УДК 517.968

И. К. ЛИФАНОВ, А. Ф. МАТВЕЕВ

О СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ НА СИСТЕМЕ ОТРЕЗКОВ

1. Многие задачи аэродинамики, теории упругости, дифракции электромагнитных волн и других областей науки приводятся к решению сингулярных интегральных уравнений первого рода

$$\int_L \frac{\gamma(x)\,dx}{x_0 - x} + \int_L K(x_0, x)\,\gamma(x)\,dx = f(x_0), \qquad (1)$$

где L — отрезок или система непересекающихся отрезков действительной оси.

Для случая одного отрезка, $L = [-1, 1]$, в аэродинамике [1] на основе эмпирических соображений и численных расчетов был разработан метод численного решения такого уравнения, называемый «методом дискретных вихрей». В работе [2] было дано математическое обоснование и дальнейшее развитие этого метода, в частности, на случай, когда L — окружность. В работе [3] этот метод был распространен для численного решения уравнения (1) на системе непересекающихся отрезков $[A_k, B_k]$, $k = 1, \ldots, p$. Так как в этом случае индекс $\varkappa$ уравнения может равняться числу отрезков, то при составлении системы линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующей уравнение (1), по методу дискретных вихрей получаем, что эта система недоопределена на $\varkappa$ $(\varkappa > 0)$ уравнений. Для замыкания этой системы в работе [3] были использованы условия

$$\int_L x^k \gamma(x)\,dx = C_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \varkappa - 1,$$

естественно возникающие в теории сингулярных интегральных уравнений. Однако в задачах дифракции электромагнитных волн [4] удобней использовать значения интегралов от $\gamma(x)$ по отрезкам, входящим в L, и за счет этих условий доопределить систему линейных алгебраических уравнений.

В данной статье предлагается и обосновывается метод численного решения уравнения (1) при условии, что на тех отрезках, на которых решение неограниченно на обоих концах, известно значение интеграла от искомого решения.

2. Рассмотрим вначале каноническое сингулярное интегральное уравнение (1), т. е. $K(x_0, x) \equiv 0$, в случае, когда $L = [-1, 1]$. В этом случае уравнение может иметь индекс $\varkappa = 1$; 0; -1, т. е. решение может быть неограничено на обоих концах отрезка $[-1, 1]$; ограничено на одном (будем полагать — на правом) конце и неограничено на другом; ограничено на обоих концах. Из теории сингулярных интегральных уравнений [5] известно, что решение уравнения (1) имеет вид

$$\gamma_\varkappa(x) = \omega_\varkappa(x) \cdot u_\varkappa(x); \quad \omega_{\pm 1}(x) = (1 - x^2)^{\pm 1/2};$$
$$\omega_0(x) = \sqrt{(1 - x)/(1 + x)}, \tag{2}$$

$u_\varkappa(x) \in H(\alpha)$ на $[-1, 1]$. Решение индекса $\varkappa = -1$ существует при условии

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0. \tag{3}$$

В работах [6, 7] для интеграла

$$\Phi(x_0) = \int_{-1}^{1} \frac{\gamma(x)\,dx}{x_0 - x}, \tag{4}$$

где $\gamma(x) = \omega(x)\,u(x)$, $\omega(x)$ — неотрицательная интегрируемая на $[-1, 1]$ функция, получена квадратная формула типа Гаусса

$$\Phi_n(x_{0j}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u(x_i) \cdot d_i}{x_{0j} - x_i}, \quad j = 1, \ldots, R, \tag{5}$$

где x_i, $i = 1, \ldots, n$, корни многочлена $P_n(x)$ степени n из системы $\{P_m(x)\}$ многочленов ортогональных на $[-1, 1]$ с весом $\omega(x)$, а x_{0j}, $j = 1, \ldots, R$, корни функции

$$Q_n(x_0) = \int_{-1}^{1} \frac{\omega(x)\,P_n(x)\,dx}{x_0 - x}. \tag{6}$$

Коэффициенты a_i этой квадратурной формулы определяются следующим образом:

$$a_i = -\frac{Q_n(x_i)}{P_n'(x_i)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

