УДК 517.535.4

М. Л. СОДИН

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НАТУРАЛЬНОГО ПОРЯДКА В ПЛОСКОСТИ

1. Пусть $\boldsymbol{C}$ — комплексная плоскость, $\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел; если $E \subset \boldsymbol{C}$, то tE — гомотетия множества E относительно начала координат с коэффициентом t, E^c — дополнение множества E; $z = re^{i\theta}$; $B = \{z : r < 1\}$;

$$K_{r,1} = \begin{cases} \zeta : r \leqslant |\zeta| < 1, \quad r < 1; \\ \varnothing, \quad r = 1, \\ \zeta : 1 \leqslant |\zeta| < r, \quad r < 1, \end{cases} \qquad H(u, p) = \ln|1 - u| + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{p} \frac{u^n}{n}.$$

$U[\rho, \sigma]$ — множество таких субгармонических функций, что $M(r, v) = \max\limits_{|z|=r} v(z) \leqslant \sigma r^\rho$, $0 < r < \infty$, $v(0) = 0$. $M[\rho, \sigma]$ — множество таких неотрицательных мер ν, что $\nu(r) = \nu(rB) \leqslant \sigma r^\rho$, $0 < r < \infty$.

Если $v \in U[\rho, \sigma]$, то $\nu_v = \frac{1}{2\pi} \Delta v \in M[\rho, \sigma]$ в силу неравенства Иенсена.

Нам понадобится далее следующая из [1] ***Лемма А.*** *Пусть $h(z) \in U[\rho, \sigma]$ — гармоническая функция. Тогда $h(z) \equiv 0$ при нецелом ρ, $h(z) = \operatorname{Re} cz^\rho$ при $\rho \in \boldsymbol{N}$.*

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\rho(r) \to \rho$, $0 < \rho < \infty$. Обозначим $U(\rho(r))$ множество субгармонических функций u в плоскости не выше, чем нормального типа $\bar{\Delta}_u$ относительно $\rho(r)$, $M(\rho(r))$ — множество неотрицательных локально-конечных мер μ, тип которых относительно $\rho(r)$ не выше нормального. Если $u \in U(\rho(r))$, то $\mu_u = \frac{1}{2\pi} \Delta u \in M(\rho(r))$.

Для нецелого ρ и $\mu \in M(\rho(r))$ положим $u_\mu(z) = \int\limits_{B^c} H\left(\frac{z}{\zeta}, [\rho]\right) \times d\mu(\zeta)$.

Пусть теперь $\rho \in \boldsymbol{N}$. Мера μ удовлетворяет условию Брело—Линделефа с постоянной c, если $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \left| c + \frac{1}{\rho} \int\limits_{K_{r,1}} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^\rho} \right| r^{\rho-\rho(r)} = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} r^{\rho-\rho(r)} |\delta_{\mu, c}(r)| < \infty$. Из теоремы Брело—Линделефа следует, что коль скоро $u \in U(\rho(r))$, то мера $\mu = \mu_u$ удовлетворяет условию Брело—Линделефа с некоторой постоянной c. Для этой постоянной c положим $(r > 1)$

$$u_{\mu, c}(z) = \int\limits_{rB \setminus B} H\left(\frac{z}{\zeta}, \rho - 1\right) d\mu(\zeta) + \int\limits_{rB^c} H\left(\frac{z}{\zeta}, \rho\right) d\mu(\zeta) + \\ + \operatorname{Re} z^\rho \delta_{\mu, r}(r).$$

2. Напомним теперь некоторые результаты из [1].

Для $u \in U(\rho(r))$ семейство функций $u_s(z) = \frac{u(sz)}{s^{\rho(s)}}$, $1 \leqslant s < \infty$, предкомпактно в пространстве обобщенных функций D' над основным пространством финитных и бесконечно дифференцируемых в плоскости функций, $\operatorname{Fr}[u]$ — предельное множество семейства u_s при $s \to \infty$. По теореме 1.1.2 [1] $\operatorname{Fr}[u]$ является D' — замкнутым подмножеством $U[\rho, \bar{\Delta}_u]$ инвариантным относительно преобразования $v_\tau(z) = \tau^{-\rho} v(\tau z)$.

Для $\mu \in M(\rho(r))$ введем преобразование $(\cdot)_s$: $\mu_s(E) = \frac{\mu(sE)}{s^{\rho(s)}}$, $1 \leqslant s < \infty$, для любого борелевского множества $E \subset \boldsymbol{C}$. Семейство мер μ_s предкомпактно в D', $\mathrm{Fr}[\mu]$ — предельное множество мер для семейства μ_s при $s \to +\infty$. Теорема 1.2.2 [1] утверждает, что $\mathrm{Fr}[\mu]$ D' — замкнутое подмножество $M[\rho, \overline{\Delta}_\mu]$ инвариантное относительно преобразования $\nu_\tau(E) = \tau^{-\rho}\nu(\tau E)$.

