УДК 517.984.48

Э. Р. ЦЕКАНОВСКИЙ

О РАСТЯЖЕНИИ ЦЕЛЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Матрицу-функцию $W(\lambda)$ отнесем к классу Ω_J (J — эрмитова матрица, $J^2 = I$), если 1. $W(\lambda)$ — целая функция от $\mu = \frac{1}{\lambda}$; 2. $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \| W(\lambda) - I \| = 0$; 3. $W(\lambda) JW^*(\lambda) - J \geqslant 0$ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$; 4. $W(\lambda) \times$

$$\times JW^*(\lambda) - J = 0 \quad (\operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \neq 0). \qquad (1)$$

Положим, что матрица-функция $W_1(\lambda) \in \Omega_J$ является **левым делителем** матрицы-функции $W_2(\lambda) \in \Omega_J$, если существует такая матрица-функция $W_{12}(\lambda) \in \Omega_J$, что в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки $W_2(\lambda) = W_1(\lambda) W_{12}(\lambda)$.

Запись $W_1(\lambda) < W_2(\lambda)$ означает, что $W_1(\lambda)$ левый делитель $W_2(\lambda)$.

Часть множества $\Omega_J' \subset \Omega_J$ называется *упорядоченной* [1], если для любых двух функций $W_1(\lambda)$, $W_2(\lambda) \in \Omega_J'$ имеет место одно из соотношений $W_1(\lambda) < W_2(\lambda)$, $W_2(\lambda) < W_1(\lambda)$.

Функцию $W(\lambda) \in \Omega_J$ назовем **минимальной**, если в разложении в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки $W(\lambda) = I + \frac{2i}{\lambda} JL + \ldots$ матрица L — невырождена.

Матрицу $W(\lambda)$ порядка n назовем **растяжением** матрицы $\tilde{W}(\lambda)$ порядка s, если $\tilde{W}(\lambda)$ является левым верхним углом для $W(\lambda)$.

Для линейных стационарных динамических систем представляет интерес следующий вопрос: можно ли всякую минимальную матрицу-функцию $\tilde{W}(\lambda) \in \Omega_I$ порядка s, у которой все левые делители упорядочены [1] и др., и имеющую экспоненциальный тип роста τ, растянуть до минимальной матрицы-функции $W(\lambda) \in \Omega_J$ порядка $n > s$ (при некоторой матрице $J = \operatorname{diag}(I_s, I_p, -I_q)$, $s + p + q = n$ и некотором n) с тем же экспоненциальным типом роста τ, у которой все левые делители упорядочены.

Положительное решение этого вопроса и является целью статьи.

Пусть A — замкнутый, плотно заданный, симметрический оператор с равными и конечными дефектными числами (r, r), действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H и пусть T — квазиэрмитово $(T \neq T^*)$ расширение A, т. е. $A \subset T \subset A^*$, которое имеет ограниченный обратный оператор T^{-1}, определенный на всем H.

Рассмотрим пространство $H_{+1} = D(A^*)$ со скалярным произведением $(x, y)_{+1} = (x, y) + (A^*x, A^*y)$ $(x, y \in D(A^*))$ **(2)**.

Согласно формулам Неймана $H_{+1} = D(A) \oplus N_i(A) \oplus N_{-i}(A)$ **(3)**, где $N_{\pm i}(A)$ — дефектные подпространства оператора A и подпространства $D(A)$, $N_i(A)$, $N_{-i}(A)$ попарно $(+1)$ — ортогональны*.

---

* $(\cdot)$, $(+1)$ — означает ортогональность в пространствах H, H_{+1} соответственно.

Легко видеть, что оператор T^{-1} действует в гильбертовом пространстве H_{+1} и является в этом пространстве ограниченным.

Лемма 1. *Мнимая компонента оператора T^{-1} в пространстве H_{+1} удовлетворяет соотношению*

$$\frac{T^{-1}-T^{-1+}}{i}=\frac{T^{-1}-T^{-1*}}{i}+P^{+}_{N_i(A)}-P^{+}_{N_{-i}(A)}, \tag{4}$$

где T^{-1+} — оператор, сопряженный к T^{-1} в пространстве H_{+1}, $P^{+}_{N_{\pm i}(A)}$ — ортопроектор H_{+1} на $N_{\pm i}(A)$ соответственно.

