УДК 517.5

В. Э. КАЦНЕЛЬСОН

КОНТИНУАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ГАМБУРГЕРА — НЕВАНЛИННЫ И ОСНОВНЫЕ МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. IV

(Задачи об интегральном представлении как континуальные интерполяционные задачи; от основного матричного неравенства (ОМН) — асимптотическому соотношению).

В статье излагается четвертая часть работы. Первые три части — в работах [1—3]. Нумерация параграфов и формул является продолжением нумерации в [1—3].

§ 9.1°. Задачи $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{K}^0$, $\boldsymbol{K}^\infty$ могут трактоваться как континуальные интерполяционные задачи, родственные интерполяционной задаче Неванлинны — Пика. Задача Неванлинны — Пика (в классе $(\boldsymbol{R})$) заключается в следующем: дана последовательность узлов интерполяции $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $(\operatorname{Im} z_j > 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, и последовательность чисел $w_1, w_2, \ldots, w_n$ — интерполируемых значений. Разыскивается функция $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$, для которой выполняются интерполяционные условия $w(z_j) = w_j$, $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Как известно, задача Неванлинны — Пика в классе $(\boldsymbol{R})$ разрешима точно тогда, когда эрмитово неотрицательна матрица

$$\left\| \frac{w_j - \bar{w}_k}{z_j - \bar{z}_k} \right\|_{1 < j,\ k < n}.$$

Проблема моментов Гамбургера, согласно теореме Гамбургера — Неванлинны, сводится к отысканию функции $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$, удовлетворяющей при $|z| \to \infty$, $\arg z = \pi/2$ асимптотическому соотношению $z^{2n+1} w(z) + \sum\limits_{0 < k < 2n} z^{2n-1} s_k = 0(1)$ $(\mathrm{As}_{\boldsymbol{H}})$ и может быть трактована как интерполяционная задача с кратным узлом интерполяции в точке $z = \infty$, лежащем на границе верхней полуплоскости. Вещественная последовательность $s_0, s_1, \ldots, s_{2n}$ играет роль «интерполируемых значений»; асимптотическое соотношение $(\mathrm{As}_{\boldsymbol{H}})$ играет роль интерполяционного условия.

С каждой из рассмотренных задач — $\boldsymbol{P}_l$, $\boldsymbol{G}_l$, $\boldsymbol{W}_l$, $\boldsymbol{K}_l^0$, $\boldsymbol{K}_l^\infty$ — также связано асимптотическое соотношение (As), в котором фигурируют функция $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$ и функция $S(t)$ на $[0, L)$, где $L = l$ в задачах $\boldsymbol{P}_l$ и $\boldsymbol{G}_l$, $L = 2l$ в задачах $\boldsymbol{W}_l$, $\boldsymbol{K}_l^0$, $\boldsymbol{K}_l^\infty$ $S(0) = 0$ в $\boldsymbol{G}_l$ и $\boldsymbol{K}_l^\infty$. Эти асимптотические соотношения имеют вид

$$e^{-iLz}w(z) - i\int_0^L e^{-i(L-\xi)z}S(\xi)\,d\xi = \rho(z); \ (\mathrm{As}_P); \ \frac{e^{-iLz}-1}{-iz}w(z) -$$

$$- z\int_0^L e^{-i(L-\xi)z}S(\xi)\,d\xi + iS(L) = \rho(z); \ (\mathrm{As}_G); \ e^{Lz}w(z) +$$

$$+ \int_0^L e^{(L-\xi)z}S(\xi)\,d\xi = \rho(z); \ (As_W); \ \ (1+\cos L\sqrt{z})\,w(z) -$$

$$- \int_0^L \frac{\sin(L-\xi)\sqrt{z}}{\sqrt{z}}S(\xi)\,d\xi = \rho(z); \ (\mathrm{As}_{K^0}); \ \frac{1-\cos L\sqrt{z}}{z}w(z) -$$

$$- \int_0^L \frac{\sin(L-\xi)\sqrt{z}}{\sqrt{z}}S(\xi)\,d\xi = \rho(z); \ (\mathrm{As}_{K^\infty}),$$

где $\rho(z)$ — остаток асимптотической формулы.

Теоремы H—N (континуальные аналоги теоремы Гамбургера—Неванлинны) связывают эти асимптотические соотношения с интегральными представлениями функции $S(t)$. В перечисленных задачах интегральные представления имеют вид

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}\,d\sigma(\lambda); \quad (I_P)$$

$$S(t) = i\alpha t + \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{e^{-it\lambda}-1+it\lambda}{\lambda^2} - it\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right\}d\sigma(\lambda), \quad (I_G)$$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\lambda}d\sigma(\lambda), \quad (I_W)$$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos t\sqrt{\lambda}\,d\sigma(\lambda), \quad (I_{K^0})$$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos t\sqrt{\lambda}}{\lambda}\,d\sigma(\lambda), \quad (I_{K^\infty}).$$

Тауберовы теоремы H—N (§ 7) гласят, что если асимптотическое соотношение (As) выполняется хотя бы на одном луче, с остаточным членом $\rho(z) = O(\exp\{\varepsilon|z|\})$ в задачах $\boldsymbol{P}_l$, $\boldsymbol{G}_l$, $\boldsymbol{W}_l$ и $\rho(z) =$

* По форме соотношения (As), приведенные здесь, несколько отличаются от соотношений (As) в § 7, но по существу им эквивалентны.

