УДК 517.5

М. Н. ШЕРЕМЕТА

# О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ЧАСТНЫХ СУММ ЦЕЛОГО РЯДА ДИРИХЛЕ

Для характеристики скорости стремления частных сумм $S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ степенного разложения целой функции $f$ с неотрицательными коэффициентами $a_k$, $a_0 = 1$, вводится величина $\left\| \frac{1}{f} - \frac{1}{S_n} \right\|_{L_\infty[0,\infty)}$. Оценкам этой величины посвящены работы [1]—[3]. Для целых функций $F$, заданных абсолютно сходящимися в $C$ рядами Дирихле $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{z\lambda_k}$; $a_0 = 1$; $a_k > 0\ (k \geqslant 1)$ (1), с показателями $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k \to \infty\ (k \to \infty)$, аналогичная задача не изучалась, если не считать теоремы 45 из [1], где рассмотрена конкретная функция $F$ с показателями, удовлетворяющими условию $\lambda_k = 0(\lambda_{k+1})\ (k \to \infty)$, и коэффициентами $a_k = \exp\{-\lambda_k^2\}$. В настоящей статье будет доказана достаточно общая теорема, дающая для всех $n \geqslant n_0$ оценку сверху величины

$$\sigma_n(F) = \left\| \frac{1}{F} - \frac{1}{S_n} \right\|_{L_\infty[0,\infty)}, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{x\lambda_k}.$$

Кроме того, используя результаты, получаемые методом Вимана—Валирона, будут даны оценки $\sigma_n(F)$ сверху на некоторой последовательности индексов. Отметим, что метод Вимана—Валирона к вопросу рациональной аппроксимации целых функций ранее не применялся.

1°. Оценки $\sigma_n(F)$ для всех $n \geqslant n_0$. Через $F^*$ будем обозначать функцию, обратную к $F$, и пусть $\alpha$ — произвольная положительная на $[0, \infty)$ функция.

**Теорема 1.** *Если при любом* $\delta > 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta\lambda_k} < +\infty, \tag{2}$$

*а функция* $\alpha$ *такая, что* $\beta_n = \exp\{-\lambda_n \alpha(\lambda_n)\} \to 0\ (n \to \infty)$ (3) *и* $\gamma_n = F^*(1/\beta_n) - \alpha(\lambda_n) > 0\ (n \geqslant n_0)$ (4), *то* $\sigma_n(F) \leqslant \{F(\gamma_n) - 1\}^{-1}$ $(n \geqslant n_0)$ (5).

Доказательство. В силу выпуклости $\ln F(x)$, функция $F(x+\delta)/F(x)$ возрастает на $[0, \infty)$ при любом $\delta > 0$. Поэтому при $0 \leqslant x \leqslant \gamma_n$ получаем

$$0\leqslant\frac{1}{S_n(x)}-\frac{1}{F(x)}=\frac{1}{F(x)\,S_n(x)}\sum_{k=n+1}^{\infty}a_ke^{x\lambda_k}\leqslant\frac{1}{F(x)}\sum_{k=n+1}^{\infty}a_ke^{x\lambda_k}=$$
$$=\frac{1}{F(x)}\sum_{k=n+1}^{\infty}a_ke^{(x+\alpha(\lambda_n))\lambda_k}e^{-\alpha(\lambda_n)\lambda_k}\leqslant\frac{F(x+\alpha(\lambda_n))}{F(x)}\beta_n\leqslant$$
$$\leqslant\frac{F(\gamma_n+\alpha(\lambda_n))}{F(\gamma_n)}\beta_n=\frac{1}{F(\gamma_n)}\leqslant\frac{1}{F(\gamma_n)-1}. \qquad (6)$$

Аналогично, при $x\geqslant\gamma_n$ имеем

$$0\leqslant\frac{1}{S_n(x)}-\frac{1}{F(x)}\leqslant\frac{1}{S_n(x)}\leqslant\frac{1}{S_n(\gamma_n)}=\frac{1}{F(\gamma_n)}\left\{1-\frac{1}{F(\gamma_n)}\sum_{k=n+1}^{\infty}a_ke^{\gamma_n\lambda_k}\right\}^{-1}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{F(\gamma_n)(1-1/F(\gamma_n))}=\frac{1}{F(\gamma_n)-1}. \qquad (7)$$

Неравенство (5) вытекает из (6), (7). Теорема 1 доказана.

Отметим, что при $\alpha(x)\equiv\alpha_0>0$ из (2) следуют соотношения (3) и (4). Условие (2) выполняется, если $\ln n(t)=0(t)\ (t\to\infty)$, где $n(t)$ — считающая функция последовательности $(\lambda_n)$.

Рассматривая определенные классы рядов (1) с ограничением на рост $F$ или распределение $(\lambda_k)$, можно получить из теоремы 1 ряд следствий. Остановимся на двух таких утверждениях.