Для $u \in U(\rho(r))$ положим $\nu_{\mathrm{Fr}[u]} = \{\nu = \nu_v,\ v \in \mathrm{Fr}[u]\}$. Тогда ([1], п. 1.3.) $\nu_{\mathrm{Fr}[u]} = \mathrm{Fr}[\mu_u]$ **(1)**.

Пусть ρ — нецелое. Тогда для произвольной меры $\nu \in M[\rho, \sigma]$ функция $v_\nu(z) = \int\limits_C H\left(\frac{z}{\zeta}, [\rho]\right) d\nu(\zeta)$ **(2)** принадлежит $U[\rho, \sigma]$, и обратно, любая функция из $U[\rho, \sigma]$ в силу леммы А имеет такой вид. Для $\mu \in M(\rho(r))$, $\rho(r) \to \rho$, положим $v_{\mathrm{Fr}[\mu]} = \{v = v_\nu \nu \in \mathrm{Fr}[\mu]\}$. Теперь соотношение (1) можно дополнить $v_{\mathrm{Fr}[\mu]} = \mathrm{Fr}[u_\mu]$ **(3)**.

3. При $\rho \in N$ интеграл в правой части (2) может расходиться в точке $\zeta = 0$.

Пусть $\Delta_v = \sup\limits_{0<r<\infty} r^{-\rho} M(r, v)$. Для меры ν и постоянной c положим $\delta_{\nu, c}(r) = c + \frac{\operatorname{sgn}(\ln r)}{\rho} \int\limits_{K_{r,1}} \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta^\rho}$; $\delta_{\nu, c} = \sup\limits_{0<r<\infty} |\delta_{\nu, c}(r)|$.

Пусть $v \in U[\rho, \sigma]$. В силу теоремы Брело—Адамара

$$v(z) = \int\limits_B H\left(\frac{z}{\zeta}, \rho - 1\right) d\nu(\zeta) + \int\limits_{B^c} H\left(\frac{z}{\zeta}, \rho\right) d\nu(\zeta) + \operatorname{Re} P_\rho(z) =$$

$$= \operatorname{Re} z^\rho \delta_{\nu, p_\rho}(r) + \int\limits_{rB} H\left(\frac{z}{\zeta}, \rho - 1\right) d\nu(\zeta) +$$

$$+ \int\limits_{rB^c} H\left(\frac{z}{\zeta}, \rho\right) d\nu(\zeta) + \operatorname{Re} P_{\rho-1}(z), \qquad \textbf{(4)}$$

где $\nu = \nu_v$, $P_\rho(z) = p_\rho z^\rho + P_{\rho-1}(z)$ — полином степени ρ.

Следующая теорема является аналогом теоремы Брело—Линделефа для класса $U[\rho, \sigma]$, и ее доказательство повторяет доказательство теоремы Линделефа, данное Н. И. Ахиезером [2]. (См. также [3], гл. II, § 4).

Теорема 1. *Пусть* $v \in U[\rho, \sigma]$, $\rho \in N$, $\nu = \nu_v$. *Тогда* $\delta_{\nu, p_\rho} \leqslant \left(4 + \frac{e^\rho}{\rho}\right)\Delta_v$ **(5)**, *функция* $v_\nu(z) = \int\limits_B H\left(\frac{z}{\zeta}, \rho - 1\right) d\nu(\zeta) + \int\limits_{B^c} H\left(\frac{z}{\zeta}, \rho\right) d\nu(\zeta)$ **(6)** *принадлежит* $U[\rho, \sigma]$, *и* $v(z) = v_\nu(z) + \operatorname{Re} hz^\rho$ **(7)**.

Доказательство теоремы 1. Докажем сперва (5).