$= O(\exp\{\varepsilon\sqrt{|z|}\})$ в задачах K_l^0 и K_l^∞, то функция $w(z)$ допускает соответствующее интегральное представление с мерой $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ (а в задаче G и с константой α) из интегрального представления функции $w(z)$; при этом мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условиям убывания на бесконечности, обеспечивающим существование интеграла в интегральном представлении (I) функции $S(t)$. Справедливы и абелевы теоремы $H-N$ (не сформулированные из-за недостатка места), утверждающие, что если функция $S(t)$ допускает соответствующее задаче интегральное представление, то равномерно в любом замкнутом угле, не пересекающемся с вещественной осью, выполняется связанное с задачей асимптотическое соотношение (As), и притом с $\rho(z) = o(1)$. Таким образом, из выполнения асимптотического соотношения (As) лишь на одном луче с медленно растущим остаточным членом $\rho(z)$ следует выполнение этого асимптотического соотношения всюду вне вещественной оси и притом с $\rho(z) = o(1)$.

Функция $S(t)$ порождает в каждой из рассмотренных пяти задач эрмитово ядро $K(t, \tau)$ $(0 \leqslant t, \tau \leqslant l)$:

$$K(t, \tau) = S(t-\tau) \text{ в задаче } P_l;$$
$$K(t, \tau) = S(t-\tau) - S(t) - \overline{S(\tau)} - G_l^*;$$
$$K(t, \tau) = S(t+\tau) - W_l;$$
$$K(t, \tau) = \frac{1}{2}\{S(t+\tau) + S(|t-\tau|)\} - K_l^0;$$
$$K(t, \tau) = \frac{1}{2}\{S(t+\tau) - S(|t-\tau|)\} - K_l^\infty.$$

Если выполняется одно из приведенных в этом пункте асимптотических соотношений (As), то фигурирующая в нем функция $S(t)$ допускает, согласно тауберовой теореме $H-N$, соответствующее интегральное представление, откуда немедленно следует эрмитова неотрицательность порожденного этой функцией ядра $K(t, \tau)$. Наоборот, если функция $S(t)$ порождает эрмитово неотрицательное ядро $K(t, \tau)$, соответствующее одной из рассмотренных задач, то $S(t)$ допускает надлежащее интегральное представление на $[0, L)$ (см. § 2); из абелевой теоремы $H-N$ теперь следует, что для ассоциированной с представляющей мерой функции $w(z)$ выполняется асимптотика (As).

Асимптотическое соотношение (As), связанное с каждой из рассмотренных задач P_l, G_l, W_l, K_l^0, K_l^∞, можно трактовать как своего рода интерполяционное условие для $w(z)$ с узлом интерполяции в точке $z = \infty$, имеющим «континуальную кратность»; функция $S(t)$ задает «интерполируемые значения». Каждую из перечисленных задач, таким образом, можно трактовать как кон-

* В определении класса G_l здесь ядро $K(t, \tau)$ отличается знаком от ядра $K(t, \tau)$ в [1—2]. С этим связан разнобой в записи ОМН и асимптотических соотношений.

тинуальную интерполяционную задачу, заключающуюся в отыскании функции $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$, удовлетворяющую соответствующему континуальному интерполяционному условию — асимптотическому соотношению (As).

Эрмитова неотрицательность порожденного функцией $S(t)$ ядра $K(t, \tau)$ является необходимым и достаточным условием разрешимости этой интерполяционной задачи.

2°. Предложенный В. П. Потаповым подход к исследованию интерполяционных задач типа Неванлинны — Пика — так называемых классических интерполяционных задач — заключается в переформулировке задачи в терминах эквивалентного ей ОМН и в дальнейшем решении этого неравенства относительно интерполирующей функции $w(z)$. Ряд теорем об эквивалентности ОМН задаче об интегральном представлении — теоремы $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{K}^0$, $\boldsymbol{K}^\infty$ был сформулирован в § 4. В § 6, п°. 2 были доказаны первые части этих теорем, именно, было установлено, что если функция $S(t)$ допускает соответствующее представление, то ОМН выполняется при всех невещественных z. Докажем вскоре не только вторые части этих теорем, но и более общие утверждения и покажем, что если функция $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$ удовлетворяет ОМН задачи даже не при всех невещественных z, а лишь при z, близких к бесконечно удаленной точке — «узлу интерполяции», то выполняется соответствующее асимптотическое соотношение (As), и значит, согласно тауберовой теореме H—N, функция $S(t)$ допускает надлежащее интегральное представление. Отсюда и из первых частей теорем § 4, доказанных в § 6, п°. 2, будет следовать, что если в одной из рассмотренных задач ОМН выполняется лишь для z, близких к бесконечно удаленной точке, то это ОМН будет выполняться и для всех невещественных z. Это — проявление общего принципа, согласно которому функция $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$, удовлетворяющая ОМН классической интерполяционной задачи при z, близких к узлам интерполяции, удовлетворяет ОМН и при всех невещественных z.

