УДК 513 + 517.918

Л. П. КУЧКО

О НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Задача классификации полиномиальных систем дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = x \circ Ax^Q$ относительно обобщенных степенных преобразований $y = x^P$ сводится к задаче классификации пары матриц (A, Q) относительно действия обратимых преобразований $P. (A, Q) = (PA, QP^{-1})$ **(1)** (см. [1—3]). Построим нормальную форму относительно такого действия, следуя общему подходу, изложенному в [4].

Предположим, что A и Q — вещественные или комплексные матрицы размеров $n \times m$ и $q \times n$ соответственно. Известно, что умножением слева на невырожденную матрицу P матрицу A можно привести к нормальной форме

$$PA = \mathring{A} = \begin{pmatrix} \underbrace{0 \cdots 0}_{r_0} & 1 & \underbrace{* \cdots * \; 0}_{r_1} & * & \underbrace{\cdots \; *}_{r_2} & \cdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots * & \cdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & \cdots \\ \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & \cdots \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

в которой отмеченные звездочками элементы вместе с числами r_0, r_1, r_2, ... образуют полную систему инвариантов. Матрицу вида (2) назовем *нормальной формой относительно левых преобразований*. Стационарная группа $G(\mathring{A})$ матрицы $\mathring{A}$ состоит из преобразований вида $P = \begin{pmatrix} E_r & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где E_r — единичная матрица размера $r \times r$, r — ранг матрицы A, B — произвольная матрица размера $r \times (n-r)$, а C — невырожденная матрица размера $(n-r) \times (n-r)$.

Аналогично умножением справа на невырожденную матрицу S каждую матрицу Q можно привести к нормальной форме

$$QS = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 \cdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots * \cdots \\ \underbrace{0 \cdots 0}_{r_0} & 1 & \underbrace{* \cdots *}_{r_1} & 0 & \underbrace{* \cdots *}_{r_2} \cdots \end{bmatrix}', \qquad (3)$$

в которой отмеченные звездочками элементы вместе с числами r_0, r_1, r_2, ... образуют полную систему инвариантов. Матрицу вида (3) назовем *нормальной формой относительно правых преобразований*.

Указанные нормальные формы однозначно определяются исходными матрицами и вычисляются по ним с помощью конечного числа рациональных операций.

Будем говорить, что *пара матриц* (A, Q), где $\mathrm{rg}A = r$, *имеет нормальную форму относительно действия (1)*, если A имеет вид (2), а $Q = (Q_1; Q_2)$ разбита на блоки Q_1 и Q_2 размеров $q \times r$ и $q \times (n-r)$ соответственно, причем $Q_1^* Q_2 = 0$, а блок Q_2 имеет вид (3).

Теорема. *Каждая пара матриц (A, Q) некоторым преобразованием (1) может быть приведена к нормальной форме. Нормальная форма однозначно определяется исходной парой и может быть вычислена с помощью конечного числа рациональных операций.*

Доказательство теоремы. Приведение к нормальной форме пары (A, Q) начнем с того, что приведем матрицу A к нормальной форме $\mathring{A}$ относительно левых преобразований. Теперь следует привести к соответствующему виду матрицу Q, действуя справа стационарной группой $G(\mathring{A})$.

Обозначим через G^0 подгруппу стационарной группы $G(\mathring{A})$, состоящую из преобразований вида $S = \begin{pmatrix} E_r & B \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}$, где B — произвольная матрица размера $r \times (n-r)$. Пусть матрица $Q = (Q_1;$

Q_2) разбита на блоки Q_1, Q_2 размеров $q\times r$ и $q\times(n-r)$ соответственно. Очевидно, $QS=(Q_1;\ Q_2+Q_1B)$.