В работе [7] показано, что формула (5) дает точное значение интеграла (4) для любого многочлена $u(x)$ степени $2h$, а в работе [6] доказано, что $|\Phi(x_{0j}) - \Phi_n(x_{0j})| \leqslant \frac{1}{\pi} E'_{n-1} 2\alpha(1)$, $j = 1, \ldots, R$ (8), где $\alpha(x) = \int\limits_{-1}^{x} \omega(y)\,dy$, а E'_{n-1} — наилучшее приближение функции $u'(x)$ многочленами степени $n-1$. При этом отметим, что если функция $u(x)$ имеет ограниченную третью производную, то согласно [8] $E'_{n-1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Из теории ортогональных многочленов известно, что системой ортогональных на $[-1, 1]$ многочленов с весом $\omega_1(x)$ будут многочлены Чебышева первого рода, т. е. в этом случае $P_{1,n}(x) = T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, а $Q^{(x)}_{1,n} = -\pi U_{n-1}(x) = -\pi \sin(n \arccos x)/\sin(\arccos x)$ — многочлены Чебышева второго рода. Видно, что функция $Q_{1,n}(x)$ имеет $n-1$ корней, поэтому при использовании формулы (5) для замены канонического сингулярного интегрального уравнения системой линейных алгебраических уравнений получим систему $n-1$ уравнений с n неизвестными. Доопределим эту систему уравнением, получаемым из условия $\int\limits_{-1}^{1} \gamma(x)\,dx = C$ (9).

Таким образом, при $\varkappa = 1$ каноническое уравнение (1) заменим следующей системой:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{u_{1,n}(x_i) \cdot a_i}{x_{0j} - x_i} = f(x_{0j}), \quad j = 1, \ldots, n-1; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} u_{1,n}(x_i) \cdot a_i = C; \end{cases} \tag{10}$$

$$x_i = \cos\frac{(2i-1)}{2n}\pi, \quad a_i = \frac{\pi}{n}, \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$x_{0j} = \cos\left(\frac{j}{n}\pi\right), \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Системой ортогональных на $[-1, 1]$ многочленов с весом $\omega_0(x)$ будут многочлены $P_{0,n}(x) = \dfrac{T_{n+1}(x) - T_n(x)}{(x-1)}$, а $Q_{0,n}(x) = -\pi \times [U_n(x) - U_{n-1}(x)]$.

Таким образом, при $\varkappa = 0$ каноническое уравнение заменим следующей системой

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{u_{0n}(x_i) \cdot a_i}{x_{0j} - x_i} = f(x_{0j}), \quad j = 1, \ldots, n;$$

$$x_{0j} = \cos\frac{2j-1}{2n+1}\pi, \quad j = 1, \ldots, n; \tag{11}$$

$$x_i = \cos\frac{2i}{2n+1}\pi, \quad a_i = \frac{4\pi}{2n+1}\sin^2\left(\frac{i}{2n+1}\pi\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Системой ортогональных на $[-1, 1]$ многочленов с весом $\omega_{-1}(x)$ будут многочлены Чебышева второго рода, т. е. $P_{-1, n}(x) = U_n(x)$, а $Q_{-1, n}(x) = \pi T_{n+1}(x)$. Теперь получим переопределенную (и, как правило, несовместную) систему $n+1$ линейных уравнений с n неизвестными. Доопределять эту систему будем по способу, предложенному в работе [2].

Таким образом, при $\varkappa = -1$ каноническое уравнение заменим следующей системой:

$$\gamma_{0n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{u_{-1, n}(x_i)\, a_i}{x_{0j} - x_i} = f(x_{0j}), \quad j = 1, \ldots, n+1;$$

$$x_i = \cos\frac{i}{n+1}\pi, \quad a_i = \frac{\pi}{n+1}\sin^2\left(\frac{i}{n+1}\pi\right), \quad i = 1, \ldots, n; \tag{12}$$

$$x_{0j} = \cos\frac{2j-1}{2(n+1)}\pi, \quad j = 1, \ldots, n+1.$$

Для того чтобы записать системы (10—12) единым образом, введем функцию $\eta(x)$, $\eta(x) = 1$, $x > 0$; $\eta(x) = 0$, $x \leqslant 0$. Тогда системы (10—12) можно записать следующим единым образом:

$$\begin{gathered} \eta(-\varkappa)\,\gamma_{0n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{u_{\varkappa, n}(x_i) \cdot a_i}{x_{0j} - x_i} = f(x_{0j}), \quad j = 1, \ldots, n-\varkappa; \\ \sum_{i=1}^{n} \eta(\varkappa)\, u_{\varkappa, n}(x_i)\, a_i = \eta(\varkappa) \cdot C, \end{gathered} \tag{13}$$

где x_i, $i = 1, \ldots, n$, корни многочлена $P_{\varkappa, n}(x)$, а x_{0j}, $j = 1, \ldots, n-\varkappa$, корни многочлена $Q_{\varkappa, n}(x)$. Однако при $\eta(\varkappa) = 0$, т. е. $\varkappa = 0$ или -1, последнее уравнение, являющееся тождеством, рассматривать не надо.

