УДК 517.539.89

А. Я. ХЕЙФЕЦ, П. М. ЮДИЦКИЙ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОПЕРАТОРА, КОММУТИРУЮЩЕГО С УКОРОЧЕННЫМ СДВИГОМ, ФУНКЦИЯМИ КЛАССА И. ШУРА. I

ВВЕДЕНИЕ

Будем придерживаться следующих обозначений:

L^2 — пространство квадратично суммируемых на единичной окружности функций; H^2 — его подпространство, состоящее из функций, у которых коэффициенты Фурье с отрицательными индексами равны нулю (пространство Харди); H^2_- — ортогональное дополнение H^2 в L^2; P_+ — ортогональный проектор L^2 на H^2; S — *оператор сдвига (оператор умножения на независимую переменную)*; Θ — внутренняя функция; K_Θ — ортогональное дополнение ΘH^2 в H^2; P_Θ — ортогональный проектор на K_Θ; A — укороченный сдвиг ($A = p_\Theta S \mid K_\Theta$); H^∞ — пространство голоморфных, ограниченных в единичном круге функций; B — множество функций голоморфных в единичном круге таких, что $1 - w(\zeta)\overline{w(\zeta)} \geqslant 0$ (класс Шура).

Под H^∞ — исчислением от оператора A понимается следующее: $\varphi(A)x = P_\Theta(\varphi x)$; $x \in K_\Theta$, $\varphi \in H^\infty$. При этом $\|\varphi(A)\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$.

Одним из важнейших фактов теории оператора сдвига является известная ([4], [3]).

Теорема Сарасона. *Пусть Φ — ограниченный оператор в K_Θ, коммутирующий с укороченным сдвигом A: $\Phi A = A\Phi$. Тогда существует функция $\varphi \in H^\infty$ «интерполирующая» оператор Φ: $\varphi(A) = \Phi$, $\|\Phi\| = \|\varphi\|_\infty$.*

Мы будем говорить, что функция w класса Шура интерполирует оператор W в K_Θ, если $w(A) = W$, $w \in \boldsymbol{B}$.

Ясно, что каждый интерполируемый функцией из $\boldsymbol{B}$ оператор коммутирует с укороченным сдвигом A и является сжатием.

В статье рассматривается следующая интерполяционная задача, которую мы будем называть задачей Сарасона.

Задача Сарасона. *Пусть W — сжимающий оператор в K_Θ, коммутирующий с укороченным сдвигом A: $I - WW^* \geqslant 0$, $WA = AW$. Требуется доказать существование функции $w \in \boldsymbol{B}$: $w(A) = W$ и описать все такие функции.*

Очевидно, что из теоремы Сарасона следует разрешимость этой задачи. Наоборот, так как в теореме Сарасона, без ограничения общности, можно считать $\|\Phi\|$ равной 1 (Φ — сжимающий оператор), то из разрешимости интерполяционной задачи для оператора в классе Шура ($\exists \varphi \in \boldsymbol{B} : \varphi(A) = \Phi$) следует теорема Сарасона (так как $1 = \|\Phi\| = \|\varphi(A)\| \leqslant \|\varphi\|_\infty \leqslant 1$).

Эта задача была исследована Адамяном В. М., Аровым Д. З. и Крейном М. Г. [5].

В. П. Потапов предложил новый плодотворный подход к исследованию интерполяционных задач. Этот подход заключается в сопоставлении рассматриваемой интерполяционной задаче адекватного ей матричного неравенства, так называемого ОСНОВНОГО МАТРИЧНОГО НЕРАВЕНСТВА (ОМН), и решении ОМН методом факторизации. Мы исследуем здесь задачу Сарасона методом В. П. Потапова.

В § 1 излагаются в нужной нам форме сведения об операторе сдвига (теории оператора сдвига посвящена монография [3]).

