УДК 517.946

Д. Ш. ЛУНДИНА

ЯДРО РЕЗОЛЬВЕНТЫ ТРЕХМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Как известно, уравнение Гельмгольца в трехмерном пространстве $-\Delta u(x, \lambda) - \lambda^2 u(x, \lambda) = f(x)$, $f(x) \in L_2(R_3)$ **(1)** при всех λ из полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > 0$ имеет единственное решение из $L_2(R_3)$, и это решение представимо в виде

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{R_3} \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|} f(y)\, dy. \tag{2}$$

Функция $\frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|}$ называется ядром резольвенты оператора $-\Delta$ или функцией Грина уравнения (1).

Рассмотрим трехмерный оператор Шредингера $L = -\Delta + q(x)$ $(x \in R_3)$ **(3)** с ограниченным не обязательно вещественным потенциалом $q(x)$. Если $|q(x)| < M$, то уравнение $(L - \lambda^2) u(x, \lambda) = f(x)$, $f(x) \in L_2(R_3)$ **(4)** при всех λ из полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > \sqrt{M}$ тоже имеет в пространстве $L_2(R_3)$ единственное решение, и оно представимо в виде $u(x, \lambda) = \int\limits_{R_3} G(x, y, \lambda) f(y)\, dy$.

Функция $G(x, y, \lambda)$ называется ядром резольвенты оператора L или функцией Грина уравнения (4). Она имеет такой вид

$$G(x, y, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|} + \gamma(x, y, \lambda) \right\},$$

где $\gamma(x, y, \lambda)$ решение уравнения

$$(-\Delta - \lambda^2)\, \gamma(x, y, \lambda) = -q(x) \left\{ \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|} + \gamma(x, y, \lambda) \right\}, \tag{5}$$

принадлежащее пространству $L_2(R_3)$.

Теорема. *Если $|q(x)| < M$, то при всех λ из полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > \sqrt{M}$ функция Грина $G(x, y, \lambda)$ уравнения (4) представима в виде*

$$G(x, y, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|} + \int\limits_{|x-y|}^{\infty} K(x, y, t)\, e^{i\lambda t}\, dt \right\},$$

причем ядро $K(x, y, t)$ удовлетворяет неравенству $|K| \leqslant$ $\leqslant 1/2M \operatorname{ch} \sqrt{M}t$ (6) и $K(x+y, y, |x|) = -\frac{1}{2|x|}\int\limits_0^{|x|} q(y+\rho\omega_x) \times$ $\times d\rho \left(\omega_x = \frac{x}{|x|}\right)$ (7).

Доказательство. Нам нужно доказать, что функция $\gamma(x, y, \lambda) = 4\pi G(x, y, \lambda) - \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|}$ представима в виде

$$\gamma(x, y, \lambda) = \int\limits_{|x-y|}^{\infty} K(x, y, t)\, e^{i\lambda t}\, dt \tag{8}$$

с ядром $K(x, y, t)$, удовлетворяющим условиям (6), (7).

Из уравнения (5), которому удовлетворяет эта функция, согласно (2), следует, что

$$\gamma(x, y, \varkappa) = -\frac{1}{4\pi}\left[\int\limits_{R_3} \frac{e^{i\lambda|x-\xi|}}{|x-\xi|} q(\xi) \left[\frac{e^{i\lambda|\xi-y|}}{|\xi-y|} + \gamma(\xi, y, \lambda)\, d\xi\right].\right.$$

Будем искать решение этого интегрального уравнения в виде (8). Тогда для ядра $K(x, y, t)$ получим такое интегральное уравнение

$$\int\limits_{|x-y|}^{\infty} K(x, y, t)\, e^{i\lambda t}\, dt = -\frac{1}{4\pi}\left[\int\limits_{R_3} \frac{e^{i\lambda|x-\xi|}}{|x-\xi|} q(\xi) \frac{e^{i\lambda|\xi-y|}}{|\xi-y|}\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{R_3} \frac{e^{i\lambda|x-\xi|}}{|x-\xi|} q(\xi) \int\limits_{|\xi-y|}^{\infty} K(\xi, y, \tau)\, e^{i\lambda\tau}\, d\tau\, d\xi\right].$$