Системы (10—12) не вырождены, и их решение можно записать в виде

$$u_{\varkappa, n}(x_i) = -\frac{1}{a_i} I_{\varkappa, i}^{(n)} \left[\sum_{j=1}^{-n-\varkappa} I_{\varkappa, 0j}^{(n)} \frac{f(x_{0j})}{x_i - x_{0j}} + \nu_\varkappa C\right], \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$I_{\varkappa, i}^{(n)} = \prod_{m-1}^{n-\varkappa} (x_i - x_{0m}) \left[\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{n} (x_i - x_m)\right]^{-1};$$

$$I_{\varkappa, 0j}^{(n)} = \prod_{m=1}^{n} (x_{0j} - x_m) \left[\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{n-\varkappa} (x_{0j} - x_{0m})\right]^{-1}; \tag{14}$$

$$\nu_1 = -1, \ \nu_0 = \nu_{-1} = 0.$$

В силу представления многочленов произведением линейных множителей и формулы (7), получим

$$I_{\varkappa, i}^{(n)} = \frac{1}{\pi} a_i, \ i = 1, \ \dots, \ n; \quad I_{\varkappa, 0j}^{(n)} = \frac{1}{\pi} b_j, \ j = 1, \ \dots, \ n - \varkappa, \tag{15}$$

где b_j, $j = 1, \ \dots, n - \varkappa$, являются коэффициентами квадратурной формулы типа Гаусса для сингулярного интеграла $-\frac{1}{\pi^2}\Phi(x)$, в котором вместо $\gamma(x)$ стоит (соответственно для $\varkappa = 1; \ 0; \ -1$) $\sqrt{1-x^2}f(x)$, $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}f(x)$ и $f(x)(1-x^2)^{-1/2}$, а x_0 и x поменялись местами. Указанные интегралы дают [5] точное значение для $u_\varkappa(x)$ в формуле (2), и поэтому для $|u_\varkappa(x_i) - u_{\varkappa, n}(x_i)|$ справедлива оценка вида (8). Отметим, что γ_{0n} в системе (12) стремится к нулю при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (3) существования решения индекса $\varkappa = -1$.

Если рассматривается полное уравнение (1), то в этом случае системы (10—12) дополняются в левой части слагаемыми $\sum_{i=1}^{n} K(x_{0j}, x_i)\, u_{\varkappa_n}(x_i)\, a_i$, соответственно для $\varkappa = 1; \ 0; \ -1$. Известно, что уравнение (1) эквивалентно в соответствующем классе функций интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода, которое имеет единственное решение только в том случае, когда и уравнение (1) имеет в рассматриваемом классе функций единственное решение. Используя разрешимость систем (10—12), системы для уравнения (1) эквивалентным образом преобразуются в системы линейных алгебраических уравнений для соответствующих уравнений Фредгольма 2-го рода, и поэтому эти системы будут не вырождены, если уравнения Фредгольма имеют единственное решение. Из теории численных методов для уравнений Фредгольма 2-го рода следует, что приближенное решение $(u_{\varkappa, n}(x_i)$ уравнения (1) будет сходиться к точному $(u_\varkappa(x_i))$ со скоростью, даваемой формулой (8).

3. Пусть теперь в уравнении (1) кривая L является системой непересекающихся отрезков $[A_k, B_k]$, $k = 1, \ \dots, \ p$, действительной оси. В соответствии с терминологией в теории систем сингулярных интегральных уравнений [5] будем говорить, что решение $\gamma(x)$ уравнения (1) имеет индекс $\varkappa = (\varkappa_1, \ \dots, \ \varkappa_p)$, $\varkappa_k = 1; \ 0; \ -1$; $k = 1, \ \dots, \ p$, если оно не ограничено на обоих концах; на одном конце; ограничено на обоих концах отрезка $[A_k, B_k]$. В дальнейшем это решение будем обозначать $\gamma_\varkappa(x)$. Рассмотрим отображение отрезка $[-1, 1]$ на отрезок $[A_k, B_k]$, где

$$g_k(t) = \frac{B_k - A_k}{2} t + \frac{B_k + A_k}{2}, \quad k = 1, \ \dots, \ p. \tag{16}$$