В § 2 выводится ОМН задачи Сарасона

$$\begin{bmatrix} \langle (I - WW^*)x, x\rangle & \left\langle \dfrac{W - w(\zeta)}{A - \zeta} e, x \right\rangle \\ * & \dfrac{1 - \overline{w(\zeta)}\, w(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} \end{bmatrix} \geqslant 0 \qquad \text{(ОМН)}$$

$$\forall x \in K_\Theta, \quad \forall \zeta \in \boldsymbol{C} \quad (\zeta \notin \sigma(A), \quad 1 - \bar{\zeta}\zeta \neq 0),$$

где $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=1} \overline{g(t)}\, f(t) \dfrac{dt}{t}$ — скалярное произведение в K_Θ, индуцированное из L^2; $e = P_\Theta 1$ — проекция на K_Θ функции, тождественно равной единице, (для ζ, лежащих вне круга, полагаем $w(\zeta) = \overline{w^{-1}(1/\bar{\zeta})}$; такое доопределение функции w во внешности круга будем называть псевдопродолжением).

Мы показываем, что всякая функция $w \in \boldsymbol{B}$, являющаяся решением задачи Сарасона, удовлетворяет ОМН.

В § 3 будет показано, что всякая голоморфная в единичном круге функция $w(\zeta) \in \boldsymbol{B}$, удовлетворяющая ОМН, является решением задачи Сарасона.

Доказательство разрешимости ОМН, критерий единственности, описание всех его решений в случае неединственности и т. д. будут изложены во второй части работы.

§ 1. Некоторые предварительные сведения. Большинство фактов, приведенных в этом параграфе, содержится, например, в [3].

Для любой функции $g \in H^2$ имеют место формулы (здесь и далее, если аргумент функции не указан, то подразумевается t): $< g, \frac{1}{1-t\bar{\zeta}} > = g(\zeta)$ $(1-\zeta\bar{\zeta}>0)$ **(1)**; $P_+ \frac{\bar{g}}{1-t\bar{\zeta}} = \frac{\overline{g(\zeta)}}{1-t\bar{\zeta}}$, $(1-\bar{\zeta}\zeta>0)$ **(2)**.

Пусть Θ внутренняя функция, $K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$, тогда проектор H^2 на K_Θ имеет вид $P_\Theta = I - \Theta P_+ \bar{\Theta} = \Theta P_- \bar{\Theta}$. **(3)**. Таким образом, $\forall x \in K_\Theta$ $\bar{\Theta} x \in H^2_-$. Более того $\bar{\Theta} x \overset{\text{п.в.}}{=} t\bar{x}_*$ $(|t|=1)$ **(4)**, где $x_* \in K_\Theta$. Ясно, что операция $x_* = \Theta \bar{t}\bar{x}$ **(5)** является инволяцией в K_Θ.

Оператор, сопряженный к $w(A)$, вычисляется по формуле $w(A)^* x = P_+(\bar{w}\, x)$ **(6)**. Обозначим через e: $e = P_\Theta \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная единице.

$$e = \mathbf{1} - \Theta\overline{\Theta(0)}. \tag{7}$$

Для любой функции $w \in H^\infty$ $w(A)e = P_\Theta(we) = P_\Theta w$ **(8)**, e — циклический вектор для A. Действие резольвенты A на e имеет вид

$$e_\zeta = (I-\bar{\zeta}A)^{-1} e = \frac{1-\Theta\overline{\Theta(\zeta)}}{1-t\bar{\zeta}},\ \forall \zeta\colon\ 1/\bar{\zeta} \bar{\in} \sigma(\Theta). \tag{9}$$

