УДК.517.948:513

*В. А. ЗОЛОТАРЕВ*

# СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ КОММУТАТИВНЫХ СИСТЕМ ОПЕРАТОРОВ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Спектральные представления линейных несамосопряженных операторов и их модели хорошо изучены [1]. Задача построения модельных представлений систем линейных несамосопряженных ограниченных операторов $\{A_k\}_1^n$ в общем случае не решена. Первый класс операторов, для которого это удалось сделать — это класс дважды перестановочных операторов [2], $D = C = 0$, где $D = A_1A_2 - A_2A_1$; $C = A_1^*A_2 - A_2A_1^*$. В работах автора эту задачу удалось решить в случае нильпотентности $D$ и $C$. Предложенный в [3] подход к исследованию коммутативных систем операторов («мерой отклонения от класса дважды перестановочных операторов» выбираются операторы $\frac{1}{2}(A_1^*A_2 - A_2^*A_1)$, $\frac{1}{2}(A_1A_2^* - A_1^*)$, позволил [4], [5], [7] решить некоторые спектральные задачи теории несамосопряженных систем линейных ограниченных операторов. В данной статье обобщены некоторые результаты автора [5] на случай $n > 2$.

I. Систему операторов $\{A_k\}_1^n$, действующих в $H$, и совокупность самосопряженных операторов $\sigma_k$, $\gamma_{k,s}$, $\tilde{\gamma}_{k,s} \in [E, E]$ $(1 \leqslant k, s \leqslant n)$ и $\varphi \in [H, E]$ будем называть коммутативным операторным узлом [5]. Запишем $\Delta = (\{A_k\}_1^n, H, \varphi, E, \{\sigma^k\}^n, \{\gamma_{k,s}\}_1^n, \{\tilde{\gamma}_{k,s}\}_1^n)$, если 1) $[A_k, A_s] = A_kA_s - A_sA_k = 0$; 2) $A_k - A_k^* = i\varphi^*\sigma_k\varphi$; 3) $\tilde{\gamma}_{k,s}\varphi = \sigma_k\varphi A_s - \sigma_s\varphi A_k$; 4) $\tilde{\gamma}_{k,s} - \gamma_{k,s} = i(\sigma_k\varphi\varphi^*\sigma_s - \sigma_s\varphi\varphi^*\sigma_k)$, $1 \leqslant k, s \leqslant n$ (1). Очевидно, что $\gamma_{k,s} = -\gamma_{s,k}$; $\tilde{\gamma}_{k,s} = -\tilde{\gamma}_{s,k}$, кроме того, можно считать, что $\sigma_1$ обратим. Легко видеть, что произвольная коммутативная система $\{A_k\}_1^n$ может быть включена в коммутативный операторный узел. Класс коммутативных операторных узлов замкнут относительно операции сцепления. Впервые $\gamma_{k,s}$ были введены в [3].

**Теорема 1.** *Для* $S_1(\lambda) = I - i\varphi(A_1 - \lambda I)^{-1}\varphi^*\sigma_1$ *(если* $\sigma_1$ *обратим) коммутативного операторного узла* $\Delta$ *справедливы соотношения* $\sigma_1^{-1}(\sigma_k\lambda + \tilde{\gamma}_{1,k})S_1(\lambda) = S_1(\lambda)\sigma_1^{-1}(\sigma_k\lambda + \gamma_{1,k})$ **(2)** $(1 < k \leqslant n)$, *которые будем называть условиями сплетаемости.*

Отсюда следует, что при $\dim E < \infty$, $S_1(\lambda)$ является морфизмом векторных расслоений (со слоем $E$) на римановой поверхности $\Gamma = \{\lambda = z_1;\ (z_1, z_2, \ldots, z_n)\colon Q_{k,s}(z_k, z_s) = 0,\ 1 \leqslant k, s \leqslant n\}$, где $Q_{k,s}(z_k, z_s) = \det(\sigma_s z_k - \sigma_k z_s + \gamma_{k,s})$, $1 \leqslant k, s \leqslant n$.

С учетом коммутативности системы $\{A_k\}_1^n$