УДК 7.972.7

Е. А. КОГУТ

УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ УЗЛЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРНОГО АРГУМЕНТА

Результаты по теории унитарных узлов, находящиеся в различных журнальных статьях, были обобщены в работе [1], в которой подробно изучены свойства характеристической оператор-функции (х. о.-ф.) операторного узла. В работах [2—5] изложены основные вопросы теории операторных узлов и их характеристических функций, относящиеся к изучению обратимых операторов, близких, в некотором смысле, к унитарным. В работе [6] проведены исследования для случая, когда изучаемый основной оператор — необратим. Цель настоящей статьи — рассмотреть линейно представимые состояния [4] дискретных открытых систем, ассоциированных с заданным операторным узлом, и изучить свойства х. о.-ф. операторного аргумента для узлов с необратимым основным оператором, являющейся естественным обобщением понятия х. о.-ф. унитарного узла.

§ 1. α-узлы и ассоциированные с ними дискретные открытые системы. Пусть заданы H, E, F — сепарабельные гильбертовы пространства. В пространствах E и F при помощи некоторых сигнатурных операторов J_E и J_F введены индефинитные метрики: $[u_1, u_2]_E = (J_E u_1, u_2)$, где u_1, $u_2 \in E$; $[v_1, v_2]_F = (I_F v_1, v_2)$, где v_1, $v_2 \in F$.

Определение. *Совокупность гильбертовых пространств* H, E, F *и операторов* $T \in [H, H]$; $\Phi \in [E, H]$; $\psi \in [F, H]$; $K \in [F, E]$ *назовем* α — *узлом и обозначим символом*

$$\alpha = \begin{pmatrix} H & T & H \\ \Phi & & \psi \\ E & K & F \end{pmatrix}, \tag{1}$$

если выполнены узловые соотношения $I - TT^* = \Phi\Phi^+$; $I - KK^+ = \Phi^+\Phi$; $I - T^*T = \Psi\Psi^+$; $T^*\Phi + \Psi K^+ = 0$; $I - K^+K = \Psi^+\Psi$; $\Phi K + T\Psi = 0$, (2) где «+» означает сопряжение по отношению к индефинитной метрике. Рассмотрим пару отображений, задаваемых соотношениями $x_{n+1} = Tx_n + \Phi u_n$ (3); $v_n = \Psi^+ x_n + K^+ u_n$ (4), где $x_n \in H$; $u_n \in E$; $v_n \in F$; $n = 0, 1, 2, \dots$ Отображения (3) — (4) называются дискретной открытой системой, ассоциированной с данным α-узлом (1), [3]. При этом H называется внутренним пространством, E и F, соответственно, пространствами входа и выхода. Для таких открытых систем, ассоциированных с α-узлами, имеет место закон сохранения метрики (см. [3]) $\|x_{n+1}\|^2 - \|x_n\|^2 = \|u_n\|_E^2 - \|v_n\|_F^2$.