Под спектром Θ понимается множество точек ζ_0, в которых $\lim\limits_{\zeta\to\zeta_0} |\Theta(\zeta)| = 0$. Спектр Θ совпадает со спектром A. При $|\zeta|<1$ $e_\zeta = P_\Theta \frac{1}{1-t\bar{\zeta}}$. В силу этого $\forall x \in K_\Theta$: $< x, e_\zeta > = x(\zeta)$ $(1-\bar{\zeta}\zeta > 0)$ **(10)**. Для любых чисел ζ и μ таких, что $1/\bar{\zeta}$, $1/\bar{\mu} \bar{\in} \sigma(\Theta)$ $< e_\zeta, e_\mu > = \frac{1-\Theta(\mu)\overline{\Theta(\zeta)}}{1-\mu\bar{\zeta}}$ **(11)**. Вектор e порождает образ оператора $I - AA^*$, а именно: $(I-AA^*)x = e < x, e >$, $\forall x \in K_\Theta$ **(12)**. Вычислим вектор $e_* = \Theta\bar{t}\bar{e} = \Theta\bar{t}\,\overline{[1-\Theta\overline{\Theta(0)}]} = [\Theta - \Theta(0)]\,\bar{t} = \frac{\Theta-\Theta(0)}{t}$ **(13)**, e_* — циклический вектор для A^*. Действие резольвенты A^* на e_* имеет вид $e_{*\zeta} = (I-\zeta A^*)^{-1} e_* = \frac{\Theta-\Theta(\zeta)}{t-\zeta}$, $1/\bar{\zeta} \bar{\in} \sigma(\Theta)$ **(14)**. Сравнивая (9) и (14), можно получить тождество $\overline{\Theta(\zeta)}\,(\bar{\zeta}-A^*)^{-1} e_* = (I-\bar{\zeta}A)^{-1}e$ **(15)**. Для любых ζ и μ таких, что $1/\bar{\zeta}$ и $1/\bar{\mu} \bar{\in} \sigma(\Theta)$ $< e_{*\zeta}, e_{*\mu} > = \frac{1-\overline{\Theta(\mu)}\,\Theta(\zeta)}{1-\bar{\mu}\zeta}$ **(16)**. Вектор e_* порождает образ оператора $I - A^*A$, а именно $(I-A^*A)x = e_* < x, e_* >$, $\forall x \in K_\Theta$ **(17)**. Покажем, что $e_{\zeta *} = e_{*\zeta}$:

$$e_{\zeta *} = \Theta \overline{t e_\zeta} = \Theta t \overline{\frac{1-\Theta\overline{\Theta(\zeta)}}{1-t\bar\zeta}} = \frac{\Theta - \Theta(\zeta)}{t-\zeta} = e_{*\zeta}. \qquad (18)$$

Пусть $WA = AW$, тогда $W^* e_* = (We)_*$. **(19)**. Действительно, используя соотношение (18) и определение инволюции, получим

$$(We)_*(\zeta) = <(We)_*, e_\zeta> = <\Theta\overline{tWe}, \Theta\overline{te_{*\zeta}}> = <e_{*\zeta}, We> =$$
$$= <(I-\zeta A^*)^{-1}e_*, We> = <W^*e_*, e_\zeta> = (W^*e_*)(\zeta).$$

Можно получить и более общий факт $(Wx)_* = W^*x_*$, $\forall x \in K_\Theta$. (20) В самом деле $(Wx)_*(\zeta) = <(Wx)_*, e_\zeta> = <\Theta\overline{tWx}, \Theta\overline{te_{*\zeta}}> = <e_{*\zeta}, Wx> = <W^*(I-\zeta A^*)^{-1}e_*, x>$. В силу (18) $W^*(I-\zeta A^*)^{-1}e_* = [W(I-\bar\zeta A)^{-1}e]_*$. Тогда $(Wx)_*(\zeta) = <[W(I-\bar\zeta A)^{-1}e]_*$ $x> = <x_*, W(I-\bar\zeta A)^{-1}e> = <W^*x_*, e_\zeta> = (W^*x_*)(\zeta)$. Заменяя в (20) x на x_*, имеем $(W^*x)_* = Wx_*$ **(21)**. Используя соотношения (18) и (15), можно получить соотношение

$$<(\zeta - A)^{-1}e, x> = \frac{x_*(\zeta)}{\Theta(\zeta)} \ (|\zeta| < 1, \ \zeta \bar\in \sigma(\Theta)). \qquad (22)$$

Отметим, что семейство векторов $\{(\zeta_k - A)^{-1}e\}$, где ζ_k имеет предельную точку вне спектра Θ, является полным в K_Θ (см. (10), (22)).

Пусть $\Theta = \Theta_1 \cdot \Theta_2$, где Θ_i — внутренние функции, тогда $K_\Theta = \Theta_1 K_{\Theta_2} \oplus K_{\Theta_1} = \Theta_2 K_{\Theta_1} \oplus K_{\Theta_2}$ **(23)**.

§ 2. Вывод ОМН. В этом параграфе показано, что если $Wx = w(A)x = P_\Theta(wx)$, $\forall x \in K_\Theta$, причем $1 - w(\zeta)\overline{w(\zeta)} \geqslant 0$ (при $1 - \zeta\bar\zeta > 0$), то функция $w(\zeta)$ удовлетворяет основному матричному неравенству (ОМН), которое приведено во введении. Напомним, что во внешности круга $w(\zeta)$ задается псевдопродолжением (т. е. $w(\zeta) \equiv \overline{w^{-1}(1/\bar\zeta)}$ при $|\zeta| > 1$).