Сказанное мотивирует и такую постановку классической интерполяционной задачи: требуется найти функцию $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$, удовлетворяющую ОМН задачи при z, близких к узлам интерполяции. При такой постановке основной вопрос в формулировке классической интерполяционной задачи заключается в правильной записи ее ОМН.

3°. Задачи $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{G}$ связаны с дифференциальным выражением $L = i\frac{d}{dt}$, задача $\boldsymbol{W}$ — с $L = \frac{d}{dt}$, задачи $\boldsymbol{K}^0$ и $\boldsymbol{K}^\infty$ — с $L = -\frac{d^2}{dt^2}$. Пусть $G(t, \xi; z)$ — функция Коши, связанная с L — ядро резольвенты дифференциального оператора, порождённого дифференциальным выражением $L - zI$ и условиями Коши при $t = 0$. Таким образом, при $0 \leqslant \xi \leqslant t$ имеем $G(t\ \xi;\ z) = -ie^{-i(t-\xi)z}$ в задачах $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{G}$ (9.3.1), $G(t, \xi; z) = e^{(t-z)z}$ в задаче $\boldsymbol{W}$ (9.3.2), $G(t, \xi, z) =$

$= -\frac{\sin(t-\xi)\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ в задачах K^0 и K^∞ (9.3.3). Будем считать $G(t, \xi; z)$ заданной при всех t, $\xi \geqslant 0$, полагая $G(t, \xi; z) = 0$ при $t < \xi$. Пусть в каждой из рассмотренных задач $u(t, z)$ означает $u(t, z) = e^{-itz}$ в задаче P; $u(t, z) = \frac{e^{-itz}-1}{-iz}$ в задаче G; $u(t, z) = e^{tz}$ в задаче W; $u(t, z) = \cos t\sqrt{z}$ в задаче K^0; $u(t, z) = \frac{\sin t\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ в задаче K^∞. Пусть

$$M(t, z) = \int_0^t G(t, \xi; z) S(\xi)\, d\xi \text{ в задачах } P,\ W,\ K^0; \tag{9.3.4}$$

$$M(t\ z) = -\int_0^{t+0} \frac{\partial G}{\partial \xi}(t, \xi, z) S(\xi)\, d\xi \text{ в задачах } G,\ K^\infty. \tag{9.3.5}$$

Справедливо тождество

$$\int_0^l G(l, \tau; z_1) G(\tau, \xi; z_2)\, d\tau = \frac{G(l, \xi; z_1) - G(l, \xi; z_2)}{z_1 - z_2}, \ (\forall z_1, z_2) \tag{9.3.6}$$

— тождество Гильберта для функции Коши. Из него следуют тождества

$$\int_0^l G(l, \tau; z_1) u(\tau, z_2)\, dt = \frac{u(l, z_1) - u(l, z_2)}{z_1 - z_2}; \tag{9.3.7}$$

$$\int_0^l G(t, \tau; z_1) \cdot M(\tau, z_2)\, d_\tau = \frac{M(l, z_1) - M(l, z_2)}{z_1 - z_2}, \tag{9.3.8}$$

справедливое в каждой из рассмотренных задач. В самом деле: $u(t, z) = iG(t, \xi; z)_{|\xi=0}$ в задаче P; $u(t, z) = i\int_0^t G(t, \xi; z)\, d\xi$ в задаче G; $u(t, z) = G(t, \xi; z)_{|\xi=0}$ в задаче W; $u(t, z) = \frac{\partial G}{\partial \xi}(t, \xi; z)_{|\xi=0}$ в задаче K^0; $u(t, z) = -G(t, \xi; z)_{|\xi=0}$ в задаче K^∞. Чтобы получить (9.3.7) для задачи P, нужно положить в (9.3.6) $\xi = 0$, для задачи G — проинтегрировать (9.3.6) по ξ, для задачи W — положить в (9.3.6) $\xi = 0$, для задачи K^0 — продифференцировать (9.3.6) по ξ и положить $\xi = 0$, для задачи K^∞ — положить в (9.3.6) $\xi = 0$.

Чтобы получить (9.3.8) для задач P, W, K^0, нужно умножить (9.3.6) на $S(\xi)$ и проинтегрировать по ξ, а для задач G и K^∞ —

продифференцировать (9.3.6) по ξ, затем умножить на $S(\xi)$ и проинтегрировать по ξ. Тождества (9.3.7) и (9.3.8) играют важную роль в решении ОМН относительно функции $w(z)$ — они используются при факторизации так называемой матрицы Вейля, но в этой работе они будут нужны нам при преобразовании ОМН задач И K^0, K^∞ с целью «растянуть асимптотику».

