УДК 517.9

В. С. РАБИНОВИЧ

ОБ АЛГЕБРАХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ. I

1. Рассмотрим дифференциально-разностный оператор с частными производными:

$$(Au)(x)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\alpha|<m} a_{\alpha j}(x)\,D^{\alpha}u(x-h_{\alpha j}),\quad x\in R^n,\ h_{\alpha j}\in R^n. \tag{1}$$

Коэффициенты $a_{\alpha j}(x)\in C^{\infty}(R^n)$ и удовлетворяют оценкам

$$|\partial_x^{\beta}a_{\alpha j}(x)|\leqslant C^{j}_{\alpha\beta}(x)\,(1+|x|)^{\rho}, \tag{2}$$

где $0\leqslant C^{j}_{\alpha\beta}(x)\leqslant C^{j}_{\alpha\beta}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}C^{j}_{\alpha\beta}(x)=0$, если $\beta\neq 0$. Символ оператора (1) как псевдодифференциального оператора (п. д. о.) имеет вид

$$A(x,\ \xi)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\alpha|<m} a_{\alpha j}(x)\,\xi^{\alpha}e^{-i(\xi,\ h_{\alpha j})}, \tag{3}$$

и его можно записать $A(x,\ \xi)=a(x,\ \xi,\ \xi)$, где $a(x,\xi,\eta)=\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{|\alpha|<m} a_{\alpha j}(x)\,\eta^{\alpha}e^{-i(\xi,\ h_{\alpha j})}$ медленно меняется в смысле [1] по x и η и не обладает этим свойством по ξ.

В статье рассматриваются алгебры п. д. о., содержащие операторы вида (1) и более общие. Установлены необходимые и достаточные условия нетеровости операторов вида (1) в пространствах Соболева с весом, а также операторов, двойственных к ним, относительно преобразования Фурье, и более общих операторов (теорема 6).

2. В статье испозьзуются стандартные обозначения: $C^{\infty}(R^n)$; $S(R^n)$, $S'(R^n)$ — пространства Шварца; $C_b^{\infty}(R^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, ограниченных вместе со всеми производными; $CAP^{\infty}(R^n)$ — подпространство $C_b^{\infty}(R^n)$, состоящее из бесконечно дифференцируемых почти периодических функций.

Определение 1. *Будем говорить, что* $a(x,\ \xi)\in S^{m,\ \rho}$, *если для любых мультииндексов* α, β *существуют такие константы* $C_{\alpha\beta}>0$, *что*

$$|\partial_x^{\beta}\partial_{\xi}^{\alpha}a(x,\ \xi)|\leqslant C_{\alpha\beta}\langle x\rangle^{\rho}\langle\xi\rangle^{m},\quad (\langle x\rangle=(1+|x|^2)^{1/2}. \tag{4}$$

Наилучшие константы в (4) задают в $S^{m,p}$ топологию пространства Фреше.

Сопоставим $a(x,\xi) \in S^{m,p}$ п. д. о.:

$$(Au)(x) = a(x,\ D)u = (2\pi)^{-n} \int \int a(x,\ \xi)\, e^{-i(x-y,\ \xi)} dy d\xi,\quad u \in S(R^n), \tag{5}$$

где интеграл в (5) понимается как осциллирующий ([2], [3]). Класс п. д. о., отвечающий символам $a(x,\ \xi) \in S^{m,\,p}$, обозначим через $LS^{m,\,p}$ (вообще, если Φ класс символов, то $L\Phi$ класс п. д. о.). Для операторов из $LS^{m,\,p}$ справедливы стандартные для любого исчисления п. д. о. факты о композиции, переходе к сопряженному оператору.

Определение 2. *Замыкание $S(R^n)$ по норме*

$$\| u \|_{S,\,r} = \| \langle x\rangle^r \langle D\rangle^S u \|_{L_2(R^n)}$$

обозначим через H_r^S.

Отметим, что $H_0^S \equiv H^S$ — пространство Соболева, H_r^0 — пространство L_0 со степенным весом $\langle x\rangle^r$. Индекс 0 в дальнейшем писать не будем.