На отрезке $[A_k, B_k]$ выберем точки $x_{k,i}$, $i = 1, \ \dots, \ n_k$, $x_{k,i} = g_k(t_i)$, где t_i — корни многочлена $P_{\varkappa_k n_k}(t)$ и точки $x_{k,0j}$, $j = 1$,

$\ldots, n_k - \varkappa_k, x_{k,0j} = g_k(t_{0j})$, где t_{0j} — корни многочлена $Q_{\varkappa_k, n_k}(t)$. Обозначим далее $\gamma_{\varkappa,k}(x) = \gamma_\varkappa(x)\big|_{x\in[A_k, B_k]} = \omega_{\varkappa,k}(x)\cdot u_{\varkappa,k}(x)$; $f_k(x) = f(x)\big|_{x\in[A_k,B_k]}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть уравнение* (1) *имеет единственное решение* $\gamma_\varkappa(x)$ *индекса* $\varkappa$.

Тогда система линейных алгебраических уравнений

$$\eta(-\varkappa_k)\gamma_{0n_k} + \sum_{i=1}^{n_k}\frac{u_{\varkappa,k,n_k}(x_{k,i})\,a_{k,i}}{x_{k,0j}-x_{k,i}} +$$

$$+\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{p}\sum_{i=1}^{n_m}\frac{u_{\varkappa,m,n_m}(x_{m,i})\,a_{m,i}}{x_{k,0j}-x_{m,i}} + \sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_m}K(x_{k,0j}, x_{m,i})\,u_{\varkappa,m,n_m}(x_{m,i})\times$$

$$\times a_{m,i} = f_k(x_{k,0j});\quad j=1,\ldots,n_k-\varkappa_k;\quad k=1,\ldots,p \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^{n_k}\eta(\varkappa_k)\,u_{\varkappa,k,n_k}(x_{k,i})\,a_{k,i} = \eta(\varkappa_k)\cdot C_k,\quad k=1,\ldots,p,$$

где $a_{k,i} = \frac{B_k - A_k}{2}a_i$, $k=1,\ldots,p$; $i=1,\ldots,n$, невырождена и справедливо неравенство

$$|u_{\varkappa,k}(x_{k,i}) - u_{\varkappa,k,n_k}(x_{k,i})| = O\left(\frac{1}{N^{r+\alpha}}\right),\quad \begin{matrix} k=1,\ldots,p\\ i=1,\ldots,n_k;\end{matrix} \quad (18)$$

$$N = \min n_k,\quad K_{x_0}^{(r)}(x_0, x),\ f^{(r)}(x)\in H(\alpha),\ k=1,\ldots,p.$$

Справедливость теоремы вытекает из следующего замечания. Уравнение (1) с помощью отображения (16) можно рассматривать как систему p штук сингулярных интегральных уравнений на отрезке $[-1, 1]$, которая имеет единственное решение. Следовательно, эта система [5] эквивалентна системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, которая также имеет единственное решение. Поэтому, повторив в дискретном виде процесс перехода к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, получим, что система линейных алгебраических уравнений (17) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений для этой системы уравнений Фредгольма 2-го рода. Такой переход возможен в силу того, что разрешима система (13) при любом $\varkappa = 1;\ 0;\ -1$.

Список литературы: 1. *Белоцерковский С. М.* Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа.— М.: Наука, 1965.— 224. 2. *Лифанов И. К.* О сингулярных интегральных уравнениях с одномерными и кратными интегралами типа Коши.— Докл. АН СССР, 1978, 239, № 2, с. 265—268. 3. *Лифанов И. К.* О численном решении сингулярных интегральных уравнений.— Дифференциальные уравнения, 1981, 17, № 12, с. 2238. 4. *Гандель Ю. В.* О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., вып. 38, 1982, с. 248.

5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.— 600 с. 6. *Корнейчук А. А.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов.— Численные методы решения дифференц. и интегр. уравнений и квадратурные формулы, 1964, с. 64—74. 7. *Старк И.* Обобщенная квадратурная формула для интеграла типа Коши. — Ракетная техника и космонавтика, 1972, 9, № 9, с. 244. 8. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций.— М; Л.: Гостехиздат, 1949, с. 688.

Поступила в редколлегию 05.06.81.