4°. ОМН каждой из рассмотренных задач имеет вид

$$\left[\begin{array}{c|c} \int\limits_0^l \int\limits_0^l \varphi(t) K(t, \tau) \overline{\varphi(\tau)}\, dt d\tau & \int\limits_0^l \varphi(t)\{u(t, z) w(z) + M(t, z)\}\, dt \\ \hline * & \dfrac{w(z) - \overline{w(z)}}{z - \bar{z}} \end{array}\right] \geqslant 0.$$

Ранее было объяснено, каковы $K(t, \tau)$, $u(t, z)$ и $M(t, z)$ для каждой из задач. $w(z)$ — функция класса $(\boldsymbol{R})$. Для простоты будем считать, что ядро $K(t, \tau)$ непрерывно при $0 \leqslant t, \tau \leqslant l$. ОМН выполняется в точке z, если при любой непрерывной на $[0, l]$ функции $\varphi(t)$ 2×2 матрица в левой части этого неравенства является эрмитово неотрицательной. Тогда эта матрица эрмитово неотрицательна и при любой суммируемой $\varphi(t)$; в качестве $\varphi(t)$ можно брать даже любую меру на $[0, l]$. Подставим в ОМН в качестве $\varphi(t)$ выражения, содержащие δ-функцию.

Чтобы извлечь из ОМН информацию о функции $S(t)$, подставим в него конкретные $\varphi(t)$. Подставляя в ОМН $\varphi(t) = \delta_l(t)$ — δ-функцию, сосредоточенную в точке $t = l - 0$ придем к неравенству

$$\left[\begin{array}{c|c} K(l, l) & u(l, z) w(z) + M(l, z) \\ \hline * & \dfrac{w(z) - w^*(z)}{z - \bar{z}} \end{array}\right] \geqslant 0.$$

Поэтому в точке z, в которой выполняется ОМН, справедливо неравенство

$$|u(l, z) w(z) + M(l, z)|^2 \leqslant K(l, l) \frac{w(z) - \overline{w(z)}}{z - \bar{z}}. \qquad (9.4.1)$$

Для всякой функции $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$ выполним

$$\overline{\lim} \frac{w(z) - \overline{w(z)}}{z - \bar{z}} < \infty, \qquad (9.4.2)$$

где верхний предел рассматривается при $|z| \to \infty$, $\delta \leqslant \arg z \leqslant \pi -$ $- \delta$, $(\delta > 0)$. Это следует из формулы

$$\frac{w(z) - \overline{w(z)}}{z - \bar{z}} = \alpha + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{|\lambda - z|^2}, \quad \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{z + \lambda^2} < \infty\right).$$

и $d\sigma(\lambda)$ — из интегрального представления функции $w(z)$. Из (9.4.1) и (9.4.2) следует, что если ОМН одной из рассматриваемых задач выполняется при всех z на некотором луче $\Lambda = \{z : \arg z = \Theta, |z| \geqslant r\}$, где $\Theta \in (0, \pi)$, $r > 0$, то справедливо асимптотическое соотношение

$$\varlimsup_{|z|\to\infty,\ z\in\Lambda} |u(l, z)\,w(z) + M(l, z)| < \infty. \qquad (9.4.3)$$

(9.4.3) — это асимптотическое соотношение (As), с $\rho(z) = O(1)$.

При извлечении информации из ОМН задач $\boldsymbol{P}_l$ и $\boldsymbol{G}_l$ мы, действуя таким образом, достигаем цели: из (9.4.3) и теорем $H - N_P$, $H - N_G$ вытекают следующие две теоремы, содержащие в себе вторые части теорем $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{G}$ из § 4.

Теорема $\boldsymbol{P}_{\mathrm{As}}$. *Пусть непрерывная на $(-l, l)$ функция $S(t)$ и функция $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$ таковы, что при всех z на луче $\{z : \arg z = \pi/2, |z| \geqslant r\}$, где $r > 0$ — некоторое число, выполняется при ОМН $(\boldsymbol{P}_l)$.*

Тогда функция $w(z)$ имеет вид (I_{R_1}), где мера $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ удовлетворяет условию (r_0), и эта мера дает интегральное представление (I_P) функции $S(t)$ при $t \in (-l, l)$.

Теорема G_{As}. *Пусть непрерывная на $(-l, l)$ функция $S(t)$ и функция $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$ таковы, что при всех z на луче $\{r : \arg z = \pi/2, |z| \geqslant r\}$, где $r > 0$, выполняется ОМН (G_l).*

Тогда функция $w(z)$ имеет вид (I_R), где мера $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ удовлетворяет условию (r_2), α — вещественная константа, $\beta = 0$, и функция $S(t)$ допускает при $t \in (-l, l)$ интегральное представление (I_G) с этими $d\sigma(\lambda)$ и α.