§ 2. Линейно представимые решения дискретных открытых систем ассоциированных с α-узлами. Рассмотрим частные решения системы (3) — (4), отвечающие входам $u_n = \zeta^n u$, где ζ — некоторое комплексное число, а u — фиксированный элемент пространства E, и определим в этом случае отображение входа системы на выход. Представляя аналогичным образом внутреннее состояние и выход системы $x_n = \zeta^n x$; $v_n = \zeta^n v$, при условии, что $\zeta \bar{\in} \sigma(T)$, получаем $x = R(\zeta) u$, где $R(\zeta) = (\zeta I - T)^{-1} \Phi$ и $v = W(\zeta) u$, где $W(\zeta) = K^+ + \Psi^+ (\zeta I - T)^{-1} \Phi$. Теперь будем искать решения открытой системы (3) — (4) в ином виде. Пусть L некоторый гильбертовозначный линейный функционал из E в H, действующий на функциях $u(t_n) \in E$; $u(t_n) = u_n$ при $n = 0, 1, 2, \dots$. Построим пару отображений $[\hat{R}_\alpha(L) u]_{n+1} = T[\hat{R}_\alpha(L) u]_n + \Phi u_n$ **(5)**; $[\hat{S}_\alpha(L) u]_n = \Psi^+ [\hat{R}_\alpha(L) u]_n + K^+ u_n$ **(6)**, определив $[\hat{R}_\alpha(L) u]_0 = x_0$. Возникает вопрос, в каком случае, подав на вход системы сигнал u_n, получим линейно-представимое внутреннее состояние [4], т. е. $[\hat{R}_\alpha(L) u]_n = A^n x_0$, **(7)**, где $A \in [H, H]$ и $n = 0, 1, 2, \dots$. Легко видеть, для того, чтобы выполнялось соотношение (7) необходимо и достаточно, чтобы $(A - T) A^n x_0 = \Phi u_n$; $n = 0, 1, 2, \dots$. Обозначим через $\xi(T)$ — множество ограниченных операторов A, для которых разность $(A - T)$ является невырожденным оператором. Пусть $A \in \xi(T)$, тогда $[\hat{R}_\alpha(L) u]_n = R_\alpha(A) u_n$, где $R_\alpha(A) = (A - T)^{-1} \Phi$ и при $n = 0$ $x_0 = R_\alpha(A) u_0$. Для отображения $S_\alpha(L)$ имеем $[\hat{S}_\alpha(L) u]_n = W_\alpha(A) u_n$, где $W_\alpha(A) = K^+ + \Psi^+ (A - T)^{-1} \Phi$. (8). Операторнозначную функцию $W_\alpha(A)$ назовем [4] характеристической оператор-функцией операторного аргумента A. Областью определения $R_\alpha(A)$ и $W_\alpha(A)$ является $\xi(T)$ и их значениями являются линейные ограниченные операторы, действующие соответственно из E в H и из E в F. $W_\alpha(A)$ является продолжением х.о. -ф. $W(\zeta)$ на множество $\xi(T)$. Теперь обратимся к вопросу о линейной представимости одновременно внутреннего состояния и выхода системы, т. е. выясним, когда существуют операторы $B_e \in [E, E]$ и $B_a \in [F, F]$ такие, что $u_n = B_e^n u_0$; $[\hat{S}_\alpha(L)u]_n = B_a^n v_0$ и выполняется (7). Очевидно, должны удовлетворяться равенства $A^n R_\alpha(A) u_0 = R_\alpha(A) B_e^n u_0$; $B_a^n W_\alpha(A) u_0 = W_\alpha(A) B_e^n u_0$ при $n = 0, 1, 2, ..$, и если эти соотношения имеют место для всех $u_0 \in E$, то выполняются операторные равенства $A R_\alpha(A) = R_\alpha(A) B_e$ (9); $B_a W_\alpha(A) = W_\alpha(A) B_e$ (10).

§ 3. Унитарная эквивалентность α-узлов и определяющие свойства оператор-функции $W_\alpha(A)$. Узлы $\alpha_1 = \begin{pmatrix} H_1 & T_1 & H_1 \\ \Phi_1 & & \Psi_1 \\ E_1 & K_1 & F_1 \end{pmatrix}$ и $\alpha_2 = \begin{pmatrix} H_2 & T_2 & H_2 \\ \Phi_2 & & \Psi_2 \\ E_2 & K_2 & F_2 \end{pmatrix}$ называются унитарно эквивалентными [1], если $E_1 = E_2$; $F_1 = F_2$; $K_1 = K_2$ и существует такое изометрическое преобразование U пространства H_1 на H_2, что $UT_1 = T_2U$; $\Phi_2 = U\Phi_1$ и $\Psi_2 = U\Psi_1$. Известно, что если узлы α_1 и α_2 унитарно эквивалентны, то характеристические оператор-функции этих узлов равны. Используя определение унитарной эквивалентности α-узлов

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} H_i & T_i & H_i \\ \Phi_i & & \Psi_i \\ E & K & F \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