Положим $H_r^\infty = \bigcap\limits_S H_r^S$; $H_r^{-\infty} = \bigcup\limits_S H_r^S$; $H_\infty^S = \bigcap\limits_S H_r^S$; $H_{-\infty}^S = \bigcup\limits_r H_r^S$; $H_\infty^\infty = \bigcap\limits_{S,\,r} H_r^S$; $H_{-\infty}^{-\infty} = \bigcup\limits_{S,\,r} H_r^S$. В пересечениях вводится топология проективного, а в объединениях — топология индуктивного предела. Отметим, что

$$H_\infty^\infty = S(R^n);\quad H_{-\infty}^{-\infty} = S'(R^n).$$

Предложение 1. *Оператор $A \in LS^{m,\,p}$ ограничен из H_r^S в H_{r-p}^{S-m} для любых S и r и*

$$\| Au \|_{S-m,\ r-p} \leqslant C\Big(\sum_{|\alpha|+|\beta|<N} C_{\alpha\beta}\Big) \| u \|_{s,\,r} \quad (4),$$

где константы C, N зависят только от s, r, m, p, n.

Доказательство предложения 1 использует стандартную технику п. д. о. и теорему об ограниченности п. д. о. из [4].

3. Классы п. д. о. $L\Omega_1^{m,p}$, $L\Omega_2^{m,p}$.

Определение 3. *Будем говорить, что символ $A(x,\ \xi) \in \Omega_1^{m,p}$,* если 1) $A(x,\ \xi) \in S^{m,p}$; 2) $A(x,\ \xi) = a(x,\ \xi,\ \xi)$, *где $a(x,\ \xi,\ \eta)$ удовлетворяет оценкам*

$$|\partial_x^\gamma \partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta a(x,\ \xi,\ \eta)| \leqslant C_{\alpha\beta\gamma}(\eta) < x >^p < \eta >^m \quad (5),$$

где $\lim\limits_{\eta\to\infty} C_{\alpha\beta\gamma}(\eta) = 0$, $\forall \beta = 0$, $\forall \alpha$, γ.

Примером оператора из $L\Omega_1^{m,p}$ является дифференциально-разностный оператор (1).

В определенном смысле двойственным к $\Omega_1^{m,p}$ является класс $\Omega_2^{m,p}$, определяемый следующим образом:

Определение 4. *Будем говорить, что символ* $A(x, \xi)\in \Omega_2^{m,p}$, *если* 1) $A(x, \xi)\in S^{m,p}$; 2) $A(x,\xi)=a(x,x,\xi)$, *где* $a(x, y, \xi)$ *удовлетворяет оценкам*

$$|\partial_x^\gamma\partial_y^\beta\partial_\xi^\alpha a(x, y, \xi)|\leqslant C_{\alpha\beta\gamma}(y)<y>^p<\xi>^m \tag{6}$$

и $\lim\limits_{y\to\infty} C_{\alpha\beta\gamma}(y)=0$; $\forall\beta\neq 0$; $\forall\alpha$, γ.

Примером оператора из $L\Omega_2^{m,p}$ является оператор вида

$$A(x, D)u=\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant m} b_j(x)a_{\alpha j}(x)D^\alpha;\ b_j(x)\in CAP^\infty(R^n), \tag{7}$$

$a_{\alpha j}(x)\in C^\infty(R^n)$ и удовлетворяет оценкам (2).

Через $\sigma: LS^{m,p}\to S^{m,p}$ обозначим отображение, сопоставляющее оператору A его символ $\sigma_A(x, \xi)$.

Оператору $A\in L\Omega_1^{m,p}$ *сопоставим семейство операторов* $A_\eta=a(x, D, \eta)$, зависящих от параметра $\eta\in R^n$.

Предложение 2. *Пусть* $A\in L\Omega_1^{m_1,p_1}$; $B\in LS^{m_2,p_2}$, *тогда*

а) $\sigma_{AB}(x, \xi)=\sigma_{A_\eta B}(x, \xi)|_{\eta=\xi}+T(x, \xi)$, *где* $T(x, \xi)\in S^{m_1+m_2,p_1+p_2}$ *и удовлетворяет оценкам*

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta T(x, \xi)|\leqslant C_{\alpha\beta}(\xi)<x>^{p_1+p_2}<\xi>^{m_1+m_2}, \tag{8}$$

$$\textit{где}\ \lim_{\xi\to\infty} C_{\alpha\beta}(\xi)=0,\ \forall\alpha,\ \beta. \tag{9}$$

в) Если $A\in T\Omega_2^{m,p}$, *то формально сопряженный оператор* $A^*\in L\Omega_1^{m,p}$ *и*

$$\sigma_{A^*}(x, \xi)=\sigma^*_{A_2}(x, \xi)|_{\eta=\xi}+T(x, \xi), \tag{10}$$

где для $T(x, \xi)$ *выполнены оценки вида* (8), (9), *где* $p_1+p_2=p_{m_1+m_2+m}$.