В задачах же $\boldsymbol{W}_l$, $\boldsymbol{K}_l^0$, $\boldsymbol{K}_l^\infty$ подстановка в ОМН $\varphi(t) = \delta_l(t)$ не приводит к цели: так можно получить асимптотические соотношения (As) этих задач лишь при $L = l$, а нам нужно извлечь из ОМН асимптотическое соотношение при $L = 2l$. (В этих трех задачах в ядре $K(t, \tau)$ участвуют значения функции S от суммы аргументов $t + \tau$, и нужно иметь соотношение, в котором участвуют значения $S(\xi)$ при $0 \leqslant \xi \leqslant 2l$). Чтобы «растянуть асимптотику» на удвоенный интервал $[0, 2l]$, нужно подставить в ОМН иную $\varphi(t)$ и преобразовать полученное неравенство.

5°. Приступим к извлечению информации из ОМН в задачах W_l, K_l^0, K_l^∞. Хотя по существу мы имеем дело с операторными блок-матрицами, нам удобнее здесь иметь дело с квадратичными формами. ОМН можно записать в виде $A + B\bar{\xi} + \xi\bar{B} + \xi C\bar{\xi} \geqslant 0$ **(9.5.1)**, где

$$B = \int_0^l \varphi(t)\,B(t, z)\,dt; \quad C = \frac{w(z) - \overline{w(z)}}{z - \bar{z}}; \quad \text{а } B(t, z) = u(t, z)\,w(z) + M(t, z), \qquad (9.5.2)$$

$\varphi(t)$ здесь — произвольная функция, ξ — произвольный скаляр. В каждой из трёх задач положим $\varphi(t) = \delta_l(t) + \alpha G(l, t, \bar{z})$, $\xi = \alpha u(l, \bar{z})$ **(9.5.3)**, где $\delta_l(t)$ — дельта-функция в точке $t = l - 0$, α — произвольный скаляр. ОМН (9.5.1) преобразуется к виду

$A_{\text{преобр}} + B_{\text{преобр}} \cdot \bar{\alpha} + \alpha \cdot \bar{B}_{\text{преобр}} + \alpha C_{\text{преобр}} \bar{\alpha} \geqslant 0$ **(9.5.4)**; где $A_{\text{преобр}} = K(l, l)$; $B_{\text{преобр}} = u(l, z)^2 w(z) + V_l(z)$ **(9.5.5)**; $V_l(z) =$

$$= u(l, z) M(l, z) + \int_0^l K(l, \tau) G(l, \tau; z)\, d\tau \quad (9.5.6); \qquad C_{\text{преобр}} =$$

$$= \overline{u(l, z)} \frac{w(z) - \overline{w(z)}}{z - \bar{z}} u(l, z) + u(l, z) \int_0^l G(l, t; \bar{z}) B(t, z)\, dt + \overline{u(l, z)} \times$$

$$\times \int_0^l G(l, t; z) B(t, \bar{z})\, dt + \int_0^l \int_0^l G(l, t; \bar{z}) K(t, \tau) G(l, \tau; z)\, dt d\tau \quad \mathbf{(9.5.7)}.$$

Подставляя в (9.5.7) выражение (9.5.2), придем к равенству

$$C_{\text{преобр}} = \left[\frac{u(l, z) \cdot \overline{u(l, z)}}{z - \bar{z}} + u(l, z \int_0^l G(l, t; \bar{z}) u(t, z)\, dt\right] w(z) +$$

$$+ \left[\frac{u(l, z) u\overline{(l, z)}}{z - \bar{z}} + u(l, \bar{z}) \int_0^l G(l, t; z) u(t, \bar{z})\, dt\right] \overline{w(z)} +$$

$$+ u(l, z) \cdot \int_0^l G(l, t, \bar{z}) M(t, z)\, dt + u(l, \bar{z}) \int_0^l G(l, t; z) M(t, \bar{z})\, dt +$$

$$+ \int_0^l \int_0^l G(l, t; \bar{z}) K(t, \tau) G(l, \tau; z)\, dt d\tau. \qquad (9.5.8)$$

В каждой из задач $\boldsymbol{W}_l$, $\boldsymbol{K}_l^0$, $\boldsymbol{K}_l^\infty$ справедливо тождество

$$(z_1 - z_2) \int_0^l \int_0^l G(l, t; z_2) K(t, \tau) G(l, \tau; z_1)\, dt\, d\tau =$$

$$= \int_0^l K(l, \tau) G(l, \tau; z_1)\, d\tau - u(l, z_2) M(l, z_1) -$$

$$- \int_0^l G(l, t; z_2) K(t, l)\, dt + u(l, z_1) M(l, z_2), \qquad (9.5.9)$$

которое будет проверено ниже, в п°. 6. Используя тождества (9.3.9), (9.3.10) и (9.5.9), преобразуем (9.5.10) к виду

$$C_{\text{преобр}} = \frac{[u(l, z)^2 w(z) + V_l(z)] - [\overline{u(l, z)^2 w(z) + V_l(z)}]}{z - \bar{z}}. \qquad (9.5.10)$$