получаем 1. Если $A_1 \in \xi(T_1)$ и $A_2 \in \xi(T_2)$, то $UA_1U^{-1} \in \xi(T_2)$; $U^{-1}A_2U \in \xi(T_1)$ и справедливо равенство $\Psi_1^+ (U^{-1}A_2U - T_1)^{-1} \times (A_1 - U^{-1}A_2U)(A_1 - T_1)^{-1}\Phi_1 = \Psi_2^+ (A_2 - T_2)^{-1}(UA_1U^{-1} - A_2) \cdot (UA_1U^{-1} - T_2)^{-1}\Phi_2$ (11). 2. Если $A_1 \in \xi(T_1)$ и $A_2 \in \xi(T_2)$ и $\Psi_1^+ (U^{-1}A_2U - T_1)^{-1}(A_1 - U^{-1}A_2U)(A_1 - T_1)^{-1}\Phi_1 = 0$, то $W_{\alpha_1} \times (A_1) = W_{\alpha_2}(A_2)$, где U — изометрический оператор, осуществляющий эту унитарную эквивалентность. Определим подпространство H_α гильбертова пространства H как замыкание линейной оболочки векторов вида $T^n \Phi u$; $(n = 0, 1, 2, ...; u \in E)$ и $(T^*)^n \Psi v$; $(n = 0, 1, 2, ...; v \in F)$. Подпространство H_α инвариантно относительно T и T^*, и T индуцирует в $H \ominus H_\alpha$ унитарный оператор. Узел α называется простым, если $H = H_\alpha$ [6]. Следуя теореме 4 работы [6] для характеристической оператор-функции $W_\alpha(\zeta)$ узла $\alpha(1)$ имеют место следующие соотношения: $W_\alpha(\zeta) W_\alpha^+(\eta) = I + (1 - \bar{\eta}\zeta)\Psi^+(\zeta I - T)^{-1}(\bar{\eta} I - T^*)^{-1}\Psi$ (12); $W_\alpha^+(\eta) W_\alpha(\zeta) = I +$

$+ (1-\bar{\eta}\zeta)\Phi^+(\bar{\eta}\mathrm{I}-T^*)^{-1}(\zeta\mathrm{I}-T)^{-1}\Phi$ (13). Аналогичный результат можно получить и для характеристических оператор-функций операторного аргумента.

Теорема 1. *Пусть* $W_\alpha(A)$ — *х. о. -ф. операторного аргумента узла* α. *Тогда, если* $A_1 \in \xi(T)$ и $A_2 \in \xi(T)$, *то имеют место следующие соотношения* $W_\alpha(A_1)W_\alpha^+(A_2) = \mathrm{I} + \Psi^+(A_1 - T)^{-1} \times \times (\mathrm{I} - A_1A_2^*)(A_2^* - T^*)^{-1}\Psi$ (14) $W_\alpha^+(A_2)W_\alpha(A_1) = \mathrm{I} + \Phi^+(A_2^* - - T^*)^{-1}(\mathrm{I} - A_2^* A_1)(A_1 - T)^{-1}\Phi$ (15).

Доказательство. Для доказательства используем узловые соотношения, а также вытекающее из них равенство $\Psi K^+ = = -T^*\Phi$.

$$W_\alpha(A_1)W_\alpha^+(A_2) = K^+K + \Psi^+(A_1-T)^{-1}\Phi K + K^+\Phi^+(A_2^* - - T^*)^{-1}\Psi + \Psi^+(A_1-T)^{-1}\Phi\Phi^+(A_2^*-T^*)^{-1}\Psi = = I + \Psi^+(A_1-T)^{-1}\{\Phi\Phi^+ - (A_1-T)(A_2^*-T^*) - T(A_2^*-T^*) - - (A_1-T)T^*\}(A_2^*-T^*)^{-1}\Psi = \mathrm{I} + \Psi^+(A_1-T)^{-1}(\mathrm{I} - - A_1A_2^*)(A_2^*-T^*)^{-1}\Psi.$$

Аналогично получаем и равенство (15).

Следствие. *Пусть* $W_\alpha(A)$ — х. о. -ф *операторного аргумента* $A \in \xi(T)$. *Тогда*

$$\mathrm{I} - W_\alpha^+(A)W_\alpha(A) \begin{cases} \geqslant 0 & \text{при } A^*A - \mathrm{I} > 0 \\ = 0 & \text{при } A^*A - \mathrm{I} = 0 \\ \leqslant 0 & \text{при } A^*A - \mathrm{I} < 0 \end{cases};$$

$$\mathrm{I} - W_\alpha(A)W_\alpha^+(A) \begin{cases} \geqslant 0 & \text{при } AA^* - \mathrm{I} > 0 \\ = 0 & \text{при } AA^* - \mathrm{I} = 0 \\ \leqslant 0 & \text{при } AA^* - \mathrm{I} < 0 \end{cases}.$$

Итак, $W_\alpha(A)$ является односторонним J — сжатием, (J — растяжением), если $A^*A - \mathrm{I} > 0$ ($A^*A - \mathrm{I} < 0$) и если A — нормальный оператор, то $W_\alpha(A)$ — двустороннее J сжатие при $A^*A - \mathrm{I} > 0$.

