МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ВЫПУСК 40

Республиканский
междуведомственный
научный сборник
Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1983

СОДЕРЖАНИЕ

А х и е з е р Т. А. О треугольной классификации квадратичных форм над произвольным полем 3
Б е л и ц к и й Г. Р. О неравенствах типа неравенства Карлемана . . . 11
Б е р л я н д Л. В. Осреднение уравнений линейной теории упругости в областях с мелкозернистой границей. II. 16
Б р о н з а С. Д., Т а и р о в а В. Г. Конструирование римановых поверхностей класса F_q^* 23
Г а н д е л ь Ю. В. О парных интегральных уравнениях, приводящих к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков 33
Г р и ш и н А. Ф. О множествах регулярного роста целых функций. I 36
Д а в ы д о в Р. Н. Об одном классе неособых медленно убывающих решений уравнения Кортевега-де Фриза. I 47
Е р е м е н к о А. Э. Об отклонениях мероморфных функций конечного порядка 56
Ж и т о м и р с к и й М. Я. Инвариантная нормальная форма рядов, линейно-эквивалентных вещественным 64
З о л о т а р е в В. А. Спектральный анализ несамосопряженных коммутативных систем операторов и нелинейные дифференциальные уравнения 68
К а д е ц В. М. О комплексной равномерной выпуклости пространств Лебега—Бохнера 71
К а л ю ж н ы й В. Н. P-адический аналог дзета-функции Гурвица 74
К а ц н е л ь с о н В. Э. Континуальные аналоги теоремы Гамбургера — Неванлинны и основные матричные неравенства классических задач. IV 79
К а ш и р и н В. В. Изоморфные вложения нестабильных центров рисcовских шкал 90
К о г у т Е. А. Унитарные операторные узлы и их характеристические функции операторного аргумента 95
К у ч к о Л. П. О нормальной форме полиномиальных систем дифференциальных уравнений относительно обобщенных степенных преобразований 101
Л и ф а н о в И. К., М а т в е е в А. Ф. О сингулярном интегральном уравнении на системе отрезков 104
Л у н д и н а Д. Ш. Ядро резольвенты трехмерного оператора Шредингера 110
М и щ е н к о В. О. О восстановлении операторного потенциала по обобщенной спектральной матрице абстрактного эллиптического дифференциального оператора 115
Р а б и н о в и ч В. С. Об алгебрах псевдодифференциальных операторов, связанных с дифференциально-разностными операторами. I 119
С о д и н М. Л. Замечание о предельных множествах субгармонических функций натурального порядка в плоскости 125
Х е й ф е ц А. Я., Ю д и ц к и й П. М. Интерполяция оператора, коммутирующего с укороченным сдвигом, функциями класса И. Шура. I . . . 129
Ц е к а н о в с к и й Э. Р. О растяжении целых матриц-функций 137
Ш е р е м е т а М. Н. О скорости сходимости частных сумм целого ряда Дирихле 141

УДК 511+512.62

В. Н. КАЛЮЖНЫЙ

p-АДИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ГУРВИЦА

1. Пусть $\zeta(s, a)$ — дзета-функция Гурвица, $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана [1], $\eta(s, a) = \zeta(s, a) - \zeta(s)$. Напомним, что $\zeta(1-n) = -\frac{B_n}{n}$; $\zeta(1-n, a) = -\frac{B_n(a)}{n}$ $(n \geqslant 1)$, где B_n — числа, $B_n(X)$ —

полиномы Бернулли. Хорошо известен p-адический аналог $\zeta_p(s)$ функции $\zeta(s)$ (см. п. 2). Целью статьи является построение таких аналогов для $\eta(s, a)$, $\zeta(s, a)$ (пп. 6,7). Делается это с помощью преобразования Меллина (п. 3) по мере, определяемой в п. 5. Попутно мы получаем сравнения для значений полиномов Бернулли. Всюду предполагается, что $p \neq 2$.