Если обозначить $w_{2l}(z)=u(l,\ z)^2 w(z)+V_l(z)$ **(9.5.11)**, то неравенство (9.5.4) приобретет вид

$$\begin{bmatrix} K(l,\ l) & w_{2l}(z) \\ \hline * & \dfrac{w_{2l}(z)-\overline{w_{2l}(z)}}{z-\bar z} \end{bmatrix} \geqslant 0. \quad \text{(ПОМН)*}$$

Если ОМН одной из трех задач выполняется в некоторой точке z, то в той же точке z выполняется и ПОМН, а значит, и неравенство $|w_{2l}(z)|\leqslant|z-\bar z|^{-1}\cdot K(l,\ l)$, или $|u(l,\ z)^2 w(z)+V_l(z)|\leqslant$ $\leqslant|z-\bar z)|^{-1}K(l,\ l)$. Выражение (9.5.6) для $V_l(z)$ может быть преобразовано. Подставляя в (9.5.6) конкретные выражения $u(t,\ z)$, $И(t,\ z)$, $K(t,\ \tau)$, $G(t,\ \xi;\ z)$ для каждой из задач, придем к равенствам $V_l(z)=\int\limits_0^{2l} G(2l,\ \tau;\ z)\, S(\tau)\, d\tau$ в задаче $\boldsymbol{W}_l$ **(9.5.12)**; $V_l(z)=$ $=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2l} G(2l,\ \tau;\ z)\ S(\tau)\, d\tau$ в задачах $\boldsymbol{K}_l^0$ и $\boldsymbol{K}_l^\infty$ **(9.5.13)**. Из сказанного следует, что если ОМН одной из задач $\boldsymbol{W}_l$, $\boldsymbol{K}_l^0$, $\boldsymbol{K}_l^\infty$ выполняется на некотором луче $\{z:\arg z=\Theta,\ \ |z|\geqslant r\}$, где $r>0$, $\Theta\in(0,\ \pi/2)$ в $\boldsymbol{W}$, $\Theta\in(0,\ \pi)$ в $\boldsymbol{K}^0$ и $\boldsymbol{K}^\infty$, то на этом луче при $z|\to\infty$ выполняется асимптотическое соотношение $|u(l,\ z)^2 w(z)+$ $+V_l(z)|=0(1)$ **(9.5.14)**. Из выражений п°. 3 для $u(t,\ z)$ и выражений (9.5.12) и (9.5.13) для $V_l(z)$ (с расшифровкой (9.3.2) — (9.3.3) для $G(t,\ \xi;\ z)$) видно, что (9.5.14) в каждой из рассматриваемых трех задач — это асимптотическое соотношение (As), и притом с остаточным членом $\rho(z)=O(1)$. Из тауберовых теорем H—N (§ 7) теперь следуют

Теорема $\boldsymbol{W}_{\mathrm{As}}$. *Пусть непрерывная на $(0,\ 2l)$ функция $S(t)$ и функция $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$ таковы, что при всех z на луче $\{z:\operatorname{agr} z=\Theta,\ |z|\geqslant r\}$, где $\Theta\in(0,\ \pi/2)$ $r>0$, выполняется ОМН $(\boldsymbol{W}_l)$. Тогда функция $w(z)$ имеет вид (I_{R_1}) где мера $d\sigma(\lambda)\geqslant0$ удовлетворяет условиям $(\boldsymbol{r}_0^-)$ и $(\boldsymbol{w}_l)$, и эта мера дает интегральное представление $(I_{\boldsymbol{W}})$ функции $S(t)$ при $t\in(0,\ 2l)$.*

Теорема $\boldsymbol{K}_{\mathrm{As}}^0$. *Пусть непрерывная на $(0,\ 2l)$ функция $S(t)$ и функция $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$ таковы, что всюду на луче $\{z:\arg z=$ $=\pi/2,\ |z|\geqslant r\}$, где $r>0$, для них выполняется ОМН $(\boldsymbol{K}_l^0)$. Тогда функция $w(z)$ имеет вид (I_{R_1}), где мера $d\sigma(\lambda)\geqslant0$ удовлетворяет условиям $(\boldsymbol{r}_0^+)$ и $(\boldsymbol{K}_l)$, и эта мера дает интегральное представление (I_{K^0}) функции $S(t)$ при $t\in[0,\ 2l)$.*

Теорема $\boldsymbol{K}_{\mathrm{As}}^\infty$. *Пусть непрерывная на $[0,\ 2l)$ функция $S(t)$ $S(0)=0$, и функция $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$ таковы, что всюду на луче $\{z:\arg z=\pi/2,\ |z|\geqslant r\}$ где $r>0$, для них выполняется ОМН $(\boldsymbol{K}_l^\infty)$.*

* ПОМН (Преобразованное основное матричное неравенство)

Тогда функция $w(z)$ имеет вид (I_{R_1}), *где мера* $d\sigma(\lambda) \geqslant$ (*удовлетворяет условиям* (r_1^+) *и* (K_l), *и эта мера дает интег ральное представление* (I_{K^∞}) *функции* $S(t)$ *при* $t \in [0, 2l)$.