При таких соглашениях это неравенство равносильно двум

$$\begin{bmatrix} <(I - WW^*)x, x> & < \dfrac{W - w(\zeta)\cdot I}{A - \zeta\cdot I} e, x> \\ * & \dfrac{1 - \overline{w(\zeta)}w(\zeta)}{1 - \bar\zeta\zeta} \end{bmatrix} \geqslant 0 \qquad (24)$$

$\forall x \in K_\Theta$, $1 - \zeta\bar\zeta > 0$, $\zeta \bar\in \sigma(\Theta)$ и

$$\begin{bmatrix} <(I - WW^*)x, x> & < \dfrac{I - W\cdot\overline{w(\zeta)}}{I - A\bar\zeta} e, x> \\ * & \dfrac{1 - w(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{1 - \zeta\bar\zeta} \end{bmatrix} \geqslant 0 \qquad (25)$$

$\forall x \in K_\Theta$, $1 - \zeta\bar\zeta > 0$.

Отметим, что на самом деле (24) и (25) эквивалентны между собой.

Идея доказательства состоит в том, чтобы добавить к спектру Θ произвольную точку ζ. В п. 1° будет выведено неравенство (24), в п. 2° — неравенство (25).

1°. Итак, пусть $\Theta_1 = \Theta B$, где $B = B_\zeta(t) = \frac{t-\zeta}{1-t\bar{\zeta}}$, $|\zeta| < 1$. K_{Θ_1} — является одномерным расширением K_Θ. Очевидно, что оператор $W_1 = w(A_1)$, где $A_1 = P_{\Theta_1} S \mid K_{\Theta_1}$ сжимающий $<(I - W_1W_1^*)x_1, x_1> \geqslant 0$, $x_1 \in K_{\Theta_1}$. Возьмем $x_1 = Bx + \frac{c}{1-t\bar{\zeta}}$, $x \in K_\Theta$. Отметим, что слагаемые ортогональны. При этом $W_1^* x_1 = P_+\bar{w}x_1 = P_+\bar{w}Bx + P_+\frac{\bar{w}}{1-t\bar{\zeta}}c = P_+BP_+\bar{w}x + P_+BP_-\bar{w}x + \frac{\overline{w(\zeta)}}{1-t\bar{\zeta}}c = BW^*x + P_+BP_-\bar{w}x + \frac{\overline{w(\zeta)}}{1-t\bar{\zeta}}c$. Покажем, что $P_+BP_-\bar{w}x \in K_B$. Действительно $< P_+BP_-\bar{w}x, Bg > = < BP_-\bar{w}x, Bg > = < P_-\bar{w}x, g > = 0$, $\forall g \in H^2$. Это означает, что $P_+BP_-\bar{w}x = \frac{\alpha}{1-t\bar{\zeta}}$. Таким образом, $W_1^* x_1 = BW^*x + \frac{\alpha + \overline{w(\zeta)}\, c}{1-t\bar{\zeta}}$. Найдем

$$\alpha < \frac{1}{1-t\bar{\zeta}}, \frac{1}{1-t\bar{\zeta}} > = < P_+BP_-\bar{w}x, \frac{1}{1-t\bar{\zeta}} > = < BP_-\bar{w}x, \frac{1}{1-t\bar{\zeta}} >; \frac{\alpha}{1-\zeta\bar{\zeta}} = < P_-\bar{w}x, \frac{1}{t-\zeta} > = < \bar{w}x, \frac{1}{t-\zeta} > = < x, \frac{w}{t-\zeta} > = < x, \frac{w-w(\zeta)}{t-\zeta} > = < x, P_\Theta\frac{w-w(\xi)}{t-\zeta} > = < x, \frac{w(A)-w(\zeta)\cdot I}{A-\zeta\cdot I}e >.$$

Так, что $\alpha = (1-\zeta\bar{\zeta}) < x, \frac{W-w(\zeta)\cdot I}{A-\zeta\cdot I}e >$. Хотя этому выражению можно придать смысл $\forall \zeta : |\zeta| < 1$, нам будет удобней, если $(A - \zeta\cdot I)^{-1}$ существует сам по себе в буквальном смысле, т. е. $\zeta \bar{\in} \sigma(\Theta)$.