Полагая для краткости $x - y = x'$; $\xi - y = \eta$; $\tilde{q}(\eta) = q(y+\eta)$; $\tilde{K}(x', t) = K(x'+y, y, t)$ **(9)**, придем к уравнению

$$\int\limits_{|x'|}^{\infty} \tilde{K}(x', t)\, e^{i\lambda t}\, dt = -\frac{1}{4\pi}\left[\int\limits_{R_3} \frac{e^{i\lambda\{|x'-\eta|+|\eta|\}}}{|x'-\eta||\eta|} \tilde{q}(\eta)\, d\eta + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{R_3} \frac{e^{i\lambda|x'-\eta|}}{|x'-\eta|} \tilde{q}(\eta) \int\limits_{|\eta|}^{\infty} \tilde{K}(\eta, \tau)\, e^{i\lambda\tau}\, d\tau\, d\eta\right], \tag{10}$$

эквивалентному исходному. Сделаем в первом интеграле правой части этого уравнения следующую замену переменных: $|x'-\eta| + |\eta| = t$; $\omega_\eta = \eta/|\eta|$. Когда $|\eta|$ меняется от 0 до $+\infty$, t меняется от $|x'|$ до $+\infty$. Поэтому для любой функции $f(\eta) \in L_1(R_3)$

$$\int\limits_{R_3} f(\eta)\, d\eta = \int\limits_{|\omega_\eta|=1} \left\{\int\limits_0^{\infty} f(|\eta|\omega_\eta)\, |\eta|^2\, d|\eta|\right\} d\omega_\eta =$$

$$= \int\limits_{|\omega_\eta|=1} \left\{ \int\limits_{|x'|}^{\infty} f(|\eta|\omega_\eta)|\eta|^2 \frac{d|\eta|}{dt}\, dt \right\} d\omega_\eta.$$

Кроме того, $|x'|^2 + |\eta|^2 - 2|x'||\eta|\omega_{x'}\omega_\eta = |x' - \eta|^2 = t^2 + |\eta|^2 - 2t|\eta|$; $\omega_{x'} = \frac{x'}{|x'|}$ и значит,

$$|\eta|^2 = \frac{t^2 - |x'|^2}{2(t - |x'|\omega_{x'}\omega_\eta)};$$

$$|x' - \eta| = t - |\eta| = \frac{t^2 + |x'|^2 - 2t|x'|\omega_{x'}\omega_\eta}{2(t - |x'|\omega_{x'}\omega_\eta)};$$

$$\frac{d|\eta|}{dt} = \frac{t^2 - |x'|^2 - 2t|x'|\omega_{x'}\omega_\eta}{2(t - |x'|\omega_{x'}\omega_\eta)^2}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{R_3} \frac{e^{i\lambda\{|x'-\eta|+|\eta|\}}}{|x'-\eta||\eta|} \tilde{q}(\eta)\, d\eta =$$

$$= \int\limits_{|\omega_\eta|=1} \left\{ \int\limits_{|x'|}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{|x'-\eta|} \tilde{q}(|\eta|\omega_\eta)|\eta| \frac{d|\eta|}{dt}\, dt \right\} d\omega_\eta =$$

$$= \int\limits_{|\omega_\eta|=1} \left\{ \int\limits_{|x'|}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t}(t^2 - |x'|^2)}{2(t - |x'|\omega_{x'}\omega_\eta)^2} \tilde{q}\left(\frac{(t^2 - |x'|^2)}{2(t - |x'|\omega_{x'}\omega_\eta)} \omega_\eta \right) dt \right\} d\omega_\eta =$$

$$= \int\limits_{|x'|}^{\infty} e^{i\lambda t} \left\{ \int\limits_{|\omega_\eta|=1} \frac{t^2 - |x'|^2}{2(t - |x'|\omega_{x'}\omega_\eta)^2} \tilde{q}\left(\frac{t^2 - |x'|^2}{2(t - |x'|\omega_{x'}\omega_\eta)} \omega_\eta \right) d\omega_\eta \right\} dt. \quad (11)$$