Замечание 1. При выводе (9.5.14) мы для упрощения записі считали, что функция $S(t)$ непрерывна вплоть до точки $t = 2l$ Если считать $S(t)$ непрерывной лишь на $[0, 2l)$, то вместо $\varphi(t$ из (9.5,3) нужно подставлять в ОМН $\varphi(t) = \delta_{l'}(t) + \alpha G(l', t; \bar{z})$ где l' — произвольное, меньшее l. В итоге придем к асимптоти ческому соотношению (As с произвольным $L < 2l$).

Замечание 2. Из ПОМН следует (если уже известно, что ОМН выполняется при всех невещественных z), что определенная в (9.5.11) функция $w_{2l}(z)$ является функцией класса (R). Можно показать, что $w_{2l}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} |u(l, \lambda)|^2 d\sigma(\lambda)$ **(9.5.15)**, где $d\sigma(\lambda)$ — мера из интегрального представления функции $w(z)$. Это следует из (9.5.11) и из формулы

$$\frac{u(l, \lambda)^2 - u(l, z)^2}{\lambda - z} = c \int\limits_0^{2l} G(2l, \tau; z)\, u(\tau, \lambda)\, d\tau, \tag{9.5.16}$$

где $c = 1$ в задаче W, $c = 1/2$ в задачах K^0 и K^∞.

Докажем (9.5.16). Имеем, согласно тождеству (9.3.9),

$$\frac{u(l, \lambda)^2 - u(l, z)^2}{\lambda - z} = u(l, z)\frac{u(l, \lambda) - u(l, z)}{\lambda - z} + u(l, \lambda)\frac{u(l, \lambda) - u(l, z)}{\lambda - z} =$$

$$= u(l, z)\int\limits_0^l G(l, \tau; z)\, u(\tau, \lambda)\, d\tau + \int\limits_0^l G(l, \tau; z)\,(u(l, \lambda)\, u(\tau, \lambda))\, d\tau.$$

Правая часть последнего равенства равна правой части (9.5.16) согласно тождеству (9.5.12) — (9.5.13) при $S(t) = u(\tau, \lambda)$ (в этом случае $K(t, \tau) = u(t, \lambda)\, u(\tau, \lambda)$).

6°. Докажем тождество (9.5.9). Во всех трех задачах W_l, K_l^0, K_l^∞ доказательство аналогично. Ограничимся рассмотрением задачи K_l^0. Воспользуемся тем, что $G_{tt}(t, \tau; z) = G_{\tau\tau}(t, \tau; z) = -zG(t, \tau; z)$, $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$ **(9.6.1)**. При доказательстве тождества можно считать, что $S(t)$ — гладкая функция. Тогда выполняется дифференциальное уравнение $K''_{tt} = K''_{\tau\tau}$ $(0 \leqslant t,\ \tau \leqslant l)$ **(9.6.2)** и граничные условия $K(t, \tau)|_{\tau=0} = S(t)$, $\quad K'_\tau(t, \tau)|_{\tau=0} = 0$; $\quad K(t, \tau)|_{\tau=0} = S(\tau)$, $K'_t(t, \tau)|_{t=0} = 0$ **(9.6.3)**. Имеем цепочку равенств

$$(z_1 - z_2)\int\limits_0^l \int\limits_0^l G(l, t; z_2)\, K(t, \tau)\, G(l, \tau; z_1)\, dt d\tau =$$

$$= \int_0^l \int_0^l G''_{tt}(l, t; z_2) K(t, \tau) G(l, \tau; z_1)\, dt d\tau -$$

$$- \int_0^l \int_0^l G(l, t; z_2) K(t, \tau) G''_{\tau\tau}(l, \tau; z_1)\, dt d\tau =$$

$$= \int_0^l \int_0^l G(l, t; z_2) (K''_{tt}(t, \tau) - K''_{\tau\tau}(t, \tau)) G(l, \tau; z_1)\, dt d\tau +$$

$$+ \int_0^l \{G'_t(l, t; z_2) K(t, \tau) - G(l, t; z_2) K'_t(t, \tau)\} \Big|_{t=0}^{t=l} G(l, \tau; z_2)\, d\tau -$$

$$- \int_0^l G(l, t; z_2) \{K(t, \tau) G'_\tau(l, \tau; z_1) - K'_\tau(t, \tau) G(l, \tau; z_1)\} \Big|_{\tau=0}^{\tau=l} d\tau =$$

$$= \int_0^l \{K(l, \tau) - u(l, z_2) S(\tau)\} \cdot G(l, \tau; z_1) - \int_0^l G(l, t; z_2) \{K(t, l) -$$

$$- S(t) u(l, z_1)\}\, dt = \int_0^l K(t, \tau) G(l, \tau; z_1)\, d\tau - u(l, z_2) M(l, z_1) -$$

$$- \int_0^l K(l, t) G(l, t; z_2)\, dt + u(l, z_1) M(l, z_2).$$

Первое из равенств этой цепочки следует из (9.6.1), второе — результат интегрирования по частям, третье следует из (9.6.2), (9.6.3) и равенств $G(l, t; z)_{|t=l} = 0$; $G'_t(l, t; z)_{|t=l} = 1$; $G_t(l, t, z_{|t=0} = u(l, z)$. Тождество (9.5.9) для задачи K^0 доказано.

