УДК 517.55 + 517

В. С. АЗАРИН, А. Л. РОНКИН

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ Б. ШИФФМАНА ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

1. Мероморфным называется отображение $f: \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{CP}^n$ вида $f = (f_0 : f_1 : \ldots f_n)$ (1.1), где f_j — мероморфные функции [1].

Приведенным (*reduced*) *представлением* для мероморфного отображения f называется голоморфное отображение $\tilde{f}: \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{C}^{n+1}$, $\tilde{f} = (\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)$ такое, что $f = (\tilde{f}_0 : \tilde{f}_1 : \ldots : \tilde{f}_n)$, и множество $z \in \boldsymbol{C}^m$, где f не определено, совпадает с $\tilde{f}^{-1}(0)$. Это наиболее экономное представление. Для него множество неопределенности имеет $\operatorname{codim} \geqslant 2$.

Заметим, что приведенное представление определено с точностью до умножения всех его компонент на одну и ту же целую функцию без нулей.

Обозначим для функции $\Psi(z)$, $z \in \boldsymbol{C}^m$,

$$M_r \Psi = \int_{S_1} \Psi(rz)\, d\sigma(z),$$

где $S_1 = \{z : |z| = 1\}$; $|z| = \left(\sum |z_j|^2\right)^{1/2}$.

Тогда характеристическая функция (неванлинновская характеристика) (см., например, [1; 2, с. 55]) $T(f, r)$ может быть определена равенством

$$T(f, r) \overset{\text{def}}{=} M_r \ln |\tilde{f}| - M_{r_0} \ln |\tilde{f}| = M_r \underset{\text{при } r \to \infty}{\ln} |\tilde{f}| + O(1).$$

Пусть D — дивизор в $\boldsymbol{CP}^n$ степени p, т. е. он задан уравнением $Q(w) = 0$, где $w = (w_0, \ldots, w_n)$; Q — однородный полином степени p. Тогда считающая функция D задается равенством

$$N(D, r) = M_r \ln |Q \circ \tilde{f}| - M_{r_0} \ln |Q \circ \tilde{f}|.$$

Неванлинновский дефект отображения (1.1) определен равенством

$$\delta(D) = \liminf_{r \to \infty} \left(1 - \frac{N(D, r)}{pT(f, r)}\right).$$

В работе Ш рассматривается класс $E_\lambda^n(\boldsymbol{C}^m)$ отображений, для которых компоненты приведенного представления имеют вид

$$\tilde{f}_j = \sum_{k=1}^{m_j} a_{kj} \exp(P_{kj}),$$

где P_{kj} — однородные полиномы степени $\lambda \geqslant 1$; $a_{kj} \not\equiv 0$ — мероморфные функции, для которых $T(r, a_{kj}) = o(r^\lambda)$. При этом P_{kj} могут вырождаться в постоянные все, за исключением какого-нибудь одного.

В [1] доказана следующая

Теорема Ш. *Пусть существует* λ *такое, что* $f \in E_\lambda^n(\boldsymbol{C}^m)$ *и* $D_1, \ldots, D_q$ — *различные дивизоры степени* p *в* $\boldsymbol{CP}^n$ *общего положения, т. е. каждая точка принадлежит* $\leqslant n+1$ *дивизору. Если* $f(\boldsymbol{C}^m)$ *не содержится ни в каком* $\operatorname{supp} D_j$, *то* при $r \to \infty$

$$(q-2n)\, pT(f, r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N(D_j, r) + o(T(f, r)). \tag{1.2}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(D_j) \leqslant 2n. \tag{1.3}$$

В работе [1] показано, что оценка (1.3) точна и достигается на отображении $f \in E_\lambda^n(\boldsymbol{C}^m)$, правда сильно вырожденном, что, впрочем, неудивительно, так как для невырожденных отображений есть лучшие оценки для суммы дефектов (см. [2, гл. 2]).

Напомним кратко основные этапы доказательства теоремы Ш, чтобы увидеть возникающие трудности.

Пусть $Q_j : \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{C}^{n+1}$, $j = \overline{1, q}$ — однородные многочлены, задающие дивизоры D_j.

Определим $g : \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{C}^q$ равенствами $g_j = Q_j \circ \tilde{f}$, $j = \overline{1, q}$ и рассмотрим отображение $H : \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{C}^N$, $N = \binom{n}{q}$, компоненты которого имеют вид

$$H_I = g_{i_1} \cdot g_{i_2} \cdots g_{i_n},\quad I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}. \tag{1.4}$$

Далее, используя метод Картана*, автор сводит доказательство (1.2) по существу к следующему утверждению.

---

* См., например, Гольдберг А. А. Некоторые вопросы теории распределения значений. Приложения.— В кн.: Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.— М., 1960, с. 263—300.

Лемма Ш. *Пусть* $u_I \overset{\text{def}}{=} \ln|H_I|$ *удовлетворяют соотношению*

$$M_r(\max_I u_I + \min_I u_I) \geqslant o(M_r \max_I u_I). \qquad (1.5)$$

Тогда выполняется (1.2).

Мы не будем повторять доказательства этой леммы, отослав читателя к оригиналу ([1, с. 634]).