Применяя формулу (2.6) гл. I [3] к функции $f(z)=z-\zeta$; $\zeta\neq 0$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|re^{i\theta}-\zeta|e^{-i\rho\theta}d\theta=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\bar\zeta^\rho}{r^\rho}, & r>|\zeta|,\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{r^\rho}{\zeta^\rho}, & r\leqslant|\zeta|.\end{cases}\tag{8}$$

Далее

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}H\left(\frac{r}{\zeta},\ \rho-1\right)e^{-i\rho\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|re^{i\theta}-\zeta|e^{-i\rho\theta}d\theta;\tag{9}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}H\left(\frac{z}{\zeta},\ \rho\right)e^{-i\rho\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|re^{i\theta}-\zeta|e^{-i\rho\theta}d\theta+\frac{1}{2}\frac{r^\rho}{\zeta^\rho};\tag{10}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re}P_\rho(re^{i\theta})\,e^{-i\rho\theta}d\theta=\frac{1}{2}p_\rho r^\rho.\tag{11}$$

Воспользовавшись (8)—(11) и (4), запишем

$$c_\rho(r,\ v)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}v(re^{i\theta})\,e^{-i\rho\theta}d\theta=\int\limits_C d\nu(\zeta)\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|re^{i\theta}-\zeta|\,e^{-i\rho\theta}d\theta+$$
$$+\frac{1}{2\rho}\int\limits_{B^0}\frac{r^\rho}{\zeta^\rho}d\nu(\zeta)+\frac{1}{2}p_\rho r^\rho=-\frac{1}{2\rho}\int\limits_{rB}\frac{\bar\zeta^\rho}{r^\rho}d\nu(\zeta)-\frac{1}{2}\delta_{\nu,\,p_\rho}(r)\,r^\rho.$$

Отсюда

$$|\delta_{\nu,\,p_\rho}(r)|=\left|2c_\rho(r,\ v)\,r^{-\rho}+\frac{1}{\rho}\int\limits_{rB}\frac{\bar\zeta^\rho}{r^{2\rho}}d\nu(\zeta)\right|\leqslant$$
$$\leqslant 4r^{-\rho}T(r,\ v)+\frac{1}{\rho}\frac{\nu(r)}{r^\rho}\leqslant\left(4+\frac{e^\rho}{\rho}\right)\Delta_v.$$

Таким образом, неравенство (5) доказано.

В силу оценок

$$\int\limits_{rB}H\left(\frac{z}{\zeta},\ \rho-1\right)d\nu(\zeta)\leqslant C_{\rho-1}r^{\rho-1}\int\limits_0^r\frac{\nu(t)}{t^\rho}dt\leqslant C_{\rho-1}e^\rho\Delta_v r^\rho;$$

$$\int\limits_{rB^0}H\left(\frac{z}{\zeta},\ \rho\right)d\nu(\zeta)\leqslant C_\rho r^{\rho+1}\int\limits_r^\infty\frac{\nu(t)}{t^{\rho+2}}dt\leqslant C_\rho e^\rho\Delta_v r^\rho,$$

а также (4) и (5) выполнено (6). В силу (6) и леммы А верно (7). Теорема 1 доказана.

4. Теорема 1 позволяет перенести соотношение (3) на случай целого порядка.

Пусть μ удовлетворяет условию Брело—Линделефа с постоянной c, $\nu \in \mathrm{Fr}[\mu]$. Обозначим $H_{\nu, c}$ — множество всевозможных предельных точек ограниченной величины $s_j^{\rho-\rho(s_j)}\delta_{\mu, c}(s_j)$, где s_j — такая последовательность, что $\mu_{s_j} \to \nu(D')$. Положим $v_{\mathrm{Fr}[\mu], c} = \{v(z) = v_\nu(z) + \mathrm{Re}\, hz^\rho,\ \nu \in \mathrm{Fr}[\mu],\ h \in H_{\nu, c}\}$.

Теорема 2. *Пусть* $\rho \in N$. *Тогда* $v_{\mathrm{Fr}[\mu], c} = \mathrm{Fr}[u_{\mu, c}]$.

Доказательство теоремы 2. Не снижая общности, считаем, что $B \cap \mathrm{supp}\, \mu = \varnothing$. Тогда из теоремы 1 и представления

$$\frac{u(sz)}{s^{\rho(s)}} = \int_B H\left(\frac{z}{\zeta}, \rho - 1\right) d\mu_s(\zeta) + \int_{B^c} H\left(\frac{z}{\zeta}, \rho\right) d\mu_s(\zeta) + $$
$$+ \mathrm{Re}\, s^{\rho-\rho(s)}\delta_{\mu, c}(s)\, z^\rho$$

сразу же следует утверждение теоремы 2.

Отметим, что коль скоро $\varlimsup_{r\to\infty} r^{\rho-\rho(r)} = \infty$, постоянная c однозначно определяется мерой μ, в противном случае c является свободным параметром.

Список литературы: 1. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций.— Мат. сб., 1979, 108, № 2, с. 147—167. 2. *Ахиезер Н. И.* Новий вивід необхідних умов приналежності цілої функції цілого порядку до певного типу.— Зап. фіз.-мат. відділу АН УРСР, 1927, 2, № 3, с. 29—33. 3. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.—587 с.

Поступила в редколлегию 18.01.82.