Аналогичное предложение с очевидными изменениями в формулировках имеет место для класса $L\Omega_2^{m,p}$.

Наметим доказательство части а) предложения 2. Остальные доказательства аналогичны.

Символ произведения п. д. о. A и B запишем в виде

$$\sigma_{AB}(x, \xi)=(2\pi)^{-n}\iint A(x, \xi+\zeta)B(x+y, \xi)e^{-i(y,\zeta)}dyd\zeta. \tag{11}$$

Интеграл в (11) понимается как осциллирующий ([2], [3]). Разложим $A(x, \xi+\zeta)$ по формуле Лагранжа:

$$A(x,\xi+\zeta)=a(x,\xi+\zeta,\xi)+\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\int_0^1\partial\eta_j a(x, \xi+\zeta, \xi+\theta\zeta)\,d\theta \tag{12}$$

и подставим (12) в формулу (11). Проведем интегрирование по частям, тогда

$$\sigma_{AB}(x,\ \xi) = (2\pi)^{-n}\iint a(x,\ \xi+\zeta,\ \xi)\,B(x+y,\ \xi)\,e^{-i(y,\zeta)}dyd\zeta +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 d\theta\iint d_{\eta_j}a(x,\ \xi+\zeta,\ \xi+\theta\zeta)\,D_{x_j}B(x+y,\ \xi)\,e^{-(y,\zeta)}dyd\zeta. \quad (13)$$

Легко в деть, что первый двойной интеграл в (13) есть $\sigma_{A\circ B}(x,\ \xi)$. Обозначим второе слагаемое в (13) через $T(x,\ \xi)$. Используя технику осцилляторных интегралов [2] так же, как и в работе [5], получаем для $T(x,\ \xi)$ оценку (8).

4. В этом пункте будут сформулированы основные результаты работы о нетеровости и регулярности рассматриваемых операторов.

Теорема 1. *Пусть* $A\in L\Omega_1^{m,p}\ (L\Omega_2^{m,p})$, *существуют такие числа* $K>0$, $C>0$, *что оператор-функция* $A_\eta = a(x,\ D,\ \eta)$: $\boldsymbol{R}^n\to\to LS^{m,p}$ $(A_y = a(x,\ y,\ D):\boldsymbol{R}^n\to LS^{m,p})$ *обратима из* H_p в L_2 *при* $|\eta|\geqslant K$ (*из* H_p *в* L_2 *при* $|y|\geqslant K$) *и* $\|A_\eta^{-1}u\|_{H_p}\leqslant C|\eta|^{-m}\|u\|_{L_2}$, $|\eta|\geqslant K$ **(14)** $\|A_y^{-1}u\|_{H^m}\leqslant C|y|^{-p}\|u\|_{L_2}$, $|y|\geqslant K$ **(14′)** *тогда существует такой оператор* $R\in LS^{-m,-p}$, *что* $RA = I+T_1$; $AR = I+T_2$, *где* $\sigma_{T_j}(x,\ \xi)\in C_{\theta,0}^{\infty}(\boldsymbol{R}_x^n\times\boldsymbol{R}_\xi^n)$ $(\in C_{0,\theta}^{\infty}(\boldsymbol{R}_x^n\times\boldsymbol{R}_\xi^n))$. Здесь $C_{\theta,0}^{\infty}(\boldsymbol{R}_x^n\times\boldsymbol{R}_\xi^n)$, подпространство C_θ^∞ $(\boldsymbol{R}_x^n\times\boldsymbol{R}_\xi^n)$, состоящее из таких функций $d(x,\ \xi)$, что $\lim\limits_{\xi\to\infty}a(x,\ \xi)=0$ равномерно по x. Аналогично определяется $C_{0,}^{\infty}$ в $(\boldsymbol{R}_x^n\times\boldsymbol{R}_\xi^n)$.

Следствие 1. *Пусть* $A\in L\Omega_1^{m,p}\ (A\in L\Omega_2^{m,p})$, *выполнены условия теоремы 1, тогда* $\{\forall s\in\boldsymbol{R}\ \forall u\in H_s^{-\infty}$ из $Au\in H_s^{\infty}\Rightarrow u\in H_s^{\infty}\}$ $/\{\forall s\in R\ \forall u\in H_{-\infty}^{s}$ из $Au\in H_\infty^s\Rightarrow u\in H_\infty^s\}/$.