В работе [1] высказано предположение (conjecture 3), что соотношение (1.5) выполняется для любых плюрисубгармонических функций. Однако это предположение неверно, как и другое (conjecture 2), что показывают примеры, изложенные в п. 3.

Этот факт побуждает нас подробнее проанализировать классы отображений f, для которых верно (1.5), и по возможности их расширить.

Это будет сделано далее. Мы также покажем, что класс $E_\lambda^n(C^m)$ нетривиально содержится в одном из наших классов.

2. Основные результаты. Для того чтобы сформулировать обобщение теоремы Ш, дадим необходимые определения.

Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в $R^{2m} = C^m$, имеющая нормальный тип при уточненном порядке $\rho(r)$. Это означает, что величина

$$\sigma_u = \limsup_{r\to\infty} \max_{|z|=r} u(z) r^{-\rho(r)}$$

удовлетворяет условию $0 < \sigma_u < \infty$.

Если $0 \leqslant \sigma_u < \infty$, то будем говорить, что $u(z)$ не выше нормального типа при уточненном порядке $\rho(r)$.

Эти определения, естественно, переносятся на целые функции φ: $C^m \to C$, если считать, что $u = \ln|\varphi|$.

Пусть $D'(C^m)$ пространство распределений Шварца, т. е. обобщенных функций над основным пространством $D(C^m)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций.

Для $u(z)$ — не выше нормального типа при уточненном порядке $\rho(r)$ — рассмотрим семейство $u_t(z) = u(zt)t^{-\rho(t)}$. Это семейство субгармонических функций компактно в D'-топологии, а именно, для любой последовательности $t_j \to \infty$ существует подпоследовательность t_j' и субгармоническая функция $v(z)$ такие, что $u_{t_j} \to v$ в $D'(C^m)$.

Множество таких v называется предельным множеством для u и обозначается $\mathrm{Fr}[u]$ (см. [3; 4, II]).

Если $\mathrm{Fr}[u]$ состоит из единственной функции $h(z, u)$, то u называется функцией вполне регулярного роста ($u \in U_{\mathrm{reg}}$), а

$$h(z, u) = \limsup_{z'\to z} \limsup_{t\to\infty} u_t(z'),$$

т. е. совпадает с индикатором $u(z)$.

Целая функция $\Psi: C^m \to C$ называется функцией вполне регулярного роста, если $u(z) = \ln|\Psi| \in U_{\text{reg}}$ *.

Пусть f — мероморфное отображение. Будем считать, что оно имеет конечный порядок, т. е. (см., например [2, с. 57])

$$\rho_f \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{r\to\infty} \ln T(f, r)/\ln r < \infty.$$

Можно показать, что в этом случае существует такое приведенное представление, что порядок максимально растущей компоненты равен ρ_f.

Будем подбирать уточненный порядок $\rho(r)$ для f так, чтобы все проекции $\tilde{f}_j$ указанного приведенного представления имели не более чем нормальный тип при этом уточненном порядке и хотя бы одна компонента имела нормальный (конечный) тип.

Это всегда возможно (см., например [5, с. 70]).

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь описанное выше приведенное представление $\tilde{f}$.

Если все компоненты $\tilde{f}_j$ приведенного представления $\tilde{f}$ являются функциями вполне регулярного роста, то будем обозначать это так: $f \in A^n_{\text{reg}}$.

Пусть $\tilde{f}: C^m \to C^{n+1}$ — приведенное представление f. Рассмотрим семейство отображений

$$u_t = ((\ln|\tilde{f}_0|)_t, \ \dots, \ (\ln|\tilde{f}_n|)_t). \tag{2.1}$$

Это семейство компактно в топологии покоординатной сходимости в $D'(C^m)$ при $t \to \infty$, т. е. для любой последовательности $t_j \to \infty$ найдется подпоследовательность $t'_j \to \infty$ и вектор $v = (v_0, v_1, \dots$ $\dots, v_n): C^m \to R^{n+1}$, состоящий из плюрисубгармонических функций v_k такой, что $u_{t'_j} \to v$ в $D'(C^m)$ покоординатно. Множество таких v будем называть предельным для f и обозначать $\operatorname{Fr}[f]$.

Обозначим через P_α класс плюрисубгармонических функций w, удовлетворяющих соотношению $w(ze^{i\alpha}) + w(z) \geqslant 0$, $\forall z \in C^m$ (2.2). Будем рассматривать отображения f, для которых выполняется

Условие 1. Существует α такое, что для всех $v \in \operatorname{Fr}[f]$, $v_k \in P_\alpha$ при всех $k = \overline{0, n}$.

Заметим, что отображения $v \in \operatorname{Fr}[f]$ удовлетворяют условию $v(0) = 0$ $(\rho > 0)$ [4, с. 149], поэтому

$$\int_0^{2\pi} v_k(ze^{i\varphi})\,d\varphi \geqslant 0.$$

* Это определение эквивалентно одному из общепринятых (см. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.— М.: Гостехиздат, 1956.— 632 с.; Агранович П. З., Ронкин Л. И. О функциях вполне регулярного роста, препринт ФТИНТ АН УССР, 30—77, Х., 1977.— 58 с.).

Таким образом, для каждого z найдется $\alpha = \alpha(z, v_k)$, для которого выполняется (2.2). Мы же требуем, чтобы такое α не зависело от z, k и $v \in \mathrm{Fr}[f]$.