Вычислим теперь $< (I - W_1W_1^*)x_1, x_1 > = < x_1, x_1> - <W_1^* x_1, W_1^* x_1 > = < Bx, Bx > + < \frac{c}{1-t\bar{\zeta}}, \frac{c}{1-t\bar{\zeta}} > - < BW^*x, BW^*x > - < \frac{\alpha + \overline{w(\zeta)}\, c}{1-t\bar{\zeta}}, \frac{\alpha + \overline{w(\zeta)}\, c}{1-t\bar{\zeta}} >$; c — произвольная константа. Положим $c = \gamma\alpha$.

$$< (I - W_1 W_1^*) x_1, \ x_1 > \, = \, < x, \ x > - < W^* x, \ W^* x > +$$
$$+ \frac{\bar{\alpha}\,\bar{\gamma}\gamma\alpha - [\bar{\alpha} + \bar{\alpha}\,\bar{\gamma} w(\zeta)]\,[\alpha + \overline{w(\zeta)}\gamma\alpha]}{1 - \zeta\bar{\zeta}} = \, < (I - WW^*)\, x, \ x > +$$
$$+ \alpha\, \frac{\gamma\bar{\gamma} - 1 - \bar{\gamma} w(\zeta)\,\overline{w(\zeta)}\,\gamma - \bar{\gamma} w(\zeta) - \overline{w(\zeta)}\,\gamma}{1 - \zeta\bar{\zeta}}\, \alpha \geqslant 0.$$

Это неравенство верно при всех γ. Максимум информации дает минимум (по γ) квадратичной формы $\bar{\gamma}\,[1 - w(\zeta)\,\overline{w(\zeta)}]\,\gamma - \bar{\gamma} w(\zeta) - \overline{w(\zeta)}\,\gamma - 1 = \{\bar{\gamma} - \overline{w(\zeta)}\,[1 - w(\zeta)\overline{w(\zeta)}]^{-1}\}\,[1 - w(\zeta)\,\overline{w(\zeta)}]\,\{\gamma - [1 - w(\zeta)\,\overline{w(\zeta)}]^{-1} w(\zeta)\} - \overline{w(\zeta)}\,[1 - w(\zeta)\overline{w(\zeta)}]^{-1} w(\zeta) - 1$. Квадратичная форма минимальна при $\gamma = [1 - w(\zeta)\,\overline{w(\zeta)}]^{-1} w(\zeta)$ и равна $- \overline{w(\zeta)}\,[1 - w(\zeta)\,\overline{w(\zeta)}]^{-1} w(\zeta) - 1 = -[1 - \overline{w(\zeta)} w(\zeta)]^{-1}$. Таким образом, $< (I - WW^*)\, x, x > - < x, \dfrac{W - w(\zeta) \cdot I}{A - \zeta \cdot I}\, e > \left[\dfrac{1 - \overline{w(\zeta)} w(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta}\right]^{-1} < x, \dfrac{W - w(\zeta) \cdot I}{A - \zeta \cdot I}\, e > \, \geqslant 0$. Полученное неравенство, в совокупности с условием $\dfrac{1 - \overline{w(\zeta)} w(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} \geqslant 0$ эквивалентно (24).

2°. При выводе неравенства (24) использовали разложение пространства K_{Θ_1} в прямую сумму одномерного подпространства K_B и его ортогонального дополнения BK_Θ.

Для вывода неравенства (25) воспользуемся разложением вектора x_1 в сумму $x_1 = x + \dfrac{c}{1 - t\bar{\zeta}}$, $x \in K_\Theta$. В этом случае $W_1^* x_1 = P_+ w\left(x + \dfrac{c}{1 - t\bar{\zeta}}\right) = W^* x + \dfrac{\overline{w(\zeta)}}{1 - t\bar{\zeta}}\, c$. Тогда $< (I - W_1 W_1^*) x_1, \ x_1 > \, =$

