УДК 513. 88

В. В. КАШИРИН

ИЗОМОРФНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ НЕСТАБИЛЬНЫХ ЦЕНТРОВ РИССОВСКИХ ШКАЛ

Пусть (a_{pn}) — матрица положительных чисел, неубывающих по индексу p. Через $L^1(a_{pn})$ обозначим класс всех подпоследовательностей $\xi = (\xi_n)$, для которых при любом p $\|\xi\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| a_{pn} < \infty$. Множество $L^1(a_{pn})$ рассмотрим как пространство Кёте с топологией, задаваемой системой норм $(\|\cdot\|_p)$, $p = 1, 2, \ldots$.

В частном случае, когда $a_{pn} = \exp(\lambda_p a_n)$, где $a_n \uparrow \infty$, $\lambda_p \uparrow \uparrow \lambda$ и $-\infty < \lambda \leqslant \infty$ получаем центр абсолютной шкалы Рисса, конечный $(R_\lambda(a_n))$ при $\lambda < \infty$ и бесконечный $(R_\infty(a_n))$ при $\lambda = \infty$. На самом деле достаточно рассматривать лишь один конечный центр $R_0(a_n)$, так как при $\lambda < \infty$ все $R_\lambda(a_n)$ будут ему изоморфны.

В работе [1] и др. для медленно растущих последовательностей (a_n) был получен ряд необходимых и достаточных условий, при которых риссовский центр $R_0(a_n)$ содержит подпространства, изоморфные $R_\infty(b_n)$, и риссовский центр $R_\infty(a_n)$ содержит фактор-пространства, изоморфные $R_0(b_n)$. При этом оставался неисследованным случай, когда $\sup(a_{n+1}/a_n) = \infty$.

Мы рассматриваем нестабильные риссовские центры $R_\lambda(a_n)$, $\lambda = 0, \infty$, т. е. центры, определяемые последовательностью (a_n), обладающей свойством $a_{n+1}/a_n \to \infty$. В данной статье для произвольной последовательности (b_n) найдем необходимые и достаточные условия, при которых риссовский центр $R_0(b_n)$ содержит подпространства, изоморфные нестабильному центру $R_\infty(a_n)$, и риссовский центр $R_\infty(b_n)$ содержит фактор-пространства, изоморфные нестабильному центру $R_0(a_n)$.

Теорема 1. *Для того чтобы бесконечный риссовский центр $R_\infty(a_n)$ изоморфно вкладывался в конечный риссовский центр $R_0(b_n)$ необходимо, а в случае, когда $R_\infty(a_n)$ нестабилен, и достаточно, чтобы для любого натурального r нашлась последовательность индексов $(k_r(n))$, для которой выполняется неравенство $r \leqslant b_{k_r(n)}/a_n \leqslant M(r) < \infty$.* (1)

Необходимость. Если условие (1) не выполняется, то существуют постоянная C, подпоследовательности натурального ряда (m_n) и (n_j) такие, что $b_{m(n)}/a_n < C$, $b_{m(n)+1}/a_n \geqslant C$, но $\lim_j (b_{m(n(j))+1}/a_{n(j)}) = \infty$. Последнее означает, что для любой последовательности (k_j), где $k_j \to \infty$, либо $\lim_j (b_{(kj)}/a_{(nj)}) \leqslant C$ если $k_j \leqslant m_{n(j)}$ для бесконечного числа индексов j, либо $\lim_j (b_{k(j)}/a_{n(j)}) = \infty$, если $k_j > m_{n(j)}$ для достаточно больших j.

Из [2] следует, что все линейные непрерывные операторы T: $R_\infty(a_{n(j)} \to R_0(b_n)$ будут компактными. Отсюда (см. напр. [3]) следует, что в $R_0(b_n)$ нет подпространств, изоморфных $R_\infty(a_{n(j)})$ и тем более $R_\infty(a_n)$.

Достаточность. Изменив для удобства конечное число членов последовательности (b_n), можно считать, что $a_n < b_{m(n)+1} < b_{m(n)+2} < \cdots < b_{m(n+1)} \leqslant a_{n+1}$. Выделим теперь счетное число последовательностей $(k_r(n))_{n=1}^\infty$ $(r = 1, 2, \ldots)$ таких, что $\alpha(r) \leqslant b_{k_r(n)}/a_n < M(\alpha(r))$ (2), где $\alpha(1) = 1$, $\alpha(r+1) = 2M(\alpha(r))$.