Отметим несколько классов f, для которых условие (2.2) выполняется:

a) $\mathrm{Fr}[f]$ состоит из векторов v, все компоненты которых v_k неотрицательны ($\alpha = 0$);

b) $\mathrm{Fr}[f]$ состоит из v, удовлетворяющих условию: все v_k выпуклы на каждой вещественной прямой, проходящей через начало координат ($\alpha = \pi$);

c) $\mathrm{Fr}[f]$ состоит из положительно однородных плюрисубгармонических функций порядка $\rho > 0$ (индикаторов) $\left(\alpha = \frac{\pi}{\rho}\right.$; см. [6, с. 292]).

Рассмотренный выше случай $f \in A^n_{\mathrm{reg}}$ нетривиально содержится в c) (см., например, [3, теорема 3.1.1]).

Предложение 1. *Класс P_α инвариантен относительно сложения, умножения на положительную постоянную. Если $v^j \in P_\alpha$ $j = \overline{1, M}$, то $V \overset{\mathrm{def}}{=} \max\limits_j v^j \in P_\alpha$ и*

$$M_r(\max_j v^j + \min_j v^j) \geqslant 0. \tag{2.3}$$

Доказательство этого предложения приведено в п. 4.

Пусть $\{\alpha^j\}$, $j = \overline{1, M}$ — конечное множество, $\alpha^j \in \mathbf{R}$. Обозначим через $\alpha^{*1}, \alpha^{*2}, \ldots, \alpha^{*M}$ его перестановку в порядке убывания. Здесь $*j$ — индекс j-го элемента в порядке убывания. Вообще переход от любого множества к его перестановке мы будем обозначать заменой индекса (мультииндекса) на индекс со $*$, рассматривая $*$ как операцию над индексами, ставящую в соответствие индексу j индекс или мультииндекс того элемента, который в перестановке стоит на j-м месте. Если же таковых несколько, то берем любой из них.

Тогда

$$\alpha^{*1} = \max\{\alpha^i : i = \overline{1, M}\}, \quad \alpha^{*M} = \min\{\alpha^i : i = \overline{1, M}\}.$$

Пусть Q — полином, задающий дивизор D степени p:

$$Q = \sum_{\|k\| = p} a_k w^k,$$

где k — мультииндекс; $k = (k_0, \ldots, k_n)$; $\|k\| = k_0 + k_1 + \ldots$ $\ldots + k_n$; $w^k = w_0^{k_0} \times w_1^{k_1} \times \cdots w_n^{k_n}$. Обозначим для $v \in \mathbf{R}^{n+1}$ $k \cdot v = k_0 v_0 + \cdots + k_n v_n$ — скалярное произведение.

Пусть $K(Q)$ — множество мультииндексов полинома Q, а для $v : \mathbf{C}^m \to \mathbf{R}^{n+1}$ обозначим через $(*1)_Q \cdot v(z)$, $(*2)_Q \cdot v(z)$ — первые два члена перестановки множества $\{k \cdot v(z) : k \in K(Q)\}$ в порядке убывания.

Будем говорить, что отображение f имеет главный член в дивизоре D, если $\forall v_f \in \mathrm{Fr}\,[f]$ множество

$$\{z : (*1)_Q \cdot v_f(z) = (*2)_Q \cdot v_f(z)\} \tag{2.4}$$

имеет нулевую $2m$-меру.

В частности, если $f \in A^n_{\mathrm{reg}}$, то условие (2.4) относится к одному отображению $v(z) = (h(z, \tilde{f}_0);\ h(z, \tilde{f}_1), \ldots, h(z, \tilde{f}_n))$. Пусть $D_1, \ldots, D_q$ — заданные дивизоры. Сделаем относительно f следующее предположение.

Условие 2. f имеет главный член в каждом из дивизоров D_1, $D_2 \ldots D_q$.

Пусть $(Q_1, \ldots, Q_q) = \boldsymbol{Q}$ — вектор, составленный из полиномов, задающих дивизоры $D_1, \ldots, D_q$. Обозначим $\varkappa(\boldsymbol{Q}) : \boldsymbol{R}^{n+1} \to \boldsymbol{R}^q$ операцию, задаваемую равенствами для $v \in \boldsymbol{R}^{n+1}$:

$$(\varkappa(\boldsymbol{Q})\, v)_j = \max\{k \cdot v : k \in K(Q_j)\} = (*1)_{Q_j} \cdot v.$$

Заметим, что если $v : \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ состоит из плюрисубгармонических функций, то $\varkappa(\boldsymbol{Q})\, v : \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{R}^q$ обладает тем же свойством.

Пусть отображение $g = \boldsymbol{Q}\,\tilde{f} : \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{C}^q$ задано формулами $g_j = Q_j \circ \tilde{f}$ (2.5). Роль условия 2 в рассматриваемом вопросе иллюстрирует

Предложение 2. *Пусть $D_1, \ldots, D_q$ — дивизоры степени p, заданные полиномами $Q_1, \ldots, Q_q$. Если f удовлетворяет условию 2 и $f(\boldsymbol{C}^m) \not\subset \operatorname{supp} D_j$, $j = \overline{1, q}$, то* $\mathrm{Fr}\,[g] = \{v_g = \varkappa(\boldsymbol{Q})\, v_f : v_f \in \mathrm{Fr}\,[f]\}$ (2.6). Эта формула описывает все предельное множество для g. Без условия 2, как видно из доказательства, приведенного в п. 4, функции $(\varkappa(\boldsymbol{Q})\, V_f)_j$ мажорируют, вообще говоря, компоненты $v_g \in \mathrm{Fr}\,[g]$.