$$= \, < x + \frac{c}{1 - t\bar{\zeta}}, \ x + \frac{c}{1 - t\bar{\zeta}} > - < W^* x + \frac{\overline{w(\zeta)}}{1 - t\bar{\zeta}}\, c, \ W^* x + \frac{\overline{w(\zeta)}}{1 - t\bar{\zeta}}\, c >$$
$$= \, < x, \ x > + \, \bar{c} < x, \ \frac{1}{1 - t\bar{\zeta}} > + < \frac{1}{1 - t\bar{\zeta}}, \ x > c + \frac{\bar{c} c}{1 - \zeta\bar{\zeta}} -$$
$$- < W^* x, \ W^* x > - \, \bar{c} w(\zeta) < W^* x, \ \frac{1}{1 - t\bar{\zeta}} > - < \frac{1}{1 - t\bar{\zeta}}, \ W^* x >$$
$$\overline{w(\zeta)}\, c - \bar{c}\, \frac{w(\zeta)\,\overline{w(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}\zeta}\, c = \, < (I - WW^*)\, x, \ x > + \, \bar{c}\,\{< x, (I - A\bar{\zeta})^{-1} e >$$
$$- w(\zeta) < W^* x, \quad (I - A\bar{\zeta})^{-1} e >\} + \{< (I - A\bar{\zeta})^{-1} e, \quad x > - < (I -$$
$$- A\,\bar{\zeta})^{-1} e, \ W^* x > \overline{w(\zeta)}\}\, c + \bar{c}\, \frac{1 - w(\zeta)\,\overline{w(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}\zeta}\, c = \, < (I - WW^*) x, \ x > +$$
$$+ \, \bar{c} < x, \quad \frac{I - W\overline{w(\zeta)}}{I - A\bar{\zeta}}\, e > + < \frac{I - W\overline{w(\zeta)}}{I - A\bar{\zeta}}\, e, \ x > \bar{c} + \frac{1 - w(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{1 - \zeta\bar{\zeta}}\, c \geqslant 0.$$

Но положительность этой квадратичной формы эквивалентна (25).

В заключение этого параграфа отметим, что можно вывести аналогичное неравенство, взяв за основу не выражение $I - WW^* \geqslant 0$, а эквивалентное ему $I - W^*W \geqslant 0$. Приведем вид ОМН, получающийся в этом случае:

$$\begin{bmatrix} <(I - W^*W)\,x,\ x> & <\dfrac{\overline{\omega(\zeta)} - W^*}{\bar{\zeta} - A}\, e_*,\ x> \\ * & \dfrac{1 - \omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}\zeta} \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

здесь x — произвольный из K_Θ, $\bar{\zeta} \in \sigma(\Theta)$, $|\zeta| \neq 1$.

§ 3. Эквивалентность ОМН и задачи Сарасона

В этом параграфе мы покажем, что если $\omega(\zeta)$ — решение неравенства (24), то $\omega(A) = W$.

Заметим, что поскольку $WA = AW$, то операторы W и $\omega(A)$ равны, если совпадают их значения на некотором циклическом векторе оператора A. Если в качестве этого вектора выбран вектор e, то $We = \omega(A)\,e \leftrightarrow We - P_\Theta \omega = 0 \leftrightarrow We - \omega \in \Theta H^2$. Таким образом, для завершения доказательства эквивалентности ОМН и задачи достаточно показать, что из ОМН следует $\dfrac{We - \omega}{\Theta} \in H^2$. Огрубим неравенство (24)

$$\begin{bmatrix} <x,\ x> & <\dfrac{\omega(\zeta) - W}{\zeta - A}\, e,\ x> \\ * & \dfrac{1 - \overline{\omega(\zeta)}\,\omega(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} \end{bmatrix} \geqslant 0. \qquad (26)$$

Положим здесь $x = (I - \mu A^*)^{-1} e_*$. Тогда в силу (16)

$$<x,\ x> = \frac{1 - \overline{\Theta(\mu)}\Theta(\mu)}{1 - \bar{\mu}\mu}. \qquad (27)$$

Вычислим $<(\zeta - A)^{-1}(\omega(\zeta) - W)\,e,\ x>$:

$$<\frac{\omega(\zeta)}{\zeta - A}\, e,\ (I - \mu A^*)^{-1} e_*> = <(I - \bar{\mu}A)^{-1} e,\ (\bar{\zeta} - A^*)^{-1} e_*>\, \omega(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{\theta(\zeta)} <e_\mu,\ e_\zeta>\, \omega(\zeta) = \frac{1 - \theta(\zeta)\,\overline{\Theta(\mu)}}{1 - \zeta\bar{\mu}} \cdot \frac{\omega(\zeta)}{\theta(\zeta)}. \qquad (28)$$