Пусть (e_n) — последовательность координатных орт. Рассмотрим подпространство X в $R_0(b_n)$, образованное блок-базисной последовательностью $x_n = \sum_{r=1}^{m(n)} \left(\exp\sqrt{a_n \cdot b_{k_r(n)}}\right) e_{k_r}(n)$, где последовательность $(m(n))$ подбирается так, чтобы $m(n) \leqslant n$ и неравенство $b_{k_r(n)} < a_{n+1}$ выполнялось бы при всех $r \leqslant m(n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Из нестабильности пространства $R_\infty(a_n)$ вытекает, что можно подобрать последовательность $(m(n))$, обладающую вышеуказанными свойствами и такую, что $m_n \uparrow \infty$.

Докажем изоморфизм пространств X и $R_\infty(a_n)$. Для этого достаточно показать, что $\forall p \exists q : |x_n|_p \leqslant \| e_n \|_q$ (3); $\forall q \exists \theta : \lim_n \times (|x_n|_\theta / \| e_n \|_q) = \infty$ (4), где $(|\cdot|_p)$ — индуцированная система норм в X.

По определению $|x_n|_p = \sum_{r=1}^{m(n)} \frac{1}{m(n)} \cdot \left(\exp \sqrt{a_n \cdot b_{k_r(n)}}\right) \times \exp\left(\mu_p \cdot b_{k_r(n)}\right) \| e_n \|_q = \exp(\lambda_q \cdot a_n)$, где $\lambda_q \uparrow \infty$, $\mu_p \uparrow 0$.

Установим неравенство (3):

$$|x_n|_p = \sum_{r=1}^{m(n)} \frac{1}{m(n)} \exp\left(\sqrt{a_n \cdot b_{k_r(n)}} + \mu_p \cdot b_{k_r(n)}\right) =$$
$$= \sum_{r=1}^{m(n)} \frac{1}{m(n)} \exp\left(\left(\sqrt{b_{k_r(n)}/a_n} + \mu_p\left(b_{k_r(n)}/a_n\right)\right) a_n\right).$$

Функция $\sqrt{x} + \mu_p x$ ограничена сверху числом $-1/4 \cdot \mu_p$. Взяв $\lambda_q > -1/4\mu_p$, получим $|x_n|_p \leqslant \exp(\lambda_q a_n) = \| e_n \|_q$.

Доказательство завершится установлением соотношения (4):

$$|x_n|_\theta / \| e_n \|_q = \sum_{r=1}^{m(n)} \frac{1}{m(n)} \exp\left(\sqrt{a_n \cdot b_{k_r(n)}} + \mu_\theta b_{k_r(n)} - \lambda_q a_n\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{m(n)} \exp\left(\left(\sqrt{b_{k_r(n)}/a_n} + \mu_\theta\left(b_{k_r(n)}/a_n\right) - \lambda_q\right) a_n\right).$$

Зафиксируем q и, воспользовавшись условием (2), выберем фиксированный индекс r, а затем θ так, что неравенства

$$\sqrt{b_{k_r(n)}/a_n} > 2\lambda_q; \quad \sqrt{b_{k_r(n)}/a_n} + \mu_\theta\left(b_{k_r(n)}/a_n\right) - \lambda_q > \varepsilon > 0$$

будут выполняться для всех $n > r$. В этом случае нетрудно видеть, что $\lim_{n\to\infty} (| x_n|_\theta / \| e_n \|_q) \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(n)} \exp(\varepsilon \cdot a_n) = \infty$, так как $m(n) \leqslant n$ по построению.

Следствие 1. *Произвольный нестабильный риссовский центр $R_0(b_n)$ не содержит подпространств, изоморфных какому-либо бесконечному риссовскому центру $R_\infty(a_n)$.*

Доказательство проведем от противного. Предположим, что пространство $R_0(b_n)$ содержит подпространство, изоморфное $R_\infty(a_n)$. Без потери общности можно считать, что $R_\infty(a_n)$ — нестабильный риссовский центр. В этом случае по теореме 1 из соотношения (1) найдутся непересекающиеся последовательности $(k_r(n))_{n=1}^\infty$ и $(k_{r+1}(n))_{n=1}^\infty$, для которых $(r+1)/M(r) \leqslant b_{k_{r+1}(n)}/b_{k_r(n)} \leqslant$

$\leqslant M(r+1)/r$, что противоречит предположению о нестабильности центра $R_0(b_n)$.