Обозначим для голоморфного отображения $g : \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{C}^q$ —

$$\bar{\sigma}_g = \limsup_{r \to \infty} T(g, r)\, r^{-\rho(r)}; \quad \underline{\sigma}_g = \liminf_{r \to \infty} T(g, r)\, r^{-\rho(r)}$$

— верхний и нижний типы при уточненном порядке $\rho(r)$.

Предложение 3. *Верны формулы*

$$\bar{\sigma}_g = \max\{M_1 \max_j (v_g)_j : v_g \in \mathrm{Fr}\,[g]\};$$
$$\underline{\sigma}_g = \min\{M_1 \max_j (v_g)_j : v_g \in \mathrm{Fr}\,[g]\}. \tag{2.7}$$

На $g : \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{C}^q$ мы будем накладывать также следующее ограничение.

Условие 3. Верны утверждения а) $0 < \underline{\sigma}_g,\ \bar{\sigma}_g < \infty$; б) *для g выполняется условие 1.*

Предложение 4. *Если отображение $f : \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{CP}^n$ удовлетворяет условиям 1 и 2, то отображение $g = \boldsymbol{Q}\,\tilde{f}$, определенное формулами (2.5), удовлетворяет условию 3.*

Предложение 5. *Если отображение* $f \in E^n_\lambda(\boldsymbol{C}^m)$, *то* $g = \boldsymbol{Q}\tilde{f}$ *удовлетворяет условию 3.*

Сформулируем теперь основной результат нашей работы.

Теорема 1*. *Пусть* D_j, $j = \overline{1, q}$ — *набор дивизоров из теоремы Ш.* Q_j — *однородные полиномы степени* p, *задающие* D_j. *Если* $g = \boldsymbol{Q}\tilde{f}$ *удовлетворяет условию 3,* $f(\boldsymbol{C}^m) \not\subset \operatorname{supp} D_j$, $j = \overline{1, q}$, *тогда отображение* $H : \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{C}^N$, *определенное равенством (1.4), удовлетворяет соотношению (1.5) леммы Ш.*

Доказательство приведено в п. 6.

Следствие. *Пусть система дивизоров* D_j, $j = \overline{1, q}$ *удовлетворяет условиям теоремы Ш, а* $f : \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{CP}^n$ *таково, что* $f(\boldsymbol{C}^m) \not\subset \operatorname{supp} D_j$, $j = \overline{1, q}$ *и* f *удовлетворяет условиям 1 и 2. Тогда верно утверждение теоремы Ш.*

Это утверждение следует из предложения 4 и теоремы I.

Теорема Ш является следствием теоремы I и предложения 5.

3. Здесь мы построим контрпримеры к некоторым гипотезам, высказанным в [1].

Предположение 3. *Пусть* $u_0, \ldots, u_n$ — *непостоянные плюрисубгармонические функции в* $\boldsymbol{C}^m$. *Тогда*

$$M_r(\max_j u_j + \min_j u_j) \gg o(M_r \max_j u_j)$$

для $r \to \infty$ *вне множества* E *конечной лебеговой меры.*

Приведем опровергающий пример для $m = 1$, $n = 3$. Его можно распространить и на общий случай. Используем следующий результат А. Э. Еременко — М. Л. Содина [8].

Теорема Е. — С. *Пусть* P_l — *последовательность полиномов, удовлетворяющих условиям* $P_l(0) = 1$, $P_l(z) \neq 0$ *при* $|z| \leqslant 1$ *и* η_l — *последовательность чисел, больших 1. Тогда для любого* $\rho > 0$ *найдется такая целая функция* $F(z)$ *и такие последовательности* $T_l \to \infty$, $g_l \to \infty$, *что*

$$\lim_{l \to \infty} \sup_{\substack{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ 1 \leqslant r \leqslant \eta_l}} \left| \frac{\ln|F(T_l r e^{i\theta})|}{g_l} - \ln|P_l(r e^{i\theta})| \right| = 0.$$

Пусть $\varphi(\theta)$ — любая непрерывная функция на единичной окружности такая, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta = 0.$$

Для заданного $\varepsilon\,(0 < \varepsilon < 1/7)$ найдем многочлен $P(z)$ такой, что $P(0) = 1$, $P(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1$ и

$$\max_\theta |\ln|P(r e^{i\theta})| - \varphi(\theta)| < /\varepsilon 4.$$

* В работе [7] формулировка аналогичной теоремы содержит существенную неточность, она исправлена в этой формулировке.

Тогда для некоторого $\delta > 0$ выполняется неравенство
$\max\{|\ln|P(r e^{i\theta})| - \varphi(\theta)| : 1 \leqslant r \leqslant 1 + \delta,\ \theta \in [0,\ 2\pi]\} < \varepsilon/2$.