Здесь мы воспользовались (15) и (11).

$$<\frac{W}{\zeta - A}\, e,\ (I - \mu A^*)^{-1} e_*> = \frac{1}{\theta(\zeta)} <(I - \bar{\mu}A)^{-1} We,\ e_\zeta> =$$

$$= \frac{(I - \bar{\mu}A)^{-1} We}{\theta}(\zeta). \qquad (29)$$

Вычислим $(I-\bar{\mu}A)^{-1}We = P_{\Theta}\frac{We}{1-t\bar{\mu}} = \frac{We}{1-t\bar{\mu}} - \Theta P_{+}\frac{\bar{\Theta}We}{1-t\bar{\mu}}$. В силу (1.19), $\bar{\Theta}We = \bar{g}$, где $g = tW^*e_* \in H^2$. Тогда (см. (2)) $(I-\bar{\mu}A)^{-1}We = \frac{We}{1-\bar{\mu}t} - \Theta\frac{\overline{g(\mu)}}{1-\bar{\mu}t}$ **(30)**. Итак, объединяя (28) ... (30), получим

$$< \frac{w(\zeta)-W}{\zeta-A}e,\ x> = \frac{1-\Theta(\zeta)\overline{\Theta(\mu)}}{1-\zeta\bar{\mu}}\cdot\frac{w(\zeta)}{\Theta(\zeta)} - \frac{We}{\Theta}(\zeta)\cdot\frac{1}{1-\zeta\bar{\mu}} +$$
$$+\frac{\overline{g(\mu)}}{1-\zeta\bar{\mu}} = \frac{1}{1-\zeta\bar{\mu}}\cdot\frac{w(\zeta)-(We)(\zeta)}{\Theta(\zeta)} + \frac{\overline{g(\mu)}-\overline{\Theta(\mu)}\cdot w(\zeta)}{1-\zeta\bar{\mu}}. \qquad (31)$$

Подставим (27) и (31) в (26), положив $\zeta=\mu$,

$$\frac{1}{1-\zeta\bar{\zeta}}\begin{bmatrix} 1-\overline{\Theta(\zeta)}\Theta(\zeta) & \frac{w(\zeta)-(We)(\zeta)}{\Theta(\zeta)} + \overline{g(\zeta)} - \overline{\Theta(\zeta)}\,w(\zeta) \\ * & 1-\overline{w(\zeta)}\,w(\zeta)\end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Умножая последнее неравенство на положительное число $1-|\zeta|^2$ и складывая его с очевидными неравенствами

$$\begin{bmatrix} \overline{\Theta(\zeta)}\cdot\Theta(\zeta) & \overline{\Theta(\zeta)}\,w(\zeta) \\ * & \overline{w(\zeta)}\,w(\zeta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{\Theta(\zeta)} \\ \overline{w(\zeta)}\end{bmatrix}[\Theta(\zeta),\ w(\zeta)] \geqslant 0;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\overline{g(\zeta)} \\ * & g(\zeta)\overline{g(\zeta)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -g(\zeta)\end{bmatrix}(1,\ -\overline{g(\zeta)}) \geqslant 0,$$

получим неравенство

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{w(\zeta)-(We)(\zeta)}{\Theta(\zeta)} \\ * & 1+g(\zeta)\overline{g(\zeta)}\end{bmatrix} \geqslant 0.$$

А так как $g\in H^2$, то и функция $\frac{w-We}{\Theta}\in H^2$.

Список литературы: 1. *Ефимов А. В., Потапов В. П.* J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории цепей.— Усп. мат. наук, 1973, 28, вып. 1 (169), с. 65—130. 2. *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны — Пика.— Докл. АН АрмССР, 1974, 59, № 1, с. 17—21. 3. *Никольский Н. К.* Лекции об операторе сдвига.— М.: Наука, 1980.— 384 с. 4. *Sarason D.* Generalized interpolation in H^{∞}.— Trans. Amer. Math. Soc., 1967, 127, №2, p. 179—203. 5. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* Об ограниченных операторах, коммутирующих со сжатием класса C_{00} единичного ранга неунитарности. — Функцион. анализ и его прил., 1969, 3, вып. 3, с. 86—87.

Поступила в редколлегию 29. 04. 81.