УДК 517.9

В. О. МИЩЕНКО

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ПО ОБОБЩЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ МАТРИЦЕ АБСТРАКТНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Рассматривается дифференциальное выражение $L[u] = -u'' + Au + c(x)u$ $(0 < x < \infty)$ **(1)** с операторными коэффициентами: $A = A^* \geqslant \gamma > 0$ — неограниченный, $c(x)$ — ограниченный операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $|\cdot|$. Это выражение определяет на дважды сильно непрерывно дифференцируемых финитных вектор — функциях, удовлетворяющих условию $u'(0) = Bu(0)$ $(B \in B(H))$и (2), некоторый, вообще говоря, несимметрический оператор L.

Как известно, одномерный скалярный оператор Шредингера может быть эффективно восстановлен по своей спектральной (в самосопряженном случае [1]), а в несамосопряженном скалярном или матричном случае — по обобщенной спектральной функции или матрице [2]. Для многомерного самосопряженного оператора Шредингера имеются теоремы единственности в обратной задаче определения потенциала по спектральному ядру [3,4]. В данной статье рассматривается процедура восстановления коэффициентов абстрактного аналога оператора Шредингера (1)—(2) по его обобщенной спектральной матрице R и формулируются соответствующие необходимые и достаточные условия на R.

Оператор A из (1) определяет семейство операторов $A_{\sigma,\alpha}: H_{\sigma,\alpha} \to H$ $(A_{\sigma,\alpha} = A^{\alpha} \exp(\sigma\sqrt{A}))$ **(3)**, отображающих на H гильбертовы **пространства шкалы** $\{H_{\sigma,\alpha}\}$ **(σ, $\alpha \in R$),** полученные пополнением **областей $D(A_{\sigma,\alpha})$ по нормам** $|h|_{\sigma,\alpha} = |A_{\sigma,\alpha}h|$ $(h \in H_{\sigma,\alpha})$ **(4).**

Нами рассматриваются операторы, которые удовлетворяют условию, гарантирующему наличие обобщенных собственных функций **определенного к**ласса и соответствующих операторов преобразования.

Условие. При $n = 0,2$ оператор-функции $A_{x,n}BA_{-x,-n}$ $A_{x,n}B^*A_{-x,-n}$ и $A_{x,n}c(y)A_{-x,-n}$, $A_{x,n}c^*(y)A_{-x,-n}$ аргументов x $y \geqslant 0$ локально ограничены по норме и слабо измеримы.

Определение обобщенной спектральной матрицы (ОСМ) линейного оператора и построение ОСМ для оператора Шредингера дано в [5]. Для оператора L (1)—(2) ОСМ — это линейное непрерывное отображение R топологического пространства Z суммируемых на вещественной оси целых четных функций экспоненциального типа (о Z см., напр., [2, 6]) в пространство $B(H_{0,\frac{1}{4}}, H)$

ограниченных операторов из $H_{0,\frac{1}{4}}$ в H. ОСМ R порождает обобщенное равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty (\varphi(x),\ \psi(x))\,dx = [\overline{\Omega_\psi^*}R\tilde{\Omega}_\varphi], \tag{5}$$

где $\psi(x)$, $\varphi(x) \in H$ — финитные функции из некоторых плотных $L^2(0,\ \infty;\ H)$ классов, $\Omega_\psi^*(\lambda) \in H$ и $\tilde{\Omega}_\varphi(\lambda) \in H$ — преобразования ψ и φ по обобщенным собственным функциям операторов соответственно L и L^*, а $[\overline{\cdot},\ \cdot]$ — билинейная форма, порожденная отображением R:

$$[\overline{\Psi}R\Phi] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} R_{i,k}(\overline{\Psi}_i\Phi_k). \tag{6}$$

Здесь $R_{i,k}(f) = (R(f)e_k,\ e_i)$ $(f \in Z)$, $\Phi_k = \Phi_k(\lambda) = (\Phi(\lambda),\ e_k)$, $\overline{\Psi}_i = \overline{\Psi_i(\lambda)}$ в ортонормированном базисе $\{e_k\}_1^\infty \subset H_{0,\frac{3}{4}}$ пространства H. Подробнее теорема о спектральном разложении в форме (5) для операторов (1)—(2) изложена в [6[.