Применяем теорему Е.— С., полагая $P_l(z) = P(z)$; $\eta_l > 1 + \delta$. Получим функцию $F(z)$, которая на последовательности T_l, $q_l \to \infty$ удовлетворяет при достаточно больших l условию $\max\{|\ln|F(z)| - q_l \varphi(\arg z)| : T_l \leqslant |z| \leqslant (1+\delta) T_l\} < \varepsilon q_l\}$ (3.1). Полагаем теперь

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} -1 \text{ при } \theta \in \left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]; \\ \frac{72\theta}{7\pi} - \frac{31}{7} \text{ при } \theta \in \left]\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right]; \\ \frac{5}{7} \text{ при } \theta \in \left]\frac{\pi}{2},\ \pi\right]; \\ \varphi(2\pi - \theta) \text{ при } \theta \in]\pi,\ 2\pi] \end{cases}$$

и рассмотрим функции $f_k(z) = F(z e^{ik\frac{\pi}{2}})$, $k = \overline{0;\ 3}$. Легко проверить, что для $u_k(z) = \ln|f_k(z)|$ выполняются при всех θ и $r \in [T_l,\ (1+\delta) T_l]$ соотношения

$$\left(\frac{5}{7} - \varepsilon\right) q_l \leqslant \max_k u_k(r e^{i\theta}) \leqslant \left(\frac{5}{7} + \varepsilon\right) q_l;$$
$$\min_k u_k(r e^{i\theta}) \leqslant (-1 + \varepsilon) q_l. \tag{3.2}$$

Поэтому

$$M_r(\max_k u_k + \min_k u_k) \leqslant \left(-\frac{2}{7} + 2\varepsilon\right) q_l \leqslant c\, M_r \max_k u_k, \tag{3.3}$$

где $c = \dfrac{2 - 14\varepsilon}{5 + 7\varepsilon}$.

Это неравенство опровергает предположение 3, так как множество, на котором оно выполняется, имеет положительную относительную меру и тем более бесконечную лебегову меру.

Предположение 2. *Пусть* $h : \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{CP}^n$ *— мероморфное отображение такое, что* $h(\boldsymbol{C}^m) \not\subset A_j$, $j = \overline{0,\ n}$, *где* A_j *— координатные гиперплоскости в* $\boldsymbol{CP}^n$; $\tau : (w_0 : w_1 : \ldots : w_n) \to (w_0^{-1} : w_1^{-1} : \ldots \ldots w_n^{-1})$ *— бирациональное отображение* $\boldsymbol{CP}^n \to \boldsymbol{CP}^n$.

Тогда

$$T(\tau \circ h,\ r) \leqslant T(r,\ h) + \sum N_h(A_j,\ r) + S(r), \tag{3.4}$$

где $S(r) = 0(\ln r)$ *для функций конечного порядка.*

Чтобы иметь опровергающий пример при $m = 1$, $n = 3$, рассмотрим отображение $h : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{CP}^3$ —

$$h = (f_0(z) : f_1(z e^{i\varepsilon_1}) : f_2(z e^{i\varepsilon_2}) : f_3(z e^{i\varepsilon_3})),$$

где $f_k(z)$ — уже построенные выше функции; ε_k выберем малыми и такими, что компоненты h не имеют общих нулей, а неравенства (3.2) еще выполняются.

Имеем тогда

$$N_h(A_j,\ r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f_j(r\,e^{i\varphi})|\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|F(r\,e^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

На последовательности $r_l=T_l(1+\delta)$ имеем по (3.1):

$$N_h(A_j,\ T_l(1+\delta))=\frac{1}{2\pi}q_l\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,d\theta+O(\varepsilon)\,q_l=O(\varepsilon)\,q_l,$$

так как интеграл равен нулю. Вычисляем

$$T(h,\ r)=M_r\max_k u_k+O(1),\ r\to\infty;$$
$$T(\tau\circ h,\ r)\geqslant-M_r\min u_k+O(1),\ r\to\infty.$$

На множестве $r\in[T_l,\ (1+\delta)\,T_l]$ имеем по (3.3):

$$T(h,\ r)-T(\tau\circ h,\ r)+\sum_j N_h(A_j,\ r)\leqslant(-c+O(\varepsilon))\,T(h,\ r),$$

что противоречит (3.4) при малом ε.

4. Доказательство предложений 1—5.

Инвариантность относительно сложения и умножения на положительную постоянную очевидна.

Пусть v^j, $j=\overline{1,\ M}$ удовлетворяют условию (2.2). Выберем индекс $j=j_{\max}$, на котором достигается max в равенстве $V=\max v^j$. Имеем $v^{j_{\max}}(z\,e^{i\alpha})+V(z)\geqslant 0$, откуда, так как $v^{j_{\max}}\leqslant V\ \forall z$, $V(z\,e^{i\alpha})+V(z)\geqslant 0$.

Докажем (2.3). Выберем $j=j_{\min}$, для которого достигается min в $\min v^j(z)$. Имеем тогда

$$\max_j v^j(z\,e^{i\alpha})+\min_j v^j(z)\geqslant v^{j_{\min}}(z\,e^{i\alpha})+\min_j v^j(z)\geqslant 0.$$

Интегрируем это неравенство по сфере $|z|=r$. Тогда получим

$$M_r(\max_j v^j(z\,e^{i\alpha})+\min_j v^j(z))\geqslant 0.$$

Так как интегрирование по сфере инвариантно относительно преобразования $z\to z\,e^{i\alpha}$, отсюда получаем (2.3).