Продолжим функцию $\tilde{K}(\eta, t)$ в область $t < |\eta|$, полагая ее равной нулю в этой области. Тогда

$$\int\limits_{R_3} \frac{e^{i\lambda|x'-\eta|}}{|x'-\eta|} \tilde{q}(\eta) \int\limits_{|\eta|}^{\infty} \tilde{K}(\eta, \tau) e^{i\lambda\tau}\, d\tau\, d\eta =$$
$$= \int\limits_{R_4} \frac{e^{i\lambda\{|x'-\eta|+\tau\}}}{|x'-\eta|} \tilde{q}(\eta) \tilde{K}(\eta, \tau)\, d\tau\, d\eta,$$

откуда после замены переменных $t = |x' - \eta| + \tau$, $\eta = \eta$ следует

$$\int\limits_{R_3} \frac{e^{i\lambda|x'-\eta|}}{|x'-\eta|} \tilde{q}(\eta) \int\limits_{|\eta|}^{\infty} \tilde{K}(\eta, \tau) e^{i\lambda\tau}\, d\tau\, d\eta =$$

$$= \int\limits_{R_4} \frac{e^{i\lambda t}}{|x'-\eta|} \tilde{q}(\eta) \tilde{K}(\eta, t - |x' - \eta|)\, dt\, d\eta =$$

$$=\int\limits_{|x'|}^{\infty} e^{i\lambda t}\left\{\int\limits_{|\eta|+|x'-\eta|<t} \frac{\tilde q(\eta)\,\tilde K(\eta,\ t-|x'-\eta|)}{|x'-\eta|}\,d\eta\right\}dt, \qquad (12)$$

если учесть, что $\tilde K(\eta,\ t-|x'-\eta|)=0$ при $t-|x'-\eta|<|\eta|$.

Сопоставляя уравнение (10) с формулами (11), (12), приходим к следующему уравнению ядра для $\tilde K(\eta,\ t)$:

$$\tilde K(x',\ t)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\omega|=1}\frac{t^2-|x'|^2}{2(t-|x'|\,(\omega_{x'},\omega))^2}\,\tilde q\left(\frac{t^2-|x'|^2}{2(t-|x'|\,(\omega_{x'},\omega))}\,\omega\right)d\omega-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\eta|+|x'-\eta|<t}\frac{\tilde q(\eta)\,\tilde K(\eta,\ t-|x'-\eta|)}{|x'-\eta|}\,d\eta. \qquad (13)$$

Будем решать это уравнение методом последовательных приближений, полагая

$$\tilde K_0(x',\ t)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\omega|=1}\frac{t^2-|x'|^2}{2(t-|x'|\,(\omega_{x'},\omega))^2}\,\tilde q\left(\frac{t^2-|x'|^2}{2(t-|x'|\,(\omega_{x'},\omega))}\,\omega\right)d\omega,$$

$$\tilde K_n(x',\ t)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\eta|+|x'-\eta|<t}\frac{\tilde q(\eta)\,\tilde K_{n-1}(\eta,\ t-|x'-\eta|)}{|x'-\eta|}\,d\eta.$$

Так как по условию $\sup\limits_{\eta\in R_3}|q(\eta)|=\sup\limits_{\eta\in R_3}|\tilde q(\eta)|\leqslant M$, то

$$|\tilde K_0(x',\ t)|\leqslant\frac{M}{4\pi}\int\limits_{|\omega|=1}\frac{t^2-|x'|^2}{2(t-|x'|\,(\omega_{x'},\omega))^2}\,d\omega=$$

$$=M\,\frac{t^2-|x'|^2}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{(t-|x'|\cos\theta)^2}\right\}d\varphi=\frac{M}{2},$$