Из (4) следует, что $T^{-1+}=T^{-1*}+iP^{+}_{N_{-i}(A)}-iP^{+}_{N_i(A)}$.

Определение. *Оператор $B\in[H, H]$ называется $(\cdot)$ — вполне несамосопряженным, если***

$$\bigvee_{0}^{\infty}\{B^n \operatorname{Im} BH\}=H.$$

Теорема 1. *Пусть оператор $T^{-1}(\cdot)$ — вполне несамосопряжен.*

Тогда он $(+1)$ — вполне несамосопряжен.

Легко видеть, что $D(T)$ $(+1)$ — подпространство в H_{+1}.

Лемма 2. *Пусть F — $(+1)$ — линеал, $(\cdot)$ — плотный в H.*

Тогда множество $F_T=T^{-1}F$ является $(+1)$ — плотным в $D(T)$.

Известно [2], что если $(-i)$ — регулярная точка для квазиэрмитова расширения T симметрического оператора A, то $D(T)=D(A)\oplus(M+I)N_i(A)$, где M — ограниченный линейный оператор из $N_i(A)$ в $N_{-i}(A)$.

Квазиэрмитово расширение T симметрического оператора A отнесем к классу $\Lambda_0(A)$, если точки $(\pm i,\ 0)$ являются регулярными для оператора T.

Лемма 3. *Пусть $F(+1)$ — линеал, $(\cdot)$ — плотный в H и $T\in\Lambda_0(A)$.*

Для того чтобы вектор $h\in H_{+1}$ был $(+1)$ — ортогонален к $F_T=T^{-1}F$, необходимо и достаточно, чтобы $h=P^{+}_{N_{+i}(A)}x-M^{*}P^{+}_{N_{-i}(A)}x$.

Из леммы (3) вытекает

Лемма 4. *Пусть $T\in\Lambda_0(A)$ и пусть F — $(\cdot)$ — плотно в H и $(+1)$ — инвариантное подпространство относительно T^{-1}.*

Тогда $F_T=T^{-1}F$ $(+1)$ плотно в H.

Из указанных лемм следует

Теорема 2. *Пусть $T\in\Lambda_0(A)$. Всякое $(+1)$ — инвариантное относительно T^{-1} подпространство F, которое $(\cdot)$ — плотно в H совпадает с $D(T)$, т. е. $F=D(T)$.*

** $[H, H]$ — совокупность всех линейных ограниченных операторов, действующих в H. Лемма и (1) теорема (1) получены совместно с А. Муратовой.

Оператор B, действующий в гильбертовом пространстве H, отнесем к классу $\Lambda^{(\exp)}$ [1], если он удовлетворяет следующим условиям: 1. $\operatorname{Im} B \geqslant 0$; 2. B не имеет отличных от нуля точек спектра; 3. $\left(B - \frac{1}{\mu} T\right)^{-1}$ — оператор-функция экспоненциального типа роста.

Определение. *Мы будем говорить, что вольтерров оператор B, действующий в гильбертовом пространстве H, порожден целым эрмитовым оператором A* [3], *если $B = T^{-1}$, где T квазиэрмитово расширение без спектра в конечной части плоскости плотно заданного, замкнутого симметрического оператора A.*

Теорема 3. *Пусть вполне несамосопряженный оператор B, действующий в гильбертовом пространстве H, принадлежит классу $\Lambda^{(\exp)}$ и имеет конечномерную мнимую компоненту $\operatorname{Im} B$.*

Тогда оператор B порожден некоторым целым эрмитовым оператором A.

Следствие. *Пусть $B \in \Lambda^{(\exp)}$ имеет конечномерную мнимую компоненту $\operatorname{Im} B$ и является одноклеточным* [1] *в пространстве H.*

Тогда сужение этого оператора на любое его инвариантное подпространство F_0 порождено целым эрмитовым оператором в этом подпространстве.

Из теоремы 3 и следствия из нее следует

Теорема 4. *Пусть $B \in \Lambda^{(\exp)}$, $\dim \operatorname{Im} B < \infty$ и оператор B — одноклеточен в пространстве H и пусть A — целый эрмитов оператор, порождающий B, т. е. $B = T^{-1}$ $(A \subset T \subset A^*)$.*

Тогда оператор $B = T^{-1}$ $(+1)$ — одноклеточен в пространстве $H_{+1} = D(A^*)$.

