УДК 517.98

Н. И. БАРАНОВ

К ЗАДАЧЕ О ТРЕУГОЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОПЕРАТОРОВ С УНИТАРНЫМ СПЕКТРОМ

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, R — совокупность всех линейных органических операторов, действующих в H, C — максимальная цепочка ортопроекторов*) в H.

В работе [2] выделен своими спектральными свойствами класс операторов $A(C)$ и доказана

Теорема 1. *Для того чтобы оператор $T \in R$ допускал треугольное представление вида $T = U(I + V)$, где V — вольтерров оператор с собственной максимальной цепочкой C, а U — унитарный оператор, определенный равенством $U = \int\limits_{(C)} e^{i\varphi(P)}\,dP$, в котором $\varphi(P)$ $(P \in C,\ P > 0,\ 0 \leqslant \varphi(P) \leqslant 2\pi)$ — неубывающая непрерывная слева функция, необходимо и достаточно, чтобы $T \in A(C)$ и оператор $I - T^*T$ был вполне непрерывным.*

Обозначим через $A_0(C)$ класс операторов $T \in A(C)$, удовлетворяющих следующему условию: если ортопроекторы P_1 и P_2 $(P_1 \in C$, $P_2 \in C$, $P_1 < P_2)$ разделяют спектр оператора T соответственно в точках $e^{i\alpha_1}$ $(0 < \alpha_1 < 2\pi)$ и $e^{i\alpha_2}$ $(0 < \alpha_2 < 2\pi)$, то $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ и $\sigma(T_{P_2 - P_1}) \subset e^{i[\alpha_1, \alpha_2]}$.

Справедлива теорема 2, формулировка которой получается из теоремы 1 заменой класса $A(C)$ на $A_0(C)$ и введением дополни-

*) Относительно терминологии и обозначений см. [1, 2].

тельного ограничения: 0 и 2π не являются изолированными точками множества значений функции $\varphi(P)$.

Доказательство теоремы 2. *Необходимость.* 1) Если ортопроектор $P\in C$ $(P<I)$ разделяет спектр оператора T в некоторой точке $e^{i\alpha}$ $(0<\alpha<2\pi)$, то $\varphi^+(P)>0$. Действительно, предположим, что $\varphi^+(P)=0$. Рассматривая отдельно случаи $0\in M_P=\{\varphi(Q)\mid Q\in C, Q>P\}$ и $0\notin M_P$ и учитывая, что точка 0 не является изолированной для множества значений функции $\varphi(P)$, найдем ортопроектор $P_0\in C$, для которого $P_0>P$ и $\varphi(P_0)\in(0, \alpha)$. Таким образом,

$$e^{i\varphi(P)}\in\overline{\{e^{i\varphi(Q)}\mid Q\in C,\quad P<Q\leqslant I\}}=\sigma(T_{I-P})\subset e^{i[\alpha,\,2\pi]},$$

что невозможно.

2) Если ортопроектор $P\in C$ $(P>0)$ разделяет спектр оператора T в некоторой точке $e^{i\alpha}$, то $\varphi(P)<2\pi$. В самом деле, предположим, что $\varphi(P)=2\pi$. Так как 2π не является изолированной точкой множества значений функции $\varphi(P)$, то существует ортопроектор $P_0\in C$ $(0<P_0<P)$ такой, что $\varphi(P_0)\in(\alpha,\ 2\pi)$, а это противоречит соотношению

$$e^{i\varphi(P_0)}\in\overline{\{e^{i\varphi(Q)}\mid Q\in C,\quad 0<Q\leqslant P\}}=$$
$$=\sigma(T_P)\subset e^{i[0,\,\alpha]}.$$

3) Пусть ортопроекторы P_1 и P_2 $(P_1\in C,\ P_2\in C,\ P_1<P_2)$ разделяют спектр оператора T соответственно в точках $e^{i\alpha_1}$ $(0<\alpha_1<2\pi)$ и $e^{i\alpha_2}$ $(0<\alpha_2<2\pi)$. Так как $\sigma(T_{P_2-P_1})=\overline{\{e^{i\varphi(Q)}\mid Q\in C,\ P_1<Q\leqslant P_2\}}\subset e^{i[\varphi^+(P_1),\ \varphi(P_2)]}$ и, как было показано выше, $\varphi^+(P_1)>0$, $\varphi(P_2)<2\pi$, то $1\notin\sigma(T_{P_2-P_1})$. Вместе с тем

$$\sigma(T_{P_2-P_1})\subset\sigma(T_{I-P_1})\cap\sigma(T_{P_2})\subset e^{i[\alpha_1,\,2\pi]}\cap e^{i[0,\,\alpha_2]},$$

так что $\alpha_1\leqslant\alpha_2$ и $\sigma(T_{P_2-P_1})\subset e^{i[\alpha_1,\,\alpha_2]}$.