и если

$$|\tilde K_{n-1}(x',\ t)|\leqslant\frac{1}{2}M^n\frac{t^{2(n-1)}}{(2(n-1))!}, \qquad (14)$$

$$|\tilde K_n(x',\ t)|\leqslant\frac{M^{n+1}}{8\pi\,(2(n-1))!}\int\limits_{|\eta|+|x'-\eta|<t}\frac{(t-|x'-\eta|)^{2(n-1)}}{|x'-\eta|}\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M^{n+1}}{8\pi\,(2(n-1))!}\int\limits_{|\xi|<t}\frac{(t-|\xi|)^{2(n-1)}}{|\xi|}\,d\xi=$$

$$=\frac{M^{n+1}}{2\,(2(n-1))!}\int\limits_0^t(t-u)^{2(n-1)}\,u\,du=\frac{1}{2}\,M^{n+1}\,\frac{t^{2n}}{(2n)!},$$

откуда по индукции следует, что неравенство (14) справедливо при всех $n=1,\ 2,\ \ldots$. Поэтому ряд $\sum\limits_0^{\infty}\tilde K_m(x',\ t)$ абсолютно сходится, его сумма удовлетворяет уравнению (13) и $|K(x', t)| \leqslant \leqslant \frac{M}{2} \operatorname{ch} \sqrt{M}t$. Наконец, полагая в уравнении (13) $t = |x'|(1+\varepsilon$ и устремляя $\varepsilon \to 0$, получим

$$\tilde{K}(x', |x'|) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{K}(x', |x'|(1+\varepsilon)) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|\omega|=1} \frac{(1+\varepsilon)^2 - 1}{2(1+\varepsilon - \omega_{x'}\omega)^2} \tilde{q}\left(|x'| \frac{(1+\varepsilon)^2 - 1}{(1+\varepsilon-\omega_{x'}\omega)\cdot 2}\omega\right) d\omega.$$

Так как

$$\left| \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2(1+\varepsilon-\omega_{x'}\omega)}\omega - \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2(1+\varepsilon-\omega_{x'}\omega)}\omega_{x'} \right| =$$

$$= \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2} \frac{2^{\frac{1}{2}}(1-\omega_{x'}\omega)^{\frac{1}{2}}}{1+\varepsilon-\omega_{x'}\omega} \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}(2+\varepsilon),$$

то равномерно относительно ω

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| q\left(|x'| \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2(1+\varepsilon-\omega_{x'}\omega)}\omega\right) - q\left(|x'| \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2(1+\varepsilon-\omega_{x'}\omega)}\omega_{x'}\right)\right| = 0.$$

Из последнего равенства, замечая

$$\int\limits_{|\omega|=1} \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{(1+\varepsilon-\omega_{x'}\omega)^2} d\omega = \varepsilon(2+\varepsilon)\cdot 2\pi \int\limits_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta}{(1+\varepsilon-\cos\theta)^2} = 4\pi,$$

находим

$$-\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|\omega|=1} \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2(1+\varepsilon-\omega_{x'}\omega)^2} \tilde{q}\left(|x'| \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2(1+\varepsilon-\omega_{x'}\omega)}\omega\right) d\omega =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|\omega|=1} \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2(1+\varepsilon-\omega_{x'}\omega)^2} \tilde{q}\left(|x'| \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2(1+\varepsilon-\omega_{x'}\omega)}\omega_{x'}\right) d\omega =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^\pi \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)\sin\theta}{2(1+\varepsilon-\cos\theta)^2} \tilde{q}\left(|x'| \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2(1+\varepsilon-\cos\theta)}\omega_{x'}\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|x'|} \int\limits_{|x'|\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\right)}^{\frac{1}{2}|x'|\varepsilon} \tilde{q}(\rho\omega_{x'})\, d\rho = -\frac{1}{2|x'|} \int\limits_0^{|x'|} \tilde{q}(\rho\omega_{x'})\, d\rho.$$

Следовательно, $\tilde{K}(x', |x'|) = -\frac{1}{2|x'|} \int\limits_0^{|x'|} \tilde{q}(\rho\omega_{x'})\, d\rho$, и согласно (10

$$K(x+y, y, |x| = \tilde{K}(x, |x|) = -\frac{1}{2|x|} \int\limits_0^{|x|} q(y+\rho\omega_x)\, d\rho.$$

Поступила в редколлегию 22.01.82