Следствие 1. *Если функция (1) имеет порядок* $\rho>1$, *тип* $\tau$ *и нижний тип* $\omega$, $0<\omega\leqslant\tau<\infty$, *а* $\ln n(t)=o(t)\ (t\to\infty)$, *то для каждого* $\varepsilon>0$ *при* $n\geqslant n_0(\varepsilon)$ *выполняется неравенство* $\sigma_n(F)\leqslant\exp\left\{-(1-\varepsilon)\,\omega\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)^{\rho}\left(\frac{\lambda_n}{\tau\rho}\right)^{\rho/(\rho-1)}\right\}$ **(8).**

Действительно, при $x\to+\infty$ выполняются неравенства $F(x)\geqslant\geqslant\exp\{(1+0(1)\,\omega x^{\rho}\}$ и $F^*(x)\geqslant(1+o(1))\left(\frac{\ln x}{\tau}\right)^{1/\rho}$. Взяв $\alpha(x)=\frac{1}{\rho}\left(\frac{x}{\tau\rho}\right)^{1/(\rho-1)}$, нетрудно показать, что $\beta_n\to0, \gamma_n\geqslant(1+o(1))\times\times\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{\lambda_n}{\tau\rho}\right)^{1/(\rho-1)}\to+\infty$ и $F(\gamma_n)\geqslant\exp\left\{(1+o(1))\,\omega\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\times\times\left(\frac{\lambda_n}{\tau_\rho}\right)^{\rho/(\rho-1)}\right\}$ при $n\to\infty$, т. е. из (5) получаем неравенство (8).

Следствие 2. *Если функция (1) имеет R-порядок* $\rho>0$, *R-тип* $\tau$ *и нижний R-тип* $\omega, 0<\omega\leqslant\tau<\infty$, *а* $\ln n(t)=o(1)\ (t\to\to\infty)$, *то для каждого* $\varepsilon>0$ *при* $n\geqslant n_0(\varepsilon)$ *выполняется неравенство* $\sigma_n(F)\leqslant\exp\left\{-(1-\varepsilon)\frac{\omega\lambda_n}{e\rho\tau}\right\}$ **(9).**

Действительно, при $x\to+\infty$ выполняются неравенства $F(x)\geqslant\geqslant\exp\{1+o(1))\,\omega e^{\rho x}\}$ и $F^*(x)\geqslant\frac{1}{\rho}\ln\frac{\ln x}{\tau}+o(1)$. Взяв $\alpha(x)=\frac{1}{\rho}$, получаем, как было отмечено выше, выполнение условий (3) и (4), а также неравенство $F(\gamma_n) \geqslant \exp\left\{(1+o(1))\frac{\omega\lambda_n}{e\rho\tau}\right\}$ и, таким образом, из (5) вытекает неравенство (9).

2°. Оценки $\sigma_n(F)$ на некоторой последовательности индексов. Пусть $\mu(x)$ и $\nu = \nu(x)$ — соответственно максимальный член и центральный индекс ряда (1).

*Лемма 1. Пусть* $0 \leqslant x \leqslant r < \infty$. *Тогда* $\frac{a_k}{\mu(x)} e^{x\lambda_k} \leqslant \frac{a_k}{\mu(x)} e^{r\lambda_k}$ *при* $k \geqslant \nu(r)$ *и* $\frac{a_k}{\mu(x)} e^{x\lambda_k} \geqslant \frac{a_k}{\mu(x)} e^{r\lambda_k}$ *при* $k \leqslant \nu(r)$.

Действительно, используя равенство $\ln\mu(r) - \ln\mu(x) = \int\limits_x^r \lambda_{\nu(t)}\, dt$, получаем $\lambda_{\nu(x)}(r-x) \leqslant \ln\mu(r) - \ln\mu(x) \leqslant \lambda_{\nu(r)}(r-x)$, т. е. $\exp \times \times \{(r-x)\lambda_{\nu(x)}\} \leqslant \frac{\mu(r)}{\mu(x)} \leqslant \exp\{(r-x)\lambda_{\nu(r)}\}$, откуда $\frac{1}{\mu(r)} e^{r\nu_k} \leqslant \frac{1}{\mu(x)} \times \times e^{x\nu_k}$ при $k \leqslant \nu(x)$ и $\frac{1}{\mu(r)} e^{r\nu_k} \geqslant \frac{1}{\mu(x)} e^{x\nu_k}$ при $k \geqslant \nu(r)$, т. е. приходим к требуемым неравенствам.