Пусть теперь $A\in L\Omega_1^{m,p}\cap L\Omega_2^{m,p}$. В этом случае его символ можно записать $A(x,\ \xi) = a^{(1)}(x,\ \xi,\ \xi)$ **(15)**, где $a^{(1)}(x,\ \xi,\ \eta)$ удовлетворяет оценкам (5), и $A(x,\xi) - a^{(2)}(x,\ x,\ \xi)$ **(16)**, где $a^{(2)}(x,\ y,\ \xi)$ удовлетворяет оценкам (6).

Таким образом, оператору $A\in L\Omega_1^{m,p}\cap L\Omega_2^{m,p}$ можно сопоставить две оператор-функции: $A_\eta^{(1)} = a^{(1)}(x,\ D_x,\ \eta)$; $A_y^{(2)} = a^{(2)}(x,\ y,\ D_x)$, определенные на $\boldsymbol{R}^n$ со значениями в $LS^{m,p}$.

Теорема 2. *Пусть* $A\in L\Omega_1^{m,p}\cap L\Omega_2^{m,p}$, *оператор-функции* $A_\eta^{(1)}$, $A_g^{(2)}$ *удовлетворяют условия теоремы 1, тогда существует такой оператор* $R\in LS^{-m,-p}$, *что* $RA = I+T_1$; $AR = I+T_2$, *где* $\sigma_{T_j}(x,\ \xi)\in C_{0,0}^{\infty}(\boldsymbol{R}_x^n\times\boldsymbol{R}_\xi^n)$; $(C_{0,0}^{\infty}(\boldsymbol{R}_x^n\times\boldsymbol{R}_\xi^n) = C_{0,\theta}^{\infty}(\boldsymbol{R}_x^n\times\boldsymbol{R}_\xi^n)\cap C_{\theta,0}^{\infty}(\boldsymbol{R}_x^n\times\times\boldsymbol{R}_\xi^n))$. Как следует из [5], если оператор $T\in LS^{0,0}$ и таков, что $\lim\limits_{|x|+|\xi|\to\infty}\sigma_T(x,\ \xi)=0$, то он компактен в H_r^s.

Из теоремы 2 вытекают несколько следствий.

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы 2, то оператор* A *нетеров из* H_r^s *в* H_{r-p}^{s-m} *для любых* s, r.

Следствие 3. *Пусть* $A \in L\Omega_1^{m,p} \cap L\Omega_2^{m,p}$ *и существуют такие константы* $C > 0$; $K > 0$, *что* $\mathrm{Re}\,(<x>^{-p}A_\eta v,\ v) \geqslant \geqslant C\,|\eta|^{-m}\,\|v\|_{L_2}^2$; $|\eta| \geqslant K$ $\mathrm{Re}\,(<D>^{-m}A_y v,\ v) \geqslant C\,|y|^{-p}\,\|v\|_{L_2}^2$, $|y| \geqslant K$, *тогда* A *нетеров из* H_r^s *в* H_{r-p}^{s-m} *и его индекс равен нулю.*

Следствие 4. *Если выполнены условия теоремы* 2, *то* $\{u \in S'(\boldsymbol{R}^n),\ Au \in S(\boldsymbol{R}^n) \Rightarrow u \in S(\boldsymbol{R}^n)\}$.

Доказательство теоремы 1 и 2 опирается на предложение 2 и следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть функция* $a(x, \xi, \eta)$ *удовлетворяет оценкам* (5) *и выполнено условие теоремы* 1, *тогда функция* $b(x, \xi, \eta) = \sigma_{A_\eta}^{-1}(x, \xi)$ *при* $|\eta| \geqslant K$ *удовлетворяет следующими оценкам* $\forall\alpha, \beta, \gamma$: $|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\gamma b(x, \xi, \eta)| \leqslant C_{\alpha\beta\gamma}(\eta) <x>^{-p}<\xi>^{-m}$, *где* $0 \leqslant C_{\alpha\beta\gamma}(\eta) \leqslant C_{\alpha\beta\gamma}$ и $\lim\limits_{\eta\to\infty} C_{\alpha\beta\gamma}(\eta) = 0$, $\forall\alpha, \beta$, $\forall\gamma = 0$. Справедливо также двойственное утверждение.