Пусть $\alpha^{*1},\ \ldots,\ \alpha^{*M}$ перестановка чисел $\alpha^1,\ \ldots,\ \alpha^M$ в убывающем порядке. Напомним, что $\varlimsup\limits_{l\to\infty}E_l=\bigcap\limits_{l=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=l}^{\infty}E_k$.

Лемма 4.1 *Пусть $u_l^j\to v^j$, $j=\overline{1,\ M}$, $l\to\infty$ на множестве E. Обозначим*

$$E_{\varepsilon,l}=\{z:u_l^{*1}-u_l^{*2}\leqslant\varepsilon\};\ E_\varepsilon=\{z:v^{*1}-v^{*2}\leqslant\varepsilon\}.$$

Тогда $u_l^{*j} \to v^{*j}$, $l \to \infty$, $j = \overline{1, M}$, $z \in E$ **(4.1)**; $\forall \varepsilon > 0$ $\lim\limits_{l\to\infty} E_{\varepsilon/2}$, $l \cap E \subset E_\varepsilon \cap E$ **(4.2)**.

Доказательство опускаем.

Лемма 4.2. *Пусть* $u_l^j \to v^j$, $l \to \infty$, $j = \overline{1, M}$ — *сходящиеся в* $D'(\mathbf{C}^m)$ *последовательности субгармонических функций. Тогда*

$$u_{l_k}^{*j} \to v^{*j} \quad \text{в } D'(\mathbf{C}^m) \tag{4.3}$$

для некоторой подпоследовательности l_k, *в частности,*

$$\max_j u_{l_k}^j \to \max_j v^j; \quad \min_j u_{l_k}^j \to \min_j v^j.$$

Доказательство. Из условий леммы следует, что $u_l^j \to v^j$ по мере (на самом деле имеет место более сильная сходимость, см. [3, теорема 4, 4.1; 4, теорема 2.7.4.1) и $|u_l^j|$ мажорируются суммируемой функцией. Выберем подпоследовательность, сходящуюся почти всюду. Тогда вне множества нулевой меры для этой подпоследовательности имеем по лемме 4.1 соотношения (4.1). Из (4.1) следует сходимость в D' этой подпоследовательности.

Доказательство предложения 2. Напомним, что $g_j = Q_j \circ \tilde{f}$ и дальнейшие рассуждения будем проводить для любого из g_j, опуская индекс j.

Пусть $g = Q \circ \tilde{f}$ и $(\ln|g|)_{t_l} \xrightarrow{D'} v_g \in \mathrm{Fr}\,[g]$, $t_l \to \infty$. Напомним, что $u_t(z) = ((\ln|\tilde{f}_0|)_t, \ldots, (\ln|\tilde{f}_n|)_t)$. Можно считать, что t_l выбрано так, что $u_{t_l} \to v_f \in \mathrm{Fr}\,[f]$.

Пусть $(*1)_Q$ и $(*2)_Q$ — мультииндексы, соответствующие первым двум членам перестановки множества $\{k \cdot v_f : k \in K(Q)\}$ в убывающем порядке, т. е. $(*1)_Q \cdot v_f(z) = \max\{k \cdot v_f(z) : k \in K(Q)\}$. Запишем g в виде

$$g(z) = a_{(*1)_Q} \exp (*1)_Q\, u(z) + \sum{}' a_k \tilde{f}^k,$$

где в $\sum{}'$ суммирование ведется по всем мультииндексам, кроме $k = (*1)_Q$.

Далее имеем

$$(\ln|g|)_{t_l} = (*1)_Q \cdot u_{t_l}(z) + (\ln|1 + \gamma|)_{t_l} + o(1), \ t_l \to \infty,$$

где $\gamma = \left(\sum{}' a_k \tilde{f}^k\right)/a_{(*1)_Q} \tilde{f}^{(*1)_Q}$. Будем для краткости опускать индекс l в t_l.

Обозначим

$$E_\varepsilon = \{z : (*1)_Q \cdot v_f(z) - (*2)_Q \cdot v_f(z) < \varepsilon\}; \ \varepsilon > 0$$
$$E_{\varepsilon,t} = \{z : (*1)_Q \cdot u_t(z) - (*2)_Q v_f(z) < \varepsilon\}.$$

Пусть $z \notin E_{\varepsilon,t}$. Тогда имеем

$$|\gamma|(z) \leqslant N(Q) \max_k |a_k| e^{(*2)_Q \cdot u(z)} / a_{(*1)_Q} e^{(*1)_Q \cdot u(z)},$$

где $N(Q)$ — число мономов в Q.

Получаем $(\ln|\gamma|)_t(z) \leqslant (*2)_Q \cdot u_t(z) - (*1)_Q \cdot u_t(z) + o(1)$, $t \to \infty$ (4.4). Из (4.4) и определения $E_{\varepsilon,t}$ следует $(\ln|\gamma|)_t(z) \leqslant -\varepsilon$, $z \notin E_{\varepsilon,t}$ и, значит, $|\gamma|(zt) \to 0$, $(\ln|1+\gamma|)(zt) \to 0$ равномерно по z при $z \notin E_{\varepsilon,t}$.