Через $V$ обозначим класс положительных неубывающих непрерывных на $[0, \infty)$ функций $v$ таких, что 1) $\int\limits_0^\infty \frac{dt}{v(t)} < +\infty$; 2) $t^2/v(t) \uparrow +\infty$ $(t_0 \leqslant t \to +\infty)$ и 3) $t^2/(v(t)\ln t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$. Если $v \in V$, а показатели ряда (1) такие, что $\ln n(t) = 0(t)$ $(t \to \to +\infty)$, то [4] для всех $x \geqslant 0$ вне некоторого множества конечной меры и всех $k \geqslant \nu(x)$ выполняются неравенства

$$a_k e^{x\nu_k} \leqslant \mu(x) \exp\left\{-\frac{1}{2v(\lambda_k)}(\lambda_k - \lambda_\nu)^2\right\} \tag{10}$$

и

$$\ln\mu(x) \geqslant \frac{1}{2v(\lambda_\nu)}\lambda_\nu^2, \quad \nu = \nu(x). \tag{11}$$

Обозначим $Q(x) = \sum\limits_{\lambda_k > 2\lambda_\nu} a_k e^{x\lambda_k}$ и предположим, что $v(t)\ln n(t) = = o(t^2)$ $(t \to +\infty)$ **(12)**. В силу условия 1) определения класса $V$ имеем $v(t)/t \to +\infty$ $(t \to +\infty)$, так что из (12) вытекает, что $\ln n(t) = o(t)$ $(t \to +\infty)$. Поэтому, используя (10), имеем

$$\frac{Q(x)}{\mu(x)} \leqslant \sum_{\lambda_k > 2\lambda_\nu} \exp\left\{-\frac{\lambda_k^2}{2v(\lambda_k)}\left(1-\frac{\lambda_\nu}{\lambda_k}\right)^2\right\} \leqslant \sum_{\lambda_k > 2\lambda_\nu} \exp\left\{-\frac{\lambda_k^2}{8v(\lambda_k)}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{2\lambda_\nu}^\infty \exp\left\{-\frac{t^2}{8v(t)}\right\} dn(t) \leqslant \int\limits_{2\lambda_\nu}^\infty n(t)\exp\left\{-\frac{t^2}{8v(t)}\right\} d\left(\frac{t^2}{8v(t)}\right) =$$

$$=\int\limits_{2\lambda_\nu}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(1+o(1))\,t^2}{8v(t)}\right\}d\left(\frac{t^2}{8v(t)}\right)=\exp\left\{-\frac{(1+o(1))\,(2\lambda_\nu)^2}{8v(2\lambda_\nu)}\right\} \qquad (13)$$

при $x\to+\infty$ вне некоторого множества конечной меры.

**Теорема 2.** *Если* $v\in V$ *и показатели ряда (1) удовлетворяют условию (12), то существует возрастающая последовательность* $(n_j)$ *натуральных чисел такая, что* $\sigma_n(F)\leqslant\exp\{-\lambda_n^2/v(\lambda_n)\}$, $n=n_j$ **(14)**.

Доказательство. Пусть $E$ — то исключительное множество, вне которого выполняются неравенства (11) и (13), $r\,\overline{\in}\,E$, а $n(r)=\max\{n:\lambda_{\nu(r)}\leqslant\lambda_n\leqslant 2\lambda_{\nu(r)}\}$. Тогда, в силу леммы 1, неравенства (13) и условия 2) определения класса $V$, для всех $x$, $0\leqslant\leqslant x\leqslant r$, имеем

$$0\leqslant\frac{1}{S_{n(r)}(x)}-\frac{1}{F(x)}\leqslant\sum_{\lambda_k>2\lambda_{\nu(r)}}\frac{a_k}{F(x)}e^{x\lambda_k}=\sum_{\lambda_k>2\lambda_{\nu(r)}}\frac{a_k}{\mu(r)}e^{x\lambda_k}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{\lambda_k>2\lambda_{\nu(r)}}\frac{a_k}{\mu(r)}e^{x\lambda_k}=\frac{Q_{(r)}}{\mu(r)}\leqslant\exp\left\{-\frac{(1+o(1))\,(2\lambda_{\nu(r)})^2}{8v(2\lambda_{\nu(r)})}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left\{-\frac{(1+o(1))\,\lambda_{n(r)}^2}{8v(\lambda_{n(r)})}\right\}. \qquad (15)$$

С другой стороны, в силу возрастания функции $v$, неравенства (11) и условия 2) определения класса $V$, для всех $x\geqslant r$ получаем

$$0\leqslant\frac{1}{S_{n(r)}(x)}-\frac{1}{F(x)}\leqslant\frac{1}{S_{n(r)}(x)}\leqslant\frac{1}{S_{n(r)}(r)}\leqslant\frac{1}{\mu(r)}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left\{-\frac{\lambda_{\nu(r)}^2}{2v(\lambda_{\nu(r)})}\right\}\leqslant\exp\left\{-\frac{(2\lambda_{\nu(r)})^2}{8v(2\lambda_{\nu(r)})}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left\{-\frac{1}{8}\frac{\lambda_{n(r)}^2}{v(\lambda_{n(r)})}\right\}. \qquad (16)$$