Лемма. *Каждую матрицу $Q=(Q_1;\ Q_2)$ некоторым преобразованием $S\in G^0$ можно привести к нормальной относительно группы G^0 форме $QS=(Q_1;\ V_2)$; $Q_1^*V_2=0$* **(4)**, *которая однозначно определяется исходной матрицей Q и может быть вычислена с помощью конечного числа рациональных операций.*

Доказательство леммы. Введем в пространстве $q\times n$-матриц скалярное произведение, положив $\langle Q,\ W\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} Tr\,(QW^*)$. Множество $L(Q)=\{W\,|\,W=Q-QS,\ S\in G^0\}$ является, очевидно, подпространством. Его ортогональное дополнение $L^{\perp}(Q)$ состоит из матриц $V=(V_1;\ V_2)$, для которых $Q_1^*V_2=0$. Пусть $Q=W+V$; $W\in L(Q)$; $V\in L^{\perp}(Q)$. Так как $W\in L(Q)$, то $W=Q-QS$ с некоторым $S\in G^0$. Следовательно, $V=QS$, т. е. имеет нормальную форму (4) и лежит с Q в одной G^0-орбите.

Докажем теперь, что если матрицы V и V' имеют нормальную форму (4) и лежат в одной G^0-орбите, то они совпадают. Пусть $V=(Q_1;\ V_2)$; $V'=(Q_1;\ V_2')$; $Q_1^*V_2=Q_1^*V_2'=0$, причем $V_2=V_2'+Q_1B$ с некоторой матрицей B. Тогда $V-V'=(0;\ Q_1B)\in L(Q)\cap L^{\perp}(Q)$. Следовательно, $V=V'$. Лемма доказана.

Завершим теперь доказательство теоремы. После преобразования, приводящего матрицу A к нормальной форме $\mathring{A}$ относительно левых преобразований, нормализуем преобразованную матрицу Q действием справа стационарной группы $G(\mathring{A})$. С этой целью сначала некоторым преобразованием $S\in G^0$ приведем матрицу $Q=(Q_1;\ Q_2)$ к виду, указанному в лемме, $QS=(Q_1;\ V_2)$; $Q_1^*V_2=0$. Заметим теперь, что множество матриц такого вида инвариантно относительно действия справа подгруппы $G^1=\left\{T\in G(\mathring{A})\,|\,T=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & C\end{pmatrix},\ \det C\neq 0\right\}$. Поэтому, действуя справа преобразованиями $T\in G^1$, можно привести блок V_2 к нормальной форме $\mathring{V}_2$ вида (3), в результате чего пара матриц $(A,\ Q)$ приведется к нормальной относительно действия (1) форме $(\mathring{A},\ \mathring{Q})$.

Докажем теперь единственность построенной нормальной формы. Пусть пары $(A,\ Q)$ и $(A',\ Q')$ имеют нормальную относительно действия (1) форму и $(A',\ Q')=(PA,\ QP^{-1})$ для некоторой матрицы P. Поскольку нормальная форма (2) однозначна, $A'=A$ и $P\in G(A)=G(A')$. Следовательно, $Q_1=Q_1'$. Так как матрицы Q и Q' лежат в одной $G(A)$-орбите, то $Q_2'=Q_1B+Q_2C$, где B и C — некоторые матрицы соответствующих размеров, причем $\det\neq 0$. Умножая это равенство слева на Q_1^* и пользуясь условием $Q_1^*Q_2=Q_1^*Q_2'=0$, получаем $Q_1^*Q_1B=0$, т. е. $Q_1B=0$. Следовательно, $Q_2'=Q_2C$. Но Q_2' и Q_2 имеют вид (3). Так как эта нормальная форма однозначна, то $Q_2' = Q_2$. Теорема полностью доказана.

Список литературы: 1. *Беклемишева Л. А.* Классификация полиномиальных систем относительно бирациональных преобразований. I. — Дифференциальные уравнения, 1978, **14**, № 5, с. 807—816. 2. *Беклемишева Л. А.* Инварианты полиномиальных систем дифференциальных уравнений относительно обобщенных степенных преобразований.— Докл. АН СССР, 1978, 243, № 6, с. 1365—1368. 3. *Беклемишева Л. А.* Классификация полиномиальных систем относительно бирациональных преобразований. II. — Дифференциальные уравнения, 1978, **14**, № 10, с. 1731—1738. 4. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы, инварианты и локальные отображения.— К.: Наук. думка, 1979. — 173 с.

Поступила в редколлегию 18.01.82.