Хотя в виде (1) можно представить некоторые выражения в частных производных, формально оно одномерно. Это позволяет избрать для восстановления оператора (1)—(2) по его ОСМ процедуру, известную для уравнений и систем Штурма—Лиувилля, но с модификациями, вызванными тем, что потенциал $Q(x) = A + c(x)$ — неограниченный оператор специального вида. Коэффициенты $Q(x)$ и B определятся по ядру $K(x,\ t) \in B(H_{x,\frac{1}{4}},\ H)$ оператора прямого преобразования, $K(x,\ t)$ — по ядру $\Gamma(x,\ t)$ оператора обратного преобразования (аналог уравнения Гельфанда—Левитана), причем достаточно знать $\Gamma(x) = \Gamma(x,\ 0) \in B(H_{0,\frac{1}{4}},\ H)$, а $\Gamma(x)$ непосредственно связано с ОСМ R оператора L: $R = \frac{2}{\pi}(1 + C_\Gamma)$. Обобщенное преобразование Фурье C_Γ функции $\Gamma(x) \in B(H_+,\ H)$ — это такое отображение $Z \to B(H_+,\ H)$, что

$$C_\Gamma(f) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda\,\Gamma(x)\,h\,dx \quad (f \in Z,\ h \in H_+). \tag{7}$$

Но при известных условиях произвольное отображение R: $Z \to B(H_+,\ H)$ можно (единственным образом) представить в виде обобщенного преобразования Фурье:

Лемма. *Пусть отображение $R: Z \to B(H_+,\ H)$ линейно и сильно непрерывно (т. е. при каждом $h \in H_+$ отображение $f \mapsto$*

$\mapsto R(f)h$ *непрерывно), а оператор-функция* $\Phi(x)=2R\left(\lambda^{-2}\sin^2\times\right.$ $\left.\times\left(\frac{\lambda x}{2}\right)\right)$ $(x\geqslant 0)$ (8) *дважды сильно непрерывно дифференцируема на элементах* $h\in H_+$, $\Phi'(+0)h=h$. Тогда $R=\frac{2}{\pi}(1+C_{\Phi''})$, т. е.

$$R(f)=\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^\infty f(\lambda)\,d\lambda+C_{\Phi''}(f)\right)\qquad (f\in Z). \tag{9}$$

Остается наложить ограничения, гарантирующие, чтобы $\Phi''(x)$ совпадало со значениями (при $t=0$) ядра $\Gamma(x,t)$ оператора обратного преобразования для некоторого оператора (1)—(2).

Оператор-функцию $F(x)$ назовем n раз локально ограниченно дифференцируемой на элементах $h\in H_+$, если $H_+\subset D(F(x))$ и при каждом $h\in H_+$ существует сильная производная $F^{(n)}(x)h\in H$, локально ограниченная по норме.

Определим $Z_\sigma^2(H_\sigma)$ по некоторому плотно вложенному гильбертову пространству $H_\sigma\subset H$ как множество всех целых четных вектор-функций $F(x)\in H_\sigma$ экспоненциального типа не выше σ с суммируемой нормой на вещественной оси. Введем норму, которая превратит $Z_\sigma^2(H_\sigma)$ в гильбертизуемое пространство:

$$\|F\|_{+\sigma}=\int\limits_0^\infty |F(\lambda)|_{H_\sigma}\,d\lambda\quad (F\in Z_\sigma^2(H_\sigma)). \tag{10}$$

Пусть $\overline{Z}_\sigma^2(H_+)$ — пространство всех тех $G(\lambda)\in H_+\subseteq H$ (H_+ плотно в H), что $G(\overline{\lambda})\in Z_\sigma^2(H_+)$. Для заданного $Z_\sigma^2(H_\sigma)$ определим на $\overline{Z}_\tau^0(H_+)$ «негативную» норму

$$\|G\|_{-\sigma}=\sup_{\|F\|_{+\sigma}=1}\int\limits_0^\infty (G(\lambda),\ F(\lambda))\,d\lambda\quad (G\in\overline{Z}_\sigma^2(H_+)). \tag{11}$$

Легко видеть, что замыкание $\overline{Z}_\sigma^2(H_+)$ по этой норме отождествимо с пространством всех непрерывных линейных форм на $\overline{Z}_\sigma^2(H_\sigma)$.