Теорема 2 вытекает из теоремы 1 с помощью следующего построения. Пусть R' и R'' операторы, такие, что $R'A = I + T_1'$; $AR' = I + T_2'$, $R''A = I + T_1''$; $AR'' = I + T_2''$. Существование таких операторов утверждается в теореме 1. Положим $R = -R'AR'' + + R' + R''$, тогда $RA - I = T_1'T_1''$; $AR - I = T_2'T_2''$, где T_j', $T_j'' \in \in LS^{0,0}$, $j = 1, 2$ и таковы, что $\sigma_{T_j'}(x, \xi) \in C_{b,0}^\infty(\boldsymbol{R}_x^n \times \boldsymbol{R}_\xi^n)$, $\sigma_{T_j''}(x, \xi) \in C_{0,b}^\infty(\boldsymbol{R}_x^n \times \boldsymbol{R}_\xi^n)$. Используя формулу композиции п. д. о. классов $LS^{m,p}$ [5], нетрудно убедиться в том, что $\sigma_{T_j'T_j''}(x, \xi) \in \in C_{0,0}^\infty(\boldsymbol{R}_x^n \times \boldsymbol{R}_\xi^n)$.

5. Спектральные свойства операторов класса $L\Omega_1^{m,p} \cap L\Omega_2^{m,p}$. Доказательства следующих ниже теорем 3, 4 аналогичны доказательствам в монографии [3], с. 77—80, 197—200.

Пусть $A \in L\Omega_1^{m,p} \cap L\Omega_2^{m,p}$. Рассмотрим этот оператор как неограниченный в $F_2(\boldsymbol{R}^n)$ с областью определения H_p^m и обозначим его через A_0. Если выполнены условия теоремы 2, то A_0 — замкнутый линейный оператор в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$.

Теорема 3. *Пусть* $A \in L\Omega_1^{m,p} \cap L\Omega_2^{m,p}$ $(m > 0,\ p > 0)$ *и выполнены условия теоремы* 2, *тогда для спектра выполнена одна из следующих возможностей:*

а) *спектр оператора* A_0 — *вся комплексная плоскость,*

в) *спектр оператора* A_0 — *дискретное подмножество* C, *а резольвента* $(A_0 - \lambda I)^{-1}$ *конечно-мероморфная оператор-функция параметра* λ; *все собственные функции оператора* A_0 *принадлежат* $S(\boldsymbol{R}^n)$.

Теорема 4. *Пусть* $A \in L\Omega_1^{m,p} \cap L_2^{m,p}\Omega$ $(m > 0,\ p > 0)$ *и выполнены условия теоремы* 2. *Если* $A = A^*$, *тогда* A_0 — *самосопряженный оператор в* $L_2(\boldsymbol{R}^n)$, *его спектр совпадает со множеством собственных значений.* В L_2 $(\boldsymbol{R}^n)$ *существует полная ортонормирован-*

ная система $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ *собственных функций* A_0, *принадлежащих* $S(\boldsymbol{R}^n)$.

6. Полу почти периодические символы.

Определение 5. *Символ* $A(x, \xi) \in \Omega_j^{m,p}$ $(j=1, 2)$ *будем называть полу почти периодическим, если функция* $a(x, \xi, \eta)$ $(a(x, y, \xi))$ *равномерная почти периодическая функция по переменной* ξ, (x) *соответственно, при фиксированных значениях остальных переменных.*

Классы полу почти периодических символов будем обозначать через $\Pi\Omega_j^{m,p}$, $j=1, 2$, *а соответствующие классы п. д. о. через* $L\Pi\Omega_j^{m,p}$. Символы операторов (1), (7) — характерные примеры полу почти периодических символов.

Определение 6. *Обозначим через* $I_j^{m,p}$ $(j=1, 2)$ *класс таких символов из* $S^{m,p}$, *что оценки* (4) *имеют место с такими функциями* $C_{\alpha\beta}(\xi)$ $(C_{\alpha\beta}(x))$, *что* $\lim\limits_{\xi\to\infty} C_{\alpha\beta}(\xi)=0$, $(\lim\limits_{x\to\infty} C_{\alpha\beta}(x)=0)$, $\forall\alpha, \beta$. *Положим* $I^{m,p} = I_1^{m,p} \cap I_2^{m,p}$.

Отметим, что операторы $A \in LI^{m,p}$ компактны из H_r^s в H_{r-p}^{s-m} и множество $LI^{m,p}$ плотно во множестве компактных операторов, действующих из H_r^s в H_{r-p}^{s-m}.