2. Пусть $\omega(z)$ — характер Тейхмюллера на $\mathbf{Z}_p^*$ [2], $\langle z \rangle = z\omega(z)^{-1}$. Пусть $G_p(x)$ — лог гамма функция Даймонда, при $x \in \mathbf{C}_p$, $|x| > 1$ представляющаяся рядом $G_p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\log_p x - x - \sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n(n+1)x^n}$. Соберем необходимые сведения о $\zeta_p(s)$ в следующей теореме [2—4].

Теорема 1. 1) *$\zeta_p(s)$ — мероморфная функция на $\mathbf{Z}_p$ с единственным полюсом $s = 1$ и вычетом в нем равным $1 - \frac{1}{p}$;* 2) $\zeta_p(1-n) = -(1-p^n)\frac{B_n}{n}$ $(n \geqslant 1,\ n \equiv 0 \pmod{p-1})$; 3) $\zeta_p(1-n) = -\frac{p^{n-1}}{n}\sum\limits_{i=1}^{p-1}\omega^{-n}(i)\,B_n\left(\frac{i}{p}\right)$ $(n \geqslant 1)$; 4 $\zeta_p'(0) = \sum\limits_{i=1}^{p-1}\omega^{-1}(i)\,G_p\left(\frac{i}{p}\right) = 0$; 5) $\zeta_p(n) = \frac{(-p)^{-n}}{(n-1)!}\sum\limits_{i=1}^{p-1}\omega^{n-1}(i)\,G_p^{(n)}\left(\frac{i}{p}\right)$ $(n \geqslant 1)$. *Функция $\zeta_p(s)$ характеризуется условиями 1), 2), а также условиями 1), 3).*

3. Пусть μ — мера на $\mathbf{Z}_p$. Для $s \in \mathbf{Z}_p$ положим

$$M_p(s, \mu) = \int\limits_{Z_p^*} \langle z \rangle^{-s}\omega^{-1}(z)\,d\mu(z) = \boldsymbol{M}_p\mu(1-s) \tag{1}$$

в обозначениях из [2]. Функцию (1) можно также записать в виде $M_p(s, \mu) = \int\limits_{1+pZ_p} \lambda^{-s}\,d\nu(\lambda)$, где мера ν задается равенством $\nu(U) = \sum\limits_{i=1}^{p-1}\omega^{-1}(i)\,\mu(\omega(i)\,U)$ $(U \subset 1 + p\mathbf{Z}_p)$. Изложим общую схему исследования дзета-функции вида (1), которая стоит за вычислениями в [4]. Обозначим $\gamma_{n,\mu} = \int\limits_{\mathbf{Z}_p} z^n\,d\mu(z)$. Введем полиномы $\gamma_{n,\mu}(T) = \sum\limits_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\gamma_{j,\mu}T^{n-j}$. Их можно также определить формальным тождеством $e^{TX}\sum\limits_{n \geqslant 0}\gamma_{n,\mu}\frac{X^n}{n!} = \sum\limits_{n \geqslant 0}\gamma_{n,\mu}(T)\frac{X^n}{n!}$. При $x \in \mathbf{C}_p$,

$|x| > 1$ рассмотрим функцию $G_{p,\mu}(x) = -\gamma_{0,\mu}\log_p x + \sum_{k\geq 1}(-1)^k \times \frac{\gamma_{k,\mu}}{kx^k}$ (2). Имеем $G^{(n)}_{p,\mu}(x) = (n-1)! \sum_{k\geq 0} \frac{\gamma_{k,\mu}}{(-x)^{k+n}} \binom{k+n-1}{n-1}$ $(n \geq 1)$.

Лемма. При $x \in \boldsymbol{C}_p$, $|x| > 1$ *выполняются соотношения* $\int_{\boldsymbol{Z}_p} \log_p(x+z)\, d\mu(z) = -G_{p,\mu}(x)$, $\int_{\boldsymbol{Z}_p} \frac{d\mu(z)}{(x+z)^n} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} G^{(n)}_{p,\mu}(x)$.