Поэтому для $z \in E_{\varepsilon,t}$ имеем

$$(\ln|g|)_t(z) = (*1)_Q \cdot u_t(z) + o(1), \quad t \to \infty. \tag{4.5}$$

Для $z \in E_{\varepsilon,t}$ (собственно, для всех z)

$$(\ln|g|)_t(z) \leqslant (*1)_Q \cdot u_t(z) + o(1). \tag{4.6}$$

Пусть теперь $\Psi(z)$ бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем. Имеем

$$\int (\ln|g|)_t \Psi\, d\omega = \int\limits_{C^m \setminus E_{\varepsilon,t}} + \int\limits_{E_{\varepsilon,t}}. \tag{4.7}$$

Так как $(*1)_Q \cdot u_t(z)$ — субгармоническая функция, равномерно по z ограниченная сверху на каждом компакте, ее модуль имеет суммируемую мажоранту $\Phi(z) = A + B|\ln|z||$ на каждом компакте с A и B, не зависящими от t, для $m = 1$ и $= A + B|z|^{-2m+2}$, для $m > 1$.

Для второго интеграла имеем из (4.7)

$$\left|\int\limits_{E_{\varepsilon,t}} (\ln|g|)_t \Psi\, d\omega\right| \leqslant \int\limits_{E_{\varepsilon,t}} |(*1)_Q \cdot u_t|(z)\, d\omega \leqslant \int\limits_{E_{\varepsilon,t}} \Phi\, d\omega. \tag{4.8}$$

Таким образом, из (4.7), (4.6) и (4.8) получаем

$$\int (\ln|g|)_t \Psi\, d\omega = \int (*1)_Q \cdot u_t \Psi\, d\omega + I_t, \tag{4.9}$$

где I_t имеет оценку

$$|I_t| \leqslant \int\limits_{E_{\varepsilon,t}} \Phi\, d\omega. \tag{4.10}$$

Переходим к пределу по подпоследовательности $t_{l_k} \to \infty$, выбранной по лемме 2, затем — при $\varepsilon \downarrow 0$. Тогда, используя (4.2), имеем

$$\lim_{t_{l_k} \to \infty} |I_{t_{l_k}}| \leqslant \int\limits_{E_0} \Phi\, d\omega = 0,$$

так как $\operatorname{mes} E_0 = 0$ по условию 2.

Используя (4.3), получаем, что $(\ln|g|)_{t_{l_k}} \xrightarrow{D'} (*1)_Q \cdot v_t$, что и требовалось доказать.

Доказательство предложения 3. Полагаем $u_j = \ln|g_j|$, $j=\overline{1, q}$. Пусть $(u_j)_{t_l} \to (v_g)_j$, $v_g \in \mathrm{Fr}\,[g]$.

По лемме 4.2 $\max\limits_j (u_j)_{t_l} \to \max\limits_j (v_g)_j$ в D'. Из сходимости последовательности субгармонических функций в $D'(C^m)$ следует сходимость в $D'(S_r)$ для любого r (1, с. 57; 6].

Запишем $T(g, t)\,t^{-\rho(t)}$ в виде

$$T(g, t)\,t^{-\rho(t)} = M_1 \max_j (u_j)_t + o(1).$$

Переходя к пределу по соответствующим последовательностям $t_l \to \infty$, получаем соотношения (2.7).

При доказательстве предложения 4 будет использована

Лемма 4.3. *Если $v^j(0)=0$, v^j, $j=\overline{1, M}$ — субгармонические при $|z|<1$ и $v=\max v^j$ — гармоническая функция, то v^j — гармонические и $v^j \equiv v$.* Лемма следует из принципа максимума.

Доказательство предложения 4. Условие б) следует из предложений 1 и 2. Условие $\bar\sigma < \infty$ очевидно из неравенства

$$(v_g)_j \leqslant p \max_\nu (v_f)_\nu, \quad p = \deg Q_j$$

и предложения 3.

Докажем, что $\underline{\sigma} > 0$. Если $\underline{\sigma}_g = 0$, то $\exists v_g \in \mathrm{Fr}\,[g]$, для которой

$$M_1 \max_k (v_g)_k = 0.$$

Тогда $\max\limits_k (v_g)_k$ — гармоническая *) функция в $|z|<1$. По лемме 4.3 все $(v_g)_k$ — одинаковые гармонические. Так как по предложению 2 $(v_g)_j = \max\{k\cdot v_f : k \in K(Q)\}$, то все $k\cdot v_f$ тождественно равны, а это противоречит условию 2. Предложение 4 доказано.

Доказательство предложения 5. Если $f \in E^n_\lambda(C^m)$, то $g_j \in E^1_{\rho\lambda}(C^m)$. Поэтому достаточно доказать, что $E^1_{\rho\lambda}(C^m) \subset A_{\mathrm{reg}}(C^m)$.