Пусть $A \in L\Omega_1^{m,p}$ $(A \in L\Omega_2^{m,p})$. Тогда, положим $K_1(A) = \lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{|\eta|<R} \| <\eta>^{-m} A_\eta^{(1)} \| (H^m \to L_2)$. $K_2(A) = \lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{|y|<R} \| <y>^{-p} A_y^{(2)} \| (H^m \to L_2)$.

Теорема 5. 1) *Пусть* $A \in L\Pi\Omega_j^{m,p}$ $(j=1, 2)$, *тогда* $\||A\||_j^{m,p} = \inf\limits_{Q\in LI_j^{m,p}} \|A-Q\| (H_r^s \to H_{r-p}^{s-m}) = K_j(A)$; 2) *Пусть* $A \in L\Pi\Omega_1^{m,p} \cap L\Pi\Omega_2^{m,p}$, *тогда* $\||A\||^{m,p} = \inf\limits_{Q} \|A-Q\| H_r^s \to H_{r-p}^{s-m}) = \max\{k_1(A), k_2(A)\}$, *где* inf *берется по множеству всех компактных операторов, действующих из* H_r^s *в* H_{r-p}^{s-m}.

Из теоремы 5 следует, что условия теоремы 2 не только достаточны, но и необходимы для нетеровости оператора $A \in L\Pi\Omega_1 \cap L\Pi\Omega_2$.

Результаты предыдущих пунктов работы применим к исследованию оператора вида

$$A = \sum_{j,k=1}^{N} a_j(x)\, b_{jk}(x, D)\, T\eta_k, \tag{17}$$

где $a_{jk}(x) \in CAP^\infty(\boldsymbol{R}^n)$; $(T_{h_k}u)(x) = u(x-h_k)$, $h_k \in \boldsymbol{R}^n$;

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha b_{jk}(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}^{jk}(x, \xi) <x>^p <\xi>^m$$

и $\lim\limits_{\xi\to\infty} C_{\alpha\beta}^{jk}(x, \xi) = 0$, если $\alpha \neq 0$, равномерно по x, $\lim\limits_{x\to\infty} C_{\alpha\beta}^{jk}(x, \xi) = 0$, если $\beta \neq 0$, равномерно по ξ.

Если $b_{jk}(x, D)$ дифференциальные операторы, то оператор (18) есть дифференциально-разностный оператор с полу почти периодическими коэффициентами. Менее общие операторы рассмотрены в работе [6].

Из теорем 2 и 5 вытекает следующая

Теорема 6. *Оператор* (18) *нетеров оператор из* H_r^s *в* H_{r-p}^{s-m} *тогда и только тогда, когда для оператор-функций*

$$A_\eta^{(1)} = \sum_{j,k=1}^{N} a_j(x)\, b_{jk}(x, \eta)\, T_{h_k};$$

$$A_y^{(2)} = \sum_{j,k=1}^{N} a_j(x)\, b_{jk}(y, D_x)\, T_{h_k}$$

выполнены условия теоремы 2.

Следствие 5. *Если для оператор-функций* $A_\eta^{(1)}$, $A_y^{(2)}$ *выполнены условия следствия 3, то оператор* (18) *нетеров оператор и* H_r^s *в* H_{r-p}^{s-m} *и его индекс равен нулю.*

Замечание. Существуют операторы вида (18), индекс которых не равен нулю.

Список литературы: 1. *Грушин В. В.* Псевдодифференциальные операторы в R^n с ограниченными символами.— Функцион. анализ и его прилож., 1970, 4, № 3, с. 37—50. 2. *Kumano-go H., Taniguchi K.* Oscillatory integral of symbol of pseudodifferental operators on R^n and operators of Fredholm type. Proc. J. Acad. 49 (1973), p. 397—402. 3. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.—М., 1978. 4. *Calderon A. P. Vaillancourt R.* A class of bounded preudodifferential operators. Proc. Nat. Acad. Sci USA, 69 (1972), p. 1185—1187. 5. *Рабинович В. С.* О нетеровости псевдодифференциальных операторов с символами класса $S_{\rho,\delta}^m$ $(0 \leqslant \delta = \rho < 1)$. —Мат. заметки, 1980, **27**, №3, с. 457—466. 6. *Рабинович В. С.* О дифференциально-разностных уравнениях на R^n и в полупространстве.— Докл. АН СССР, 1978, 243, № 5, с. 1131—1133.

Поступила в редколлегию 25.04.80.