такие, что $\ln g(l_k(1-\omega_k)) = o(\ln g(l_k))$, $k \to \infty$ (5). Действительно, из (5) следует ($s_k = \arccos(1-\omega_k)$)

$$T(l_k, g) = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{s_k} + \int\limits_{s_k}^{\pi}\right) \ln^+ |g(l_k e^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant \frac{s_k}{\pi} \ln g(l_k) +$$

$$+ \ln g(l_k(1-\omega_k)) = o(\ln g(l_k)) = o(\ln M(l_k, g)), \quad k \to \infty.$$

Ниже предполагаем, что $\rho > 1$. Выберем возрастающую последовательность (τ_k) так, чтобы $\tau_k \geqslant k$, $k = 1, 2, \ldots$ (6); $L_k = \tau_1 + \cdots + \tau_k \in \{\lambda_j\}$, $k = 1, 2, \ldots$, (7); $L_{k-1} = o(\tau_k^{1-1/\rho})$, $k \to \infty$ (8). Из (6) и (8) следует, что $k \leqslant L_k = (1 + o(1))\,\tau_k$, $k \to \infty$ (9). Положим

$$M_k = \tau_1^{\rho/(\rho-1)} + \cdots + \tau_k^{\rho/(\rho-1)}, \quad g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \exp\{L_j z - M_j\}. \quad (10)$$

В силу (9) ряд абсолютно сходится во всей плоскости и, следовательно, функция f, определяемая по (10), является целой. Из (7) следует, что эта функция вида (2).

Обозначим $(r \geqslant 0)$ $\mu(r, g) = \max\{\exp(L_k r - M_k) : k \in N\}$, $r_k = \tau_k^{1/(\rho-1)}$. При $r_\nu \leqslant r \leqslant r_{\nu+1}$ выполняется

$$r\tau_j - \tau_j^{\rho/(\rho-1)} \leqslant r_j\tau_j - \tau_j^{\rho/(\rho-1)} = 0, \quad j \geqslant \nu + 1,$$
$$r\tau_j - \tau_j^{\rho/(\rho-1)} \geqslant r_j\tau_j - \tau_j^{\rho/(\rho-1)} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant \nu,$$

поэтому $\mu(r, g) = \exp(L_\nu r - M_\nu)$, $r_\nu \leqslant r \leqslant r_{\nu+1}$. Из (9) следует $(r_\nu \leqslant r \leqslant r_{\nu+1})$

$$\ln \mu(r, g) \leqslant L_\nu r = (1 + o(1))\,\tau_\nu r \leqslant (1 + o(1))\,r^\rho, \quad r \to \infty. \quad (11)$$

Из (8) следует

$$M_{k-1} \leqslant L_{k-1}^{\rho/(\rho-1)} = o(\tau_k), \ k \to \infty, \quad \ln \mu(2r_\nu, g) \geqslant L_\nu 2r_\nu - M_{\nu-1} - \tau_\nu^{\rho/(\rho-1)} = (1 + o(1))\,2\tau_\nu r_\nu - (1 + o(1))\,\tau_\nu^{\rho/(\rho-1)} = (1 + o(1))\,r_\nu^\rho, \quad \nu \to \infty. \quad (12)$$

Далее, учитывая (9), получаем

$$M(r, g) = g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} \exp\{L_j(r + 1) - M_j\}\exp(-L_j) \leqslant \mu(r + 1, g)\sum_{j=1}^{\infty} \exp(-L_j) \leqslant \mu(r + 1, g)\sum_{j=1}^{\infty} \exp(-j) = \mu(r + 1, g)/(e - 1) < \mu(r + 1, g). \quad (13)$$

Из (11) и (13) следует, что $\ln M(r, g) \leqslant (1 + o(1))\,r^\rho$, $r \to \infty$, а из (12) — что $\ln M(2r_\nu, g) \geqslant \ln \mu(2r_\nu, g) \geqslant 2^{-\rho}(1 + o(1))(2r_\nu)^\rho$, $\nu \to \infty$. Следовательно, g имеет порядок ρ.

Положим $l_\nu = r_\nu + r_\nu^{1/\rho}$, $\omega_\nu = (r_\nu^{1/\rho} + 1)/l_\nu$. При $\nu \geqslant \nu_0$ выполняется

$$\ln \mu(l_\nu, g) = L_\nu l_\nu - M_\nu \geqslant \tau_1 r_1 + \cdots + \tau_{\nu-1} r_{\nu-1} + \tau_\nu(r_\nu + r_\nu^{1/\rho}) - (\tau_1^{\rho/(\rho-1)} + \cdots + \tau_\nu^{\rho/(\rho-1/)}) = \tau_\nu r_\nu^{1/\rho}, \quad (14)$$
$$\ln \mu(r_\nu, g) = L_{\nu-1} r_\nu - M_{\nu-1} < L_{\nu-1} r_\nu. \quad (15)$$

Из (8), (13)—(15) получаем

$$\frac{\ln g(r_\nu - 1)}{\ln g(l_\nu)} \leqslant \frac{\ln \mu(r_\nu, g)}{\ln \mu(l_\nu, g)} \leqslant \frac{L_{\nu-1} r_\nu}{\tau_\nu r_\nu^{1/\rho}} = L_{\nu-1} \tau_\nu^{\frac{1}{\rho}-1} = o(1), \qquad \nu \to \infty.$$

Заметив, что $l_\nu(1 - \omega_\nu) = r_\nu - 1$, видим, что для g выполняется (5).

Доказательство в случае $\rho = 1$ приводить не будем, так как оно отличается от доказательства в случае $\rho > 1$ лишь громоздкими выкладками. Еще несколько усложнив доказательство, можно подчинить функцию g дополнительному ограничению: $\ln M(r, g) = O(r\Phi(r))$, $r \to \infty$, где Φ — наперед заданная функция, $\Phi(r) \uparrow \infty$ при $r \to \infty$. По лемме 2° отсюда сразу следует замечание 2 к теореме 1.

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.—592 с. 2. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. — М.: Наука, 1972.— 480 с. 3. *Paley R. E. A. C.* A note on integral functions.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1932, 28, p. 262—265. 4. *Левин Б. Я*. Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.—632 с. 5. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций.— Х.: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1978.— 136 с.

Поступила в редколлегию 23.11.83.