Определение. *Операторной* M — *окрестностью радиуса* r ($r > 0$) *бесконечно удаленного оператора в пространстве* H *будем называть множество всех операторов* N *таких, что* $\|N^{-1}\|^{-1} > > r$ *и обозначать* $M_r(H)$. Очевидно, что если $r_1 > r_2$, то $M_{r_1}(H) \subset \subset M_{r_2}(H)$.

Теорема 2. *Пусть узлы*

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} H & T_i & H \\ \Phi_i & & \Psi_i \\ E & K & F \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2)$$

простые и в некоторой M-окрестности бесконечно удаленного оператора имеет место тождество $W_{\alpha_1}(A) = W_{\alpha_2}(A)$. Тогда узлы α_1 и α_2 унитарно эквивалентны. Причем, если $U \in [H, H]$ унитарный оператор, осуществляющий эту унитарную эквивалентность, то для всех операторов A из этой M — окрестности $\Psi_1^+ (A - T_1)^{-1} (U^{-1} AU - A) (U^{-1} AU - T_1)^{-1} \Phi_1 = 0.$ (16)

Доказательство. Унитарная эквивалентность узлов α_1 и α_2 следует из равенства х. о. -ф. в окрестности бесконечно удаленной точки [1]. Далее $0 = W_{\alpha_1}(A) - W_{\alpha_2}(A) = \Psi_1^+ (A - T_1)^{-1} \times$

$$\times \Phi_1 - \Psi_2^+ (A - T_2)^{-1} \Phi_2 = \Psi_1^+ (A - T_1)^{-1} \Phi_1 - \Psi_1^+ (U^{-1} AU -$$
$$- T_1)^{-1} \Phi_1 = \Psi_1^+ (A - T_1)^{-1} (U^{-1} AU - A) (U^{-1} AU - T_1)^{-1} \Phi_1.$$

Определение. *Операторный α-узел* (1) *называется сильно неунитарным, если существуют операторы* $\Phi^{-1} \in [H, E]$ *и* $\Psi^{-1} \in [H, F]$. Теперь докажем основную теорему настоящего параграфа.

Теорема 3. *Пусть узлы* $\alpha_i = \begin{pmatrix} H & T_i & H \\ \Phi_i & & \Psi_i \\ E & K & F \end{pmatrix}$; $(i = 1, 2)$ *простые и по крайней мере один из них сильно неунитарен. Если в некоторой M-окрестности бесконечно удаленного оператора имеет место тождество* $W_{\alpha_1}(A) = W_{\alpha_2}(A)$, *то* $T_1 = T_2$ *и существует такое* λ, *что* $|\lambda| = 1$ *и* $\Phi_2 = \lambda \Phi_1$ *и* $\Psi_2 = \lambda \Psi_1$.

Доказательство. Пусть для определенности узел α_1 сильно неунитарен. Так как любой ограниченный в H оператор V, коммутирующий со всеми операторами A из некоторой M-окрестности бесконечно-удаленного оператора, имеет вид λI (см. [4]), то существует унитарный оператор U такой, что $UT_1 = T_2 U$, $\Phi_2 = U \Phi_1$ и $\Psi_2 = U \Psi_1$ и выполняется (16) для всех A из некоторой M — окрестности бесконечно удаленного оператора. Так как узел α_1 сильно неунитарен, то из (16) следует, что $UA = AU$ для всех A из указанной окрестности и на основании леммы получаем, что $U = \lambda I$, а в силу унитарности U получаем $|\lambda| = 1$. Теорема доказана.

Приведем прием α-узла и открытой системы, ассоциированной с ним, допускающей линейную представимость входа, внутреннего состояния и выхода. Пусть $\dim E = \dim F = 2$; $\dim H = 4$. В пространствах E и F заданы инволюции $J_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $J_F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Операторы, входящие в α-узел, зададим следующим образом: $T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$, где $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sqrt{(t^2 - 1)(\varphi^2 - 1)} & \varphi \sqrt{t^2 - 1} \\ \varphi & \sqrt{\varphi^2 - 1} \end{pmatrix};$$

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\sqrt{\psi^2-1} & \psi \\ \psi\sqrt{t^2-1} & -\sqrt{(t^2-1)(\psi^2-1)} \end{pmatrix}$$