Таким образом, из (15) и (16) получаем, что $\sigma_{n(r)}(F)\leqslant\exp\times\times\left\{-\frac{1}{9}\frac{\lambda_{n(r)}^2}{v(\lambda_{n(r)})}\right\}$ **(17)** для всех $r\geqslant 0$ вне некоторого множества $E$ конечной меры. Так как из соотношений $v\in V$ и $v_1(x)=v(x)\times\times\,\mathrm{const}$ вытекает, что $v_1\in V$, то из (17) следует выполнение (14) для некоторой возрастающей последовательности $(n_j)$ натуральных чисел.

Если на рост функции $F$ наложить определенные условия, оценку (14) можно уточнить. С этой целью через $\Omega$ обозначим класс положительных функций $\Phi$, удовлетворяющих условиям: 1) $\Phi$ выпуклая на $(-\infty,\ +\infty)$, 2) $t^2\varphi'(t)\uparrow+\infty\,(t_0\leqslant t\to+\infty)$

и $3(t^2\varphi'(t)/\ln t \to +\infty$ $(t \to +\infty)$, где $\varphi'$ — правосторонняя производная функции $\varphi$, обратной к $\Phi$.

Пусть $0 < q < 1$, $\ln F(x) \leqslant \Phi(x) \in \Omega$ и $\ln n(t) = 0(t)$ $(t \to +\infty)$. Тогда [4] для всех $k \geqslant \nu(x)$ и всех $x$ вне некоторого множества верхней плотности $\leqslant q$ выполняются неравенства $a_k e^{x\lambda_k} \leqslant \mu(x) \times \times \exp\left\{-\frac{q}{2}\varphi'(\lambda_k)(\lambda_k - \lambda_\nu)^2\right\}$ **(18)** и $\ln \mu(x) \geqslant \frac{q}{2}\lambda_\nu^2\varphi'(\lambda_\nu)$, $\nu = \nu(x)$ **(19)**. Используя неравенство (18), в предположении, что $\ln n(t) = o(t^2\varphi'(t))$ $(t \to +\infty)$ **(20)**, как и при доказательстве (13), получаем. что $Q(x) \leqslant \mu(x)\exp\left\{-(1 + 0(1))\frac{q}{8}(2\lambda_\nu)^2\varphi'(2\lambda_\nu)\right\}$ **(21)** при $x \to +\infty$ вне некоторого множества верхней плотности $\leqslant q$.

Как и при доказательстве теоремы 2, в силу (19) и (21), получаем, что выполняется неравенство $\sigma_{n(r)}(F) \leqslant \exp\{-qK\lambda_{n(r)}^2 \times \times \varphi'(\lambda_{n(r)})\}$, $0 < K < \frac{1}{8}$ **(22)**, для всех $r \geqslant 0$ вне некоторого множества верхней плосности $\leqslant q$. В силу произвольности $q$ и $K$, отсюда получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $\ln F(x) \leqslant \Phi(x) \in \Omega$, $\ln n(t) = 0(t)$ $(t \to +\infty)$ *и выполнено условие (20). Тогда для каждого* $\eta \in (0, 1)$ *существует возрастающая последовательность* $(n_j)$ *натуральных чисел такая, что*

$$\sigma_n(F) \leqslant \exp\left\{-\frac{\eta}{8}\lambda_n^2\varphi'(\lambda_n)\right\}, \quad n = n_j. \tag{23}$$

В частности, если $F$ имеет конечный порядок $\rho > 1$, то из (23) вытекает, что $\sigma_n(F) \leqslant \exp\left\{-\frac{\eta}{8\rho}\lambda_n^{\rho+0/\rho}\right\}$, $n = n_j$, а если же $F$ имеет конечный $R$-порядок $\rho > 0$, то $\sigma_n(F) \leqslant \exp\left\{\frac{\eta}{8\rho}\lambda_n\right\}$, $n = n_j$.

**Список литературы:** 1. *Erdös P., Reddy A. R.* Rational approximation.— Adv. Math., 1976, v. 21, p. 78—109. 2. *Shah S. M.* Approximation of meromorphic functions by rational functions by rational functions.— J. Appr. Theory, 1978, v. 24. p. 146—160. 3. *Шеремета М. Н.* Рациональная аппроксимация на [0, ∞) целых функций произвольного роста с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1979, т. 31, № 3, с. 303—311. 4. *Шеремета М. Н.* Аналоги теоремы Вимана для рядов Дирихле.— Мат. сб., 1979, т. 110, № 1, с. 102—116.

*Поступила в редколлегию 15.12.80.*