Следствие 2 (ср. [4]). *Произвольный бесконечный нестабильный центр абсолютной шкалы Рисса $R_\infty(a_n)$ изоморфно вкладывается в конечный риссовский центр, если последний изоморфен своему подпространству единичной коразмерности.*

Доказательство. Известно (см. [5]), что риссовский центр $R_0(b_n)$, изоморфный своему подпространству единичной коразмерности, определяется последовательностью (b_n), обладающей свойством $\sup\limits_n (b_{n+1}/b_n) = M < \infty$, где M — некоторая постоянная. Для фиксированного r и произвольного n подберем последовательность $(k_r(n))/$ так, что $(b_{k_r(n)-1}/a_n < r$, но $b_{k_r(n)}/a_n \geqslant r$. При этом справедливо неравенство $r \leqslant b_{k_r(n)}/a_n = (b_{k_r(n)-1}/a_n)(b_{k_r(n)}/b_{k_r(n)-1}) \leqslant \leqslant M \cdot r$.

Теорема 2. *Для того чтобы пространство $R_\infty(b_n)$ имело фактор-пространство X, изоморфное конечному центру $R_0(a_n)$, необходимо, а в случае, когда риссовский центр $R_0(a_n)$ нестабилен, и достаточно, чтобы для любого натурального r нашлась последовательность индексов $(k_r(n))_{n=1}^{\infty}$, для которых при достаточно больших n выполняется неравенство $r \leqslant a_n/b_{k_r(n)} \leqslant \leqslant M(r) < \infty$ (5).*

Необходимость. Если условие (5) не выполняется, то существуют постоянная C, подпоследовательности натурального ряда (m_n) и (n_j) такие, что при достаточно больших n $a_n/b_{m(n)} \geqslant C$, $a_n/b_{m(n)+1} < C$, но $\lim\limits_j (a_{n(j)}/b_{m(n(j))}) = \infty$.

Положим $c_j = a_{n(j)}$. Нетрудно видеть, что для любой последовательности индексов (k_j), где $k_j \to \infty$, либо $\lim\limits_j (c_{k(j)}/b_j) \leqslant C$, либо $\lim\limits_j (c_{k(j)}/b_j) = \infty$. Из [7] следует, что все линейные непрерывные операторы $T: R_\infty(b_n) \to R_0(c_n)$ будут компактными. Последнее означает, что в $R_\infty(b_n)$ нет фактор-пространств, изоморфных $R_0(c_n)$. А так как пространство $R_0(c_n)$ изоморфно некоторому замкнутому дополнимому подпространству в $R_0(a_n)$, то в $R_\infty(b_n)$ тем более нет фактор-пространств, изоморфных $R_0(a_n)$.

Достаточность. Изменим для удобства конечное число членов последовательностей (a_n), (b_n) и в дальнейшем будем считать, что $a_n < b_{m(n)+1} < b_{m(n)+2} < \cdots < b_{m(n+1)} \leqslant a_{n+1}$. Выделим счетное число последовательностей $(k_r(n))_{n=1}^{\infty}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ таких, что $\alpha(r) \leqslant a_n/b_{k_r(n)} < M(\alpha(r))$ (6), где $\alpha(1) = 1$, $\alpha(r+1) = 2M(\alpha(r))$.

Пусть (e_n) — последовательность координатных орт. Положим

$$G = \left\{ x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \cdot e_i \in R_\infty(b_n) : \sum_{r=1}^{m(n)} \left(\exp\sqrt{a_n \cdot b_{k_r(n)}}\right) \xi_{k_r(n)} = 0 \quad \forall n \right\},$$

где последовательность $(m(n))$ подбирается так, чтобы $m(n) \leqslant n$ и неравенство $b_{k_r(n)} > a_{n-1}$ выполнялось бы при всех $r \leqslant m(n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Фактор-пространство $R_\infty(b_n)/G$ изоморфно пространству Кёте $L^1(c_{pn})$, где $c_{pn} = \min\limits_{1 \leqslant r \leqslant m(n)} \exp\left(p \cdot b_{k_r(n)} - \sqrt{a_n \cdot b_{k_r(n)}}\right)$.