Достаточность. 1) Применяя теорему 1, получим представление $T=U(I+V)$, в котором V — вольтерров оператор и $U=\int\limits_{(C)}e^{i\varphi(P)}\,dP$. Предположим, что 0 — изолированная точка множества M всех значений функции $\varphi(P)$. Тогда существует ортопроектор $P\in C$ $(P>0)$ такой, что $\varphi(P)=0$, и число α $(0<\alpha<2\pi)$ такое, что $M\cap(0,\ \alpha)=\varnothing$. Следовательно,

$$\sigma(T)=\overline{\{e^{i\varphi(Q)}\mid Q\in C,\quad 0<Q\leqslant I\}}\subset e^{i[\alpha,\,2\pi]},$$
$$\sigma(T_P)=\overline{\{e^{i\varphi(Q)}\mid Q\in C,\quad 0<Q\leqslant P\}}=\{1\}. \qquad (1)$$

Пусть $0<\beta<\gamma<\alpha$. Очевидно, ортопроекторы 0 и P разделяют спектр оператора T соответственно в точках $e^{i\beta}$ и $e^{i\gamma}$. Поэтому $\sigma(T_P)\subset e^{i[\beta,\,\gamma]}$, что противоречит соотношению (1).

2) Предположим, что 2π — изолированная точка множества M. Тогда существует ортопроектор $P\in C$ такой, что $\varphi(P)=2\pi$ и число

α $(0<\alpha<2\pi)$ такое, что $M \cap (\alpha, 2\pi) = \varnothing$. Следовательно, $\sigma(T) \subset e^{i[0, \alpha]}$ и в случае, когда $P < I$,

$$\sigma(T_{I-P}) = \overline{\{e^{i\varphi(Q)} \mid Q \in C, \quad P < Q \leqslant I\}}. \tag{2}$$

Пусть $\alpha < \beta < \gamma < 2\pi$. Так как P и I разделяют спектр оператора T соответственно в точках $e^{i\beta}$ и $e^{i\gamma}$, то $\sigma(T_{I-P}) \subset e^{i[\beta, \gamma]}$, что противоречит соотношению (2). Рассмотрим теперь случай, когда $\varphi(P)$ принимает значение 2π только при $P = I$. Поскольку функция $\varphi(P)$ непрерывна слева и $M \cap (\alpha, 2\pi) = \varnothing$, то I — правый конец разрыва (P, I) цепочки C. Снова

$$\sigma(T_{I-P}) = \overline{\{e^{i\varphi(Q)} \mid Q \in C, \quad P < Q \leqslant I\}} = e^{i\varphi(I)} = \{1\},$$

и рассуждения повторяются.

Имеет место более общая

Теорема 3. *Для того чтобы оператор $T \in R$ допускал треугольное представление $T = U(I+V)$, где $V (\in R)$ — оператор с максимальной собственной цепочкой C и диагональю вдоль нее, равной нулю, а U — унитарный оператор, определенный равенством $U = \int\limits_{(C)} e^{i\varphi(P)}\, dP$, в котором $\varphi(P)$ $(P \in C,\ P > 0,\ 0 \leqslant \varphi(P) \leqslant 2\pi)$ — неубывающая непрерывная слева функция такая, что 0 и 2π не являются изолированными точками множества значений функции $\varphi(P)$, необходимо и достаточно, чтобы $T \in A_0(C)$ и $\int\limits_{(C)} dP\,(I - PKP)^{-1} K dP = 0$ $(K = I - T^*T)$.*

Список литературы: 1. *Бродский В. М., Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Общие теоремы о треугольных представлениях линейных операторов и мультипликативных представлениях их характеристических функций.— Функцион. анализ и его прил., 1969, **3**, вып. 4, с. 1—27. 2. *Баранов Н. И. Бродский М. С.* Треугольные представления операторов с унитарным спектром.— Функцион. анализ и его прил., 1982, **16**, вып. 1, с. 58—59.

Поступила в редколлегию 17.01.83.