Рассмотрим многочлен первой степени

$$Q_1 = \sum_j w_j,$$

определяющий линейный дивизор D_1 и голоморфное отображение $\varphi = (\psi_1 e^{P_1(z)}, \ldots, \psi_N e^{P_N(z)})$, где P_k — однородные многочлены степени $\rho\lambda$; ψ_k — мероморфные функции; $T(r, \psi_k) = o(r^{\rho\lambda})$, $P_k \not\equiv P_j$ для $k \neq j$ **(4.11)**. Каждая из компонент $\varphi_k \in A_{\mathrm{reg}}$, причем $h(z, \varphi_k) = \mathrm{Re}\,P_k$.

Таким образом,

$$\mathrm{Fr}\,[\varphi] = (h(z, \varphi_1), \ldots, h(z, \varphi_N)) \overset{\mathrm{def}}{=} h(z, \varphi).$$

*) Гармонические функции из Fr полностью описаны в работе [4, лемма 1.3.2], см. также [6, теорема 3.1.4.4].

Покажем, что φ имеет главный член в D_1. Функции $\operatorname{Re} P_k$ — многочлены в R^{2m}. Множество, где они попарно равны, имеет размерность не выше, чем $2m-1$ и, значит, нулевую меру в R^{2m}. В противном случае многочлены тождественно равны.

Значит, равенство $(*1)_Q \cdot h(z, \varphi) = (*2)_Q \cdot h(z, \varphi)$ на множестве положительной меры противоречит условию (4.11).

5. Здесь будет доказана теорема 1.

Лемма 5.1. *Пусть $q \geqslant n+1$. Тогда система из C^n_{q+1} линейных уравнений вида $\gamma = w_{i_1} + w_{i_2} + \cdots + w_{i_n}$, где $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ пробегает все n-элементные подмножества множества $\{0, 1, \ldots, q\}$, имеет единственное решение: $w_\nu = \gamma/n \forall \nu$.*

Доказательство опускаем. Напомним, что H определено в (1.4).

Лемма 5.2. *Верно соотношение $\underline{\sigma}_H > 0$.*

Доказательство. Пусть $\underline{\sigma}_H = 0$. Из предложения 3 имеем

$$M_1(\max_I (v_H)_I) = 0, \quad \forall v_H \in \operatorname{Fr}[H],$$

т. е. $\max\limits_I (v_H)_I$ гармоническая при $|z| < 1$. Так как $(v_H)_I(0) = 0$, то по лемме 4.3 все $(v_H)_I$ — гармонические и тождественно равны друг другу. Используем теперь следующее свойство Fr [3, теорема 1.1.3; 4, II, теорема 3.1.2.3]:

$$\operatorname{Fr}[f_1 \cdot f_2] \subset \{v = v_1 + v_2 : v_1 \in \operatorname{Fr}[f_1], \quad v_2 \in \operatorname{Fr}[f_2]\}.$$

По этому свойству

$$\operatorname{Fr}[H] \subset \{v : v_I = \sum_{\nu \in I} (v_g)_\nu, \quad I = \{i_1, \ldots, i_n\}. \tag{5.1}$$

По лемме 5.1 так как все v_I совпадают, то все $(v_g)_\nu$ совпадают и гармонические, а так как

$$(v_g)_\nu = \max\{k \cdot v_f : k \in K(Q_\nu), \quad v_f \in \operatorname{Fr}[f]\}, \tag{5.1}$$

то по лемме 4.3 все $k \cdot v_f$ совпадают, что противоречит условию 2.

Переходим к доказательству теоремы 1. Покажем сначала, что

$$M_r(\max_I (u_H)_I + \min_I (u_H)_I) \geqslant o(r^{\rho(r)}). \tag{5.2}$$

Допустим противное. Тогда существует последовательность $r_j = t_j \to \infty$, для которой $M_{r_j}(\cdots) \leqslant -c r_j^{\rho(r_j)}$, $c > 0$, что можно переписать в виде

$$M_1(\max_I ((u_H)_I)_{t_j} + \min_I ((u_H)_I)_{t_j}) \leqslant -c.$$

Переходим к пределу при $t_j \to \infty$ по лемме 4.2. Получаем

$$M_1(\max_I (v_H)_I + \min_I (v_H)_I) \leqslant -c.$$

Но из предложения I и формулы (5.1) следует, что должно выполняться противоречащее неравенство, что и доказывает (5.2). Из $\underline{\sigma}_H > 0$ следует, что $r^{\rho(r)} = O(T(H, r))$ и, значит, в левой части (5.2) можно заменить $r^{\rho(r)}$ на $T(H, r)$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Shiffman B.* On Holomorfic and Meromorphic Maps Projective Space.— Indiana University, Math. I. vol. 28, № 4, 1979, p. 627—641. 2. *Шабат Б. В.* Распределение значений голоморфных отображений.— М.: Наука, 1982.—288 с. 3. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка.— Мат. сб., 1979, 108(150), № 2, с. 147—167. 4. *Азарин В. С.* Теория роста субгармонических функций I, II. X., ХГУ, 1978, 1982.— 46 с. 5. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.— 235 с. 6. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных.— М.: Наука, 1971.— 115 с. 7. *Ронкин А. Л.* Обобщение теоремы Б. Шиффмана о мероморфных отображениях в проективное пространство. — Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 19.07.83, № 775 — 83. Деп. 35 с. 8. *Еременко А. Э. Содин М. Л.* О поведении целой функции на последовательности концентрических окружностей.— В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах. К., 1983, с. 11—15.

Поступила в редколлегию 25.04.83.