УДК 513.881

В. М. КАДЕЦ

О КОМПЛЕКСНОЙ РАВНОМЕРНОЙ ВЫПУКЛОСТИ ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА-БОХНЕРА

Пусть X — комплексное банахово пространство; S — его единичная сфера. Комплексным модулем выпуклости пространства X называется функция

$$\delta_X^c(\varepsilon) = \inf \{\sup_h \|x + h\varepsilon y\| - 1 : x,\ y \in S\} \quad (\varepsilon \geqslant 0), \tag{1}$$

где h пробегает множество $H = \{+1,\ -1,\ i,\ -i\}$. Если из H удалить два последних элемента, то получится одна из модификаций обычного модуля выпуклости. Пространство X называется комплексно равномерно выпуклым, если $\delta_X^c(\varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon > 0$. Комплексно равномерно выпуклые пространства введены Глобевником [1]. Класс комплексно равномерно выпуклых пространств существенно шире класса обычных равномерно выпуклых пространств. Так, согласно теореме Глобевника из [1], нерефлексивное банахово пространство L^1 является комплексно равномерно выпуклым с модулем, допускающим квадратичную оценку при малых ε. Отсюда, между прочим, вытекает возможность доказать теорему Орлича [2] о безусловно сходящихся рядах в L^1, используя комплексный модуль выпуклости, подобно тому, как в [3] был доказан аналог теоремы Орлича для равномерно выпуклых банаховых пространств.

Цель настоящей статьи — выяснить, как наследуется свойство комплексной равномерной выпуклости данного банахова пространства X пространством Лебега—Бохнера $L^1[E, \mu, X]$ всех X-значных функций, определенных на множестве E с мерой μ и интегрируемых по Бохнеру. Выясним некоторые свойства комплексного модуля выпуклости.

Лемма 1. *Функция $\delta_X^c(\varepsilon)$ не убывает с ростом ε, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_X^c(\varepsilon) = 0$, функция $\delta_X^c(\varepsilon)/\varepsilon$ не убывает с ростом ε.*

Доказательство. Первые два утверждения очевидны. Докажем последнее утверждение. Для данных x и y из S и данного $\varepsilon_1 > 0$ возьмем то $h \in H$, при котором $\|x + h\varepsilon_1 y\| \geqslant \delta_X^c(\varepsilon_1) + 1$. Тогда для любого $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ имеем

$$\|x + h\varepsilon_2 y\| = \left\|\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}x + h\varepsilon_2 y + \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)x\right\| \geqslant \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\|x + h\varepsilon_1 y\| - \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \geqslant \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}(1 + \delta_X^c(\varepsilon_1)) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + 1 = 1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\delta_X^c(\varepsilon_1).$$

Так как правое выражение в последней цепочке неравенств не зависит от выбора x и y, мы можем в левом выражении взять требуемую формулой 1 верхнюю и нижнюю грани и перейти к неравенству между значениями комплексного модуля выпуклости $\delta_X^c(\varepsilon_2) \geqslant \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\delta_X^c(\varepsilon_1)$ при $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Лемма доказана.

Для обычного модуля выпуклости утверждение, аналогичное лемме 1, доказано в [4].

Лемма 2. *Пусть X — комплексно равномерно выпуклое пространство. Существует функция $\delta_1(\varepsilon)$, удовлетворяющая следующим условиям: $\delta_1(\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon > 0$; функция $\delta_1(\varepsilon)/\varepsilon$ не убывает с ростом ε; $\sum\limits_h \|x + hy\| \geqslant 4 + \delta_1(\varepsilon)$, каковы бы ни были элементы x и y, $\|x\| = 1$, $\|y\| = \varepsilon$. Если при этом $\delta_X^c(\varepsilon)$ допускает степенную оценку снизу при малых ε, то $\delta_1(\varepsilon)$ допускает оценку с тем же показателем.*

Доказательство. Пусть $x, y \in X$, $\|x\| = 1$, $\|y\| = \varepsilon < \frac{1}{3}$. Возьмем линейный функционал $f \in X^*$ такой, что $f(x) = \|f\| = 1$. Тогда

$$\sum_h \|x + hy\| = \sum_h \|x + hf(y)x + h(y - xf(y))\| =$$
$$= \sum_h |1 + hf(y)| \cdot \left\| x + \frac{h}{1 + hf(y)} (y - xf(y)) \right\|.$$

Рассмотрим в комплексной плоскости выпуклую оболочку точек $h/(1 + hf(y))$ $h \in H$. Это будет четырехугольник, содержащий нуль. Его вершины близки по направлению числам h: $\left|\arg h - \arg \frac{h}{1 + hf(y)}\right| = |\arg(1 + hf(y))| \leqslant \arcsin {}^1/_3$ (2). Расстояния от нуля до каждой из вершин больше, чем $(1 + |f(y)|)^{-1}$. Отсюда и из (2) получается, что этот четырехугольник содержит круг $|z| \leqslant {}^1/_4 (1 + |f(y)|)^{-1}$. Следовательно, $\max\limits_{h \in H} \left\| x + \frac{h}{1 + hf(y)} \times (y - xf(y)) \right\| \geqslant 1 + \delta_X^\varepsilon \left(\frac{1}{4} \frac{\|xf(y) - y\|}{1 + |f(y)|} \right)$. Кроме того $\left\| x + \frac{h}{1 + hf(y)} (y - xf(y)) \right\| \geqslant f\left(x + \frac{h}{1 + hf(y)} (y - xf(y)) \right) = f(x) = 1$