В [1] показано, что всякая матрица-функция $W(\lambda) \in \Omega_J$ реализуется как матрица оператора, являющегося характеристической оператор-функцией $W_\Theta(\lambda)$ некоторого узла

$$\Theta = \begin{pmatrix} B & K & G \\ H & & E \end{pmatrix} \quad (\dim E < \infty)$$

в некотором ортонормированном базисе $\{g_k\}_1^s \in E$, где $K \in [E, H]$, $W_\Theta(\lambda) = I - 2iK^*(B - \lambda I)^{-1} KG$, $J = \| (Gg_k g_j) \|_1^s$, причем упорядоченность левых делителей матрицы-функции $W(\lambda)$ эквивалентна одноклеточности оператора B из узла θ.

Теорема 5. *Всякая минимальная матрица-функция $\tilde{W}(\lambda) \in \Omega_I$ порядка s и экспоненциального типа τ, у которой все левые делители упорядочены, допускает растяжение до минимальной матрицы-функции $W(\lambda) \in \Omega_J$ $(J = \operatorname{diag}(I_s, I_s, -I_s))$, имеющей тот же экспоненциальный тип τ и у которой также все левые делители упорядочены.*

Рассмотрим **пример.** Пусть $\widetilde{W}(\lambda) = e^{\frac{i\tau}{\lambda}} \in \Omega_I$. Выпишем минимальную матрицу-функцию $W(\lambda) \in \Omega_J$, $J = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$ третьего порядка, которая является растяжением $\widetilde{W}(\lambda)$

$$w_{11}(\lambda) = e^{\frac{i\tau}{\lambda}}, \quad w_{12}(\lambda) = \frac{i\left[1 - e^{\left(\frac{i}{\lambda} - 1\right)\tau}\right]}{\lambda\sqrt{1 - e^{-2\tau}}};$$

$$w_{13}(\lambda) = \frac{i\left[1 - e^{\left(\frac{i}{\lambda} + 1\right)\tau}\right]}{\lambda\sqrt{e^{2\tau} - 1}}; \quad w_{23} = \frac{e^{\tau}\left[e^{\left(\frac{i}{\lambda} + 1\right)\tau} - 1\right]}{\lambda^2\left(\frac{i}{\lambda} + 1\right)(e^{2\tau} - 1)};$$

$$w_{21}(\lambda) = \frac{-ie^{-\tau}}{\lambda\sqrt{1 - e^{-2\tau}}} - \frac{e^{-\tau} + \frac{\lambda}{i} e^{\frac{i\tau}{\lambda}}}{\lambda^2\left(\frac{i}{\lambda} + 1\right)\sqrt{1 - e^{-2\tau}}};$$

$$w_{22}(\lambda) = 1 + \frac{e^{\left(\frac{i}{\lambda} - 1\right)\tau} - e^{-2\tau}}{\lambda^2\left(\frac{i}{\lambda} + 1\right)(1 - e^{-2\tau})}, \quad w_{32}(\lambda) = \frac{e^{\tau}\left[1 - e^{\left(\frac{i}{\lambda} - 1\right)\tau}\right]}{\lambda^2\left(1 - \frac{i}{\lambda}\right)(e^{2\tau} - 1)};$$

$$w_{31}(\lambda) = \frac{ie^{\tau}}{\lambda\sqrt{e^{2\tau} - 1}} + \frac{e^{\tau} - \frac{\lambda}{i} e^{\frac{i\tau}{\lambda}}}{\lambda^2\left(1 - \frac{i}{\lambda}\right)\sqrt{e^{2\tau} - 1}};$$

$$w_{33}(\lambda) = 1 - \frac{i}{\lambda} + \frac{e^{2\tau} - e^{\left(\frac{i}{\lambda} + 1\right)\tau}}{\lambda^2\left(\frac{i}{\lambda} - 1\right)(e^{2\tau} - 1)};$$

В точках $\pm i$ некоторые из выписанных функций определяются с помощью предельного перехода при $\lambda \to \pm i$.

Список литературы: 1. *Бродский М. С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов.— М.: Наука, 1969, с. 1—287. 2. *Цекановский Э. Р.* Об описании единственности обобщенных расширений квазиэрмитовых операторов.— Функцион. анализ и их прил., 1969, 3, вып. 1, с. 95—96. 3. *Крейн М. Г.* Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m).— Укр. мат. журн., 1949, № 2, с. 3—67.

Поступила в редколлегию 21.05.80.