Теорема. *Пусть* H_+ *— некоторое гильбертово пространство плотно топологически вложенное в* H $(H_+\subset H)$, *а* $R:Z\to$ $\to B(H_+,H)$ *— сильно непрерывное линейное отображение пространства основных функций* Z *в указанное пространство операторов. Это* R *отождествимо с ОСМ оператора вида* (1)—(2) *тогда и только тогда, когда:*

1) Функции $\Phi(x)$ (8) *и* $\Phi^*(x)$ *принимают значения в* $B(H)$ *и дважды (соответственно трижды) локально ограниченно диф-*

ференцируемы на элементах $h \in H_+$ (*соответственно* $h \in H_{++} \subset$ $\subset H_+$), $\Phi'(x)h \to h \in H_+ (x \to 0)$.

2) *При любом* $\sigma > 0$ *найдется топологически и плотно вложенное* $H_\sigma \subset H_{++}$, *что для всякого* $F \in Z_\sigma^2(H_\sigma)$ *на функциях* $G \in \overline{Z}_\sigma^2 \times$ $\times (H_+)$ *справедливо неравенство* $\sup\limits_{\|G\|_{-\sigma}=1} |[\bar{G}RF]| \geqslant a_\sigma^2 \int\limits_0^\infty |F(\lambda)|_{H_+} d\lambda$ **(12)** *и аналогичное неравенство, когда* F *и* G *меняются ролями.*

3) *Если* $k(y) = k(x, y; h) \in L^2(0, x; H)$ — *решение уравнения*

$$2k(y) + \int\limits_0^x \{\Phi''(\xi + y) + \Phi''(|\xi - y|)\} \tilde{k}(\xi)\, d\xi = -\{\Phi''(x + y) +$$

$+ \Phi''(|x - y|)\} h$ **(13)**, *то найдется такой неограниченный оператор* $A = A^* \geqslant \gamma > 0$ *в* H, *что относительно его шкалы* $\{H_{\sigma,\alpha}\}$ (3)—(4) *многообразие* $H_\infty = \{\bigcap\limits_{\sigma>0} H_\sigma\} \cap \{\bigcap\limits_{\sigma>0} H_{\sigma,0}\}$ **(14)** *плотно в* H, *а операторы* $c(x): h \mapsto -Ah + 2\frac{d}{dx}k(x, x; h)$ $(h \in H_\infty)$ **(15)**, $B: h \mapsto \lim\limits_{x \searrow 0} \Phi''(x) h$ $(h \in H_\infty)$ **(16)** *ограничены в* H *и удовлетворяют «Условию»*. (Предпологается конечность левой части (12) для достаточно широкого класса функций F и перестановочность изометрических отображений H на H_+ и H_σ).

Следствие. Операторы L_1 и L_2 вида (1)—(2) совпадают (то есть, $B_1 = B_2$, $c_1(x) = c_2(x)$ почти всюду и A_1 A_2 — самосопряженные расширения одного плотно определённого оператора $A_0 = A_0^*$) если совпадают их ОСМ ($R_1 = R_2$) и пересечение шкал $\{\bigcap\limits_{\sigma>0} H_{\sigma,0}(A_1)\} \cap \{\bigcap\limits_{\sigma>0} H_{\sigma,0}(A_2)\}$, построенных в соответствии с (3)—(4) по A_i, входящим в $L_i[u]$, плотно в H.

Развёрнутые доказательства вспомогательных результатов, на которых основана сформулированная теорема, содержатся в [7].

Список литературы: 1. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции.— Изв. АН СССР, Математика, 1951, (15), с. 309—360. 2. *Марченко В. А., Рофе-Бекетов Ф. С.* Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов.— Докл. АН СССР, 120, № 5, с. 563—666. 3. *Березанский Ю. М.* О теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа уравнения Шредингера.— Тр. Моск. мат. об-ва, 1958, с. 3—62. 4. *Гестрин Г. Н.* К теореме единственности в многомерной обратной задаче спектрального анализа оператора Шредингера.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1979, вып. 31, с. 28—32. 5. *Козел В. А., Лундина Д. Ш., Марченко В. А.* Обобщенная спектральная матрица трехмерного несамосопряженного оператора Шредингера.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1976, вып. 27, с. 71—90. 6. *Мищенко В. О.* Разложение по собственным функциям симметрического абстрактного эллиптического дифференциального оператора.— Дифференциальные уравнения, 1980, 16, № 8, с. 1474—1483. 7. *Мищенко В. О.* Восстановление несимметрического абстрактного эллиптического дифференциального оператора по его обобщенной спектральной матрице.— Рук. деп. в ВИНИТИ, 1981.

Поступила в редколлегию 14.01.82.