Поэтому $\sum\limits_{h \in H} \|x + hy\| \geqslant \sum\limits_{h \in H} |1 + hf(y)| +$
$$+ |1 - |f(y)|| \left(1 + \delta_X^\varepsilon \left(\frac{1}{4} \frac{\varepsilon - |f(y)|}{1 + |f(y)|} \right) \right).$$

Если $|f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, то $||1 - |f(y)|| \cdot \delta_X^\varepsilon \left(\frac{1}{4} \frac{\varepsilon - |f(y)|}{1 + |f(y)|} \right) \geqslant \frac{3}{4} \delta_X^c \left(\frac{\varepsilon}{10} \right)$.

Таким образом, при $|f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ $\sum\limits_{h \in H} \|x + hy\| \geqslant 4 + \frac{3}{4} \delta_X^c \left(\frac{\varepsilon}{10} \right)$.

Если же $|f(y)| > \frac{\varepsilon}{2}$, то мы можем воспользоваться неравенством из [1] $\sum\limits_{h \in H} \|x + hy\| \geqslant \sum\limits_h |1 + hf(y)| \geqslant 4 + 2\left(\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{4}} - 1 \right)$.

Значит, при $\varepsilon \leqslant \frac{1}{3}$ мы можем определить функцию $\delta_1(\varepsilon) = \min \times \left\{ \frac{3}{4} \delta_H^c \left(\frac{\varepsilon}{10} \right), 2\left(\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{4}} - 1 \right) \right\}$. При $\varepsilon > \frac{1}{3}$ можно доопределить $\delta_1(\varepsilon)$ следующим образом: $\delta_1(\varepsilon) = 3\delta_1\left(\frac{1}{3} \right) \cdot \varepsilon$. Нетрудно проверить, опираясь на лемму 1, что функция $\delta_1(\varepsilon)$ удовлетворяет всем требованиям леммы 2.

Замечание. По теореме Фигеля [4], если $g(t)/t$ не убывает с ростом t, то существует выпуклая функция $g(t) < \tilde{g}(t)$ такая, что $\exists \gamma \in]0,1[\; \forall x \in [0, \; 1], \quad g(x) < (1/\gamma - 1)\,\tilde{g}(\gamma x)$. Поэтому функцию $\delta_1(\varepsilon)$ из леммы 2 будем в дальнейшем считать выпуклой.

Теорема. *Если X — комплексно равномерно выпуклое пространство, то $L_1[E, \mu, X]$ также комплексно равномерно выпукло. Более того, если модуль $\delta_X^c(\varepsilon)$ допускает степенную оценку снизу при малых ε, то комплексный модуль выпуклости пространства $L_1[E, \mu, X]$ допускает оценку с тем же показателем.*

Доказательство. Пусть $x(t), \; y(t) \in L_1[E, \mu, X]$, $\int\limits_E \|x(t)\|_X d\mu = 1$, $\int\limits_E \|y(t)\|_X d\mu = \varepsilon$. Обозначим через E_1 множество тех значений аргумента, при которых $x(t) \neq 0$. Тогда

$$\int\limits_E \Big(\sum_h \|x(t) + hy(t)\|_X\Big) d\mu = \int\limits_{E_1} \|x(t)\|_X \sum \Big\| \frac{x(t)}{\|x(t)\|_X} + h\frac{y(t)}{\|x(t)\|_X} \Big\|_X d\mu + 4 \int\limits_{E \setminus E_1} \|y(t)\|_X d\mu \geqslant 4 +$$

$$+ \int\limits_{E_1} \|x(t)\|_X \delta_1\Big(\frac{\|y(t)\|_X}{\|x(t)\|_X}\Big) d\mu + 4 \int\limits_{E \setminus E_1} \|y(t)\|_X d\mu \geqslant 4 +$$

$$+ \delta_1\Big(\int\limits_{E_1} \|y(t)\|_X d\mu\Big) + \delta_1\Big(\int\limits_{E \setminus E_1} \|y(t)\|_X d\mu\Big) \geqslant 4 + 2\delta_1\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Таким образом, согласно определению комплексного модуля выпуклости,

$$\delta^c_{L_1[E, \mu, X]}(\varepsilon) \geqslant \inf\Big\{\frac{1}{4}\int\limits_E \sum_h \|x(t) + hy(t)\|_X d\mu - 1\Big\} \geqslant \frac{1}{2}\delta_1\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Теорема доказана.

Замечание. В доказательстве теоремы не используется конструкция интеграла Бохнера. Существенна лишь интегрируемость норм.

Список литературы: 1. *Globevnik I.* On the complex strict and uniform convexity.— Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **47,** N 1, p. 175—178. 2. *Orlicz W.* Über unbedingte Konvergenz in Funktionraumen.— Stud. Math., 1930, 1, p. 83—85. 3. *Кадец М. И.* Безусловно сходящиеся ряды в равномерно выпуклых пространствах.— Усп. мат. наук, 1956, 11, № 5, с. 185—190 4. *Figiel T.* On the moduli of convexity and smoothness. Stud. Math, 1976, 56, p. 121—155.

Поступила в редколлегию 31.08.81.