Докажем, что пространства $L^1(c_{pn})$ и $R_0(a_n)$ изоморфны. Для этого достаточно показать, что имеют место следующие соотношения:

$$\forall p \, \exists q : \|e_n\|_p \leqslant c_{qn} \quad \text{и} \quad \forall q \, \exists \theta : c_{qn} \leqslant \|e_n\|_\theta, \quad \text{где} \quad \|e_n\|_p = \exp(\lambda_p a_n), \quad \lambda_p \uparrow 0.$$

Установим данные соотношения. Для фиксированного индекса p подберем индекс q так, чтобы $\inf\limits_{-\infty < x < \infty}(qx - \sqrt{x}) > \lambda_p$. Тогда

$$\|e_n\|_p = \exp(\lambda_p \cdot a_n) \leqslant \min_{1 \leqslant r \leqslant m(n)} \exp\left(\left(q(b_{k_r(n)}/a_n) - \sqrt{b_{k_r(n)}/a_n}\right) a_n\right) =$$

$$= \min_{1 \leqslant r \leqslant m(n)} \exp\left(q \cdot b_{k_r(n)} - \sqrt{b_{k_r(n)} \cdot a_n}\right) = c_{pn}.$$

С другой стороны, зафиксировав индекс q, из (6) можно добрать такие r и $\varepsilon > 0$, что $q(b_{k_r(n)}/a_n) - \sqrt{b_{k_r(n)}/a_n} < -\varepsilon$. А так как $\lambda_p \uparrow 0$, то можно подобрать такой индекс θ, для которого $\lambda_\theta > -\varepsilon$.

Таким образом, $c_{qn}/\|e_n\|_\theta \leqslant \exp\left(\left(q \cdot (b_{k_r(n)}/a_n) - \sqrt{b_{k_r(n)}/a_n}\right) \times \times a_n - \lambda_q \cdot a_n\right) \leqslant 1$.

Следствие 1. *Произвольный нестабильный риссовский центр $R_\infty(b_n)$ не содержит фактор-пространств, изоморфных какому-либо конечному риссовскому центру.*

Доказательство проведем от противного. Предположим, что пространство $R_\infty(b_n)$ содержит фактор-пространство, изоморфное $R_0(a_n)$. Без потери общности можно считать, что центр $R_0(a_n)$ — нестабильный. В этом случае по теореме 2 из соотношения (5) найдутся непересекающиеся последовательности $(k_{r+1}(n))_{n=1}^\infty$ и $(k_r(n))_{n=1}^\infty$, для которых при достаточно больших n выполняется неравенство $r/M(r+1) < b_{k_{r+1}(n)}/b_{k_r(n)} < M(r)/(r+1)$, что противоречит предположению о нестабильности центра $R_\infty(b_n)$.

Определение. *Риссовский центр называется слабостабильным, если он изоморфен своему подпространству единичной коразмерности.*

Следствие 2. *Бесконечный слабостабильный риссовский центр $R_\infty(b_n)$ содержит фактор-пространство, изоморфное произвольному нестабильному конечному риссовскому центру.*

Доказательство. Известно (см. [5]), что слабостабильный риссовский центр $R_\infty(b_n)$ определяется последовательностью

(b_n), обладающей свойством $\sup_n (b_{n+1}/b_n) = M < \infty$, где M — некоторая постоянная. Для фиксированного r подберем последовательности $(k_r(n))_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы при достаточно больших n выполнялись неравенства $a_n/b_{k_r(n)} > r$, но $a_n/b_{k_r(n)+1} \leqslant r$. Отсюда следует, что $r < a_n/b_{k_r(n)} = (a_n/b_{k_r(n)+1})(b_{k_r(n)+1}/b_{k_r n}) \leqslant M \cdot r$.

Список литературы: *1. Каширин В. В.* О некоторых свойствах линейных непрерывных операторов, действующих в обобщенных пространствах степенных рядов. — Intern. conf. functional — differential systems and ralated topics. Abstracts, part 1, Poland, 1979, p. 45 — 46. *2. Каширин В. В.* О подпространствах конечного центра абсолютной шкалы Рисса, изоморфных бесконечному центру. — Сиб. мат. журн., 1975, **16**, вып. 4, с. 863 — 865. *3. Zaharjuta W. P.* On the isomorphism of Cartesian products of locally convex spaces. — Studia Math., 1973, 46, p. 120 — 221. *4. Каширин В. В.* Об изоморфизмах ультраядерных центров абсолютных шкал Рисса. — Деп. № 1593 — 78. *5. Драгилев М. М.* О правильных базисах в ядерных пространствах. — Мат. сб., 1965, **68**, вып. 2, с. 153 — 173.

Поступила в редколлегию 20.11.80.