Числа t, φ, ψ — действительные и $|t| > 1$, $|\varphi| \geqslant 1$, $|\psi| \geqslant 1$. Внешний оператор K находим из узловых соотношений (2)

$$K = \begin{pmatrix} \psi t\sqrt{\varphi^2-1} & -t\sqrt{(\varphi^2-1)(\psi^2-1)} \\ -\varphi\psi t & \varphi t\sqrt{\psi^2-1} \end{pmatrix}.$$

Достаточными условиями линейной представимости состояний открытой системы (3) — (4) ассоциированной с построенным α-узлом являются соотношения (9) — (10). Пусть оператор A, действующий в H и задающий линейную представимость внутреннего состояния открытой системы, имеет следующую блочную структуру $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$, где $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где c и ρ — произвольные действительные числа. Зная вид оператор-функций $R_\alpha(A)$ и $W_\alpha(A)$, находим их конкретные выражения

$$R_\alpha(A) = \begin{pmatrix} \varphi C & C\sqrt{\varphi^2-1} \\ -2\varphi C & -2C\sqrt{\varphi^2-1} \\ \sqrt{(t^2-1)(\varphi^2-1)} + \varphi(t-\rho) & \varphi\sqrt{t^2-1} + (t-\rho)\sqrt{\varphi^2-1} \\ \varphi & \sqrt{\varphi^2-1} \end{pmatrix};$$

$W_\alpha(A) = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}$, где $w_1 = \sqrt{(t^2-1)(\varphi^2-1)(\psi^2-1)} + \varphi(t - \rho)\sqrt{\psi^2-1} - \varphi\psi\sqrt{t^2-1} - \psi t\sqrt{\varphi^2-1}$; $w_2 = \varphi \times \sqrt{(t^2-1)(\psi^2-1)} + (t-\rho)\sqrt{(\varphi^2-1)(\psi^2-1)} - \psi \times \sqrt{(t^2-1)(\varphi^2-1)} - \varphi\psi t$; $w_3 = \psi\sqrt{(t^2-1)(\varphi^2-1)} + \varphi\psi(t - \rho) - \varphi\sqrt{(t^2-1)(\psi^2-1)} - t\sqrt{(\varphi^2-1)(\psi^2-1)}$; $w_4 = \varphi\psi\sqrt{t^2-1} + \psi(t-\rho)\sqrt{\varphi^2-1} - \sqrt{(t^2-1)(\varphi^2-1)(\psi^2-1)} - \varphi t\sqrt{\psi^2-1}$. Из соотношения (9) находим оператор B_e, задающий линейную представимость входа открытой системы

$$B_e = \begin{pmatrix} 1 - \rho\varphi \sqrt{\dfrac{\varphi^2 - 1}{t^2 - 1}} & -\rho \dfrac{\varphi^2 - 1}{\sqrt{t^2 - 1}} \\ \dfrac{\rho\varphi^2}{\sqrt{t^2 - 1}} & 1 + \rho\varphi \sqrt{\dfrac{\varphi^2 - 1}{t^2 - 1}} \end{pmatrix}.$$

Так как $\det W_\alpha(A) = 1 - \rho t$, то, потребовав $1 - \rho t \neq 0$, из условия (10) находим оператор B_a, задающий линейную представимость выхода открытой системы $B_a = W_\alpha(A)\ B_e\,[W_\alpha(A)]^{-1}$.

Список литературы: *1. Бродский М. С.* Унитарные операторные узлы и их характеристические функции.— Усп. мат. наук, 1978, 33, вып. 4 (202), с. 141—168. 2. *Бродский В. М.* Теоремы умножения и деления характеристических функций обратимого оператора.— Acta Scientiarum Mathematicarum, 1971, 32, p. 165—175. 3. *Янцевич* А. А. Операторные *j*-узлы и ассоциированные открытые системы.— Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1973, вып. 17, с. 215—220. 4. *Маркус М. А., Цекановский Э. Р., Янцевич А. А.* Линейно представимые решения дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах.— Мат. методы в кибернетике, 1980, вып. 1, с. 17—28. 5. *Бродский В. М., Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.*— О характеристических функциях обратимого оператора.— Acta Scientiarum Mathematicarum, 1971, 32, p. 141—164. 6. *Бродский В. М.* Об операторных узлах и их характеристических функциях.— Докл. АН СССР, 1971, 198, № 1, с. 16—19.

Поступила в редколлегию 22.12.81.