7°. Аналогично извлекается информация и из ОМН задачи H. Это ОМН имеет вид

$$\varphi A \varphi^* + \varphi B \bar{\xi} + \xi B^* \varphi^* + \xi \frac{w(z) - w^*(z)}{z - \bar{z}} \bar{\xi} \geqslant 0, \qquad (9.7.1)$$

где $\varphi = [\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n]$ — произвольная вектор-строка, ξ — произвольное число, $A = \| S_{j+k} \|_{0<j,\, k<n}$; $B(z) = [b_0(z), b_1(z), \dots, b_n(z)]'$; $b_l(z) = z^l w(z) + \sum\limits_{0<m<l-1} z^{l-m-1} s_m$; $0 \leqslant l \leqslant n$.

Пусть α — произвольное число. Положим в (9.7.1) $\varphi = \delta_n + \alpha q_n(\bar{z})$, $\xi = \alpha \cdot \bar{z}^n$, где $\delta_n = [0, 0, \dots, 0; 1]$, $g_n(z) = (z^{n-1}, z^{n-2}, \dots, 1; 0]$. Неравенство (9.7.1) при этом перейдет в неравенство (9.5.4), где $A_{\text{преобр}} = S_{2n}$, $S_{\text{преобр}} = w_{2n}(z)$, $C_{\text{преобр}} = \frac{w_{2n}(z) - \overline{w_{2n}(z)}}{z - \bar{z}}$, а $w_{2n}(z) = z^{2n} w(z) + \sum\limits_{0<l<2n-1} s_l z^{2n-l-1}$. Из-за недостатка места мы привели здесь лишь окончательный результат преобразования ОМН. Подробно это преобразование описано в [4].

Пусть известно, что ОМН (H) выполняется на луче $\arg r = \pi/2$, $|z| \geqslant r$. Тогда на этом же луче выполняется и (9.5.4), а значит, и неравенство $|zs_{2n}(z)| \leqslant s_{2n}$, или $\left|z^{2n+1}w(z) + \sum_{0<k<2n-1} z^{2n-k}s_k\right| \leqslant s_{2n}$; $(\arg z = \pi/2)$. Из теоремы H—N (**H**) теперь следует

Теорема H_{As}. *Пусть последовательность* $s_0, s_1, \ldots, s_{2n-1}, s_{2n}$ *и функция* $w(z)$ *класса* (***R***) *таковы, что на луче* $\{z : \arg z = \pi/2, |z| \geqslant r\}$, *где* $r > 0$, *выполняется ОМН* (H).

Тогда $w(z)$ *имеет вид* (I_{R_1}), *где мера* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *удовлетворяет условию* (h_n), *и для моментов* $s_k(\sigma)$ *этой меры выполняется* $s_k(\sigma) = s_k$, $(k = 0, 1, \ldots, 2n-1)$; $s_{2n}(\sigma) \leqslant s_{2n}$.

Замечание. Если функция $w(z)$ удовлетворяет ОМН (H) с заданными $s_0, s_1, \ldots, s_{2n-1}, s_{2n}$, то она и подавно удовлетворяет ОМН (H) с теми же $s_0, s_1, \ldots, s_{2n-1}$ и с бóльшим s_{2n}. Поэтому из ОМН (H) можно извлечь лишь неравенство $s_{2n}(\sigma) \leqslant s_{2n}$.

Список литературы: 1. *Кацнельсон В. Э.* Континуальные аналоги теоремы Гамбургера — Неванлинны и основные матричные неравенства классических задач. I. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1981, вып. 36, с. 31—48. 2. *Кацнельсон В. Э.* Континуальные аналоги теоремы Гамбургера— Неванлинны и основные матричные неравенства классических задач. II (теоремы Гамбургера — Неванлинны).— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, вып. 37, с. 31—48. 3. *Кацнельсон В. Э.* Континуальные аналоги теоремы Гамбургера — Неванлинны и основные матричные неравенства классических задач. III (теоремы об убывании меры) — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1983, вып. 39, с. 45. 4. *Дюкарев Ю. М.* Матричная проблема моментов Стильтеса. I. Групповой множитель; групповое решение усеченной задачи.— РЖМатематика, 1981, 9 Б621 ДЕП. (Рукопись депонирована в ВИНИТИ, № 2628—81 Деп.)

Поступила в редколлегию 28.09.81.