Для произвольного открыто-замкнутого подмножества $V \subset \boldsymbol{Z}_p$ положим $\mu^{(t,s)}(V) = \mu(t + p^s V)$ $(0 \leq t < p^s,\ s \geq 0)$.

Теорема 2. *1) Функция* $M_p(s, \mu)$ *аналитична на* $\boldsymbol{Z}_p$ [2]; *2)* $M_p(1-n, \mu) = \gamma_{n-1,\mu} - p^{n-1}\gamma_{n-1,\mu^{(0,1)}}$ $(n \geq 1,\ n \equiv 0 \pmod{p-1})$; *3)* $M_p(1-n, \mu) = p^{n-1}\sum_{j=1}^{p-1} \omega^{-n}(i)\, \gamma_{n-1,\mu^{(i,1)}}\left(\frac{i}{p}\right)$ $(n \geq 1)$; *4)* $M'_p(0, \mu) = \sum_{i=1}^{p-1} \omega^{-1}(i)\, G_{p,\mu^{(i,1)}}\left(\frac{i}{p}\right)$; *5)* $M_p(n, \mu) = \frac{(-p)^{-n}}{(n-1)!} \times \sum_{i=1}^{p-1} \omega^{n-1}(i)\, G^{(n)}_{p,\mu^{(i,1)}}\left(\frac{i}{p}\right)$ $(n \geq 1)$.

4. Для $z \in \boldsymbol{Z}_p$, следуя [5], обозначим через $\{z\}_m$ такое целое число, что $0 \leq \{z\}_m < p^m$, $z - \{z\}_m \in p^m \boldsymbol{Z}_p$, и положим $\left[\frac{z}{p^m}\right] = \frac{z - \{z\}_m}{p^m}$. Отметим некоторые свойства последней функции:

1) $\sum_{j=0}^{p-1}\left[\frac{z + jp^m}{p^{m+1}}\right] = \left[\frac{z}{p^m}\right]$; 2) $\left[\frac{z + p^m y}{p^m}\right] = \left[\frac{z}{p^m}\right] + y$ $(y \in \boldsymbol{Z}_p)$;

3) $\left[\frac{\left[\frac{z}{p^s}\right]}{p^m}\right] = \left[\frac{z}{p^{s+m}}\right]$; 4) $\left[\frac{-z-1}{p^m}\right] + 1 = -\left[\frac{z}{p^m}\right]$.

5. Определим меру на $\boldsymbol{Z}_p$, положив $\mu_{B(a)}(z + p^m \boldsymbol{Z}_p) = \left[\frac{\{z\}_m - a}{p^m}\right] = \left[\frac{z-a}{p^m}\right] - \left[\frac{z}{p^m}\right]$ $(a \in \boldsymbol{Z}_p)$. Легко видеть, что

$$\mu_{B(a)}(t + p^m \boldsymbol{Z}_p) = -\left[\frac{a}{p^m}\right] - \begin{cases} 1 & (0 \leq t < \{a\}_m) \\ 0 & (\{a\}_m \leq t < p^m). \end{cases} \qquad (3)$$

Аддитивность этой меры вытекает из свойства 1) (п. 4). Вычисления с помощью (3) приводят к равенству

$$\gamma_{n,\mu_{B(a)}} = \int_{\boldsymbol{Z}_p} z^n\, d\mu_{B(a)}(z) = \frac{B_{n+1} - B_{n+1}(a)}{n+1} \quad (n \geq 0). \qquad (4)$$

Отсюда следует, что $\gamma_{n,\,\mu_{B(a)}}(T)=\frac{1}{n+1}(B_{n+1}(T)-B_{n+1}(T+a))$, $G_{p,\,\mu_{B(a)}}(x)=a\log_p x+\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n(B_{n+1}-B_{n+1}(a))}{n(n+1)x^n}=G_p(x+a)-$ $-G_p(x)$. Можно показать, что равенство $\int\limits_{Z_p}\log_p(x+z)\,d\mu_{B(a)}(z)=$ $=G_p(x)-G_p(x+a)$ выполняется на самом деле для всех $x\in \boldsymbol{C}_p\setminus \boldsymbol{Z}_p$. Из теоремы 1 [6] следует, что $\int\limits_{Z_p}\binom{z}{n}d\mu_{B(a)}(z)=-\binom{a}{n+1}$, и мера $\mu_{B(a)}$ отождествляется в стандартном смысле с формальным степенным рядом $-\sum\limits_{n\geq 0}\binom{a}{n+1}X^n=-\frac{(1+X)^a-1}{X}$. При натуральном a мера $\mu_{B(a)}$ дискретна (является суммой мер Дирака): $\mu_{B(a)}=$ $=-\sum\limits_{i=0}^{a-1}\delta_i$. Далее имеем $\mu_{B(a)}^{(t,\,s)}=\mu_{B\left(-\left[\frac{t-a}{p^s}\right]\right)}$. Отсюда с помощью формулы (5) из [6], находим

$$\int\limits_{t+p^sZ_p} z^n\,d\mu_{B(a)}(z)=\frac{p^{sn}}{n+1}\left\{B_{n+1}\left(\frac{t}{p^s}\right)-B_{n+1}\left(\frac{t}{p^s}-\left[\frac{t-a}{p^s}\right]\right)\right\}. \quad (5)$$

Для этих величин при условии $|t|=1$ стандартным образом [5] можно получить сравнения, уточняющие сравнения Куммера для чисел Бернулли. Из равенств (4), (5) вытекает, что

$$\int\limits_{Z_p^*} z^n\,d\mu_{B(a)}(z)=\frac{1}{n+1}\left\{-B_{n+1}(a)+p^nB_{n+1}\left(-\left[-\frac{a}{p}\right]\right)+\right.$$
$$\left.+(1-p^n)B_{n+1}\right\}. \quad (6)$$

С помощью этой формулы можно установить следующие аналоги сравнений Фробениуса и Клаузена—фон Штаудта: если $n\equiv$ $\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,(p-1)p^m)$, то $\frac{1}{n+1}\left\{B_{n+1}(a)-p^nB_{n+1}\left(-\left[-\frac{a}{p}\right]\right)\right\}\equiv a-$ $-\left[-\frac{a}{p}\right]\,(\mathrm{mod}\,p^{m+1})$; если $n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p-1)$, то $\frac{B_n(a)-B_n}{n}\equiv$ $=\sum\limits_{i=1}^{\{a\}_1-1}\frac{1}{i}\,(\mathrm{mod}\,p)$.

6. Рассмотрим функцию $\eta_p(s,\ a)=M_p(s,\ \mu_{B(a)})$ $(s,\ a\in \boldsymbol{Z}_p)$. Из теоремы 2 с учетом формулы (6) вытекает следующая теорема

Теорема 3. *1) Функция* $\eta_p(s, a)$ *аналитична на* $\boldsymbol{Z}_n$; *2)* $\eta_p(1-n, a) = \frac{1}{n}\left\{-B_n(a) + p^{n-1}B_n\left(-\left[-\frac{a}{p}\right]\right) + (1-p^{n-1})B_n\right\}$ $n \geqslant 1$, $n \equiv 0 \pmod{p-1}$); *3)* $\eta_p(1-n, a) = \frac{p^{n-1}}{n}\sum_{i=1}^{p-1}\omega^{-n}(i) \times$ $\times\left\{B_n\left(\frac{i}{p}\right) - B_n\left(\frac{i}{p} - \left[\frac{i-a}{p}\right]\right)\right\}$ $(n \geqslant 1)$; *4)* $\eta_p(0, a) = \sum_{i=1}^{p-1}\omega^{-1}(i) \times$ $\times\left\{G_p\left(\frac{i}{p} - \left[\frac{i-a}{p}\right]\right) - G_p\left(\frac{i}{p}\right)\right\}$; *5)* $\eta_p(n, a) = \frac{(-p)^{-n}}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{p-1}\omega^{n-1}\times(i)$ $\left\{G_p^{(n)}\left(\frac{i}{p} - \left[\frac{i-a}{p}\right]\right) - G_p^{(n)}\left(\frac{i}{p}\right)\right\}$ $(n \geqslant 1)$. *Функция* $\eta_p(s, a)$ *характеризуется свойствами 1, 2, 3.*

Теорему 3 можно также доказать, воспользовавшись тем, что $\int_{Z_p} f(z)\,d\mu_{B(a)}(z) = \lim_{n\to\infty}\int_{Z_p} f(z)\,d\mu_{B(a_n)}(z)$, где $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \boldsymbol{Z}_p$, $a_n \in \boldsymbol{N}$, и проверив все равенства для натуральных a_n.

7. Положим $\zeta_p(s, a) = \zeta_p(s) + \eta_p(s, a)$ $(s, a \in \boldsymbol{Z}_p)$.

Теорема 4. *1)* $\zeta_p(s, a)$ *— мероморфная функция на* $\boldsymbol{Z}_p$ *с единственным полюсом* $s = 1$ *и вычетом в нем равным* $1 - \frac{1}{p}$; *2)* $\zeta_p(1-n, a) = \frac{1}{n}\left\{-B_n(a) + p^{n-1}B_n\left(-\left[-\frac{a}{p}\right]\right)\right\}$ $(n \geqslant 1, n \equiv$ $\equiv 0 \pmod{p-1}$); *3)* $\zeta_p(1-n, a) = -\frac{p^{n-1}}{n}\sum_{i=1}^{p-1}\omega^{-n}(i)\,B_n\left(\frac{i}{p} -\right.$ $\left.-\left[\frac{i-a}{p}\right]\right)$ $(n \geqslant 1)$; *4)* $\zeta_p'(0, a) = \sum_{i=1}^{p-1}\omega^{-1}(i)\,G_p\left(\frac{i}{p} - \left[\frac{i-a}{p}\right]\right)$; *5)* $\zeta_x(n, a) = \frac{(-p)^{-n}}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{p-1}\omega^{n-1}(i)\,G_p^{(n)}\left(\frac{i}{p} - \left[\frac{i-a}{p}\right]\right)$ $(n \geqslant 1)$. *Функция* $\zeta_p(s, a)$ *характеризуется условиями 1), 2) или 1), 3).*

Для доказательства достаточно сопоставить теоремы 1 и 3.

В работе [7] методом Куботы—Леопольдта был построен p-адический аналог $L_p(s; a, b, \chi)$ дзета-функции Гурвица-Лерха. При этом, в частности, предполагалось, что $a \in \boldsymbol{C}_p$, $|a| \leqslant |p|$. Легко заметить, что если $a \in \boldsymbol{Z}_p$, $|a| \leqslant |p|$, то $L_p(s; a, 1, \varepsilon) = \zeta_p(s, 1 + a)$.

Список литературы: 1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1.— М.: Наука, 1973.— 295 с. 2. *Lang S.* Cyclotomic fields— N.-Y.: Springer, 1978.— 253 p. 3. *Iwasawa K.* Lectures on p-adic L-functions.— Princeton: Princeton University Press, 1972.— 106 p. 4. *Koblitz N.* A new proof of cetrain formulas for p-adic L-functions.— Duke Math. I., 1979, v. 46, N 2, p. 455—468. 5. *Koblitz N.* *p*-adic numbers, *p*-adic analysis and zeta — functions.— N.— Y.: Springer, 1977.— 122 p. 6. *Калюжный В. Н.* Степенная проблема моментов на *p*-адическом диске.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1983, вып. 39, с. 54—61 7. *Morita Y.* On the Hurwitz-Lerch *L*-functions.— J. Fac. Sci. Univ. Tukyo, Sec. IA, 1977, 24, N 1, p. 29—43.

Поступила в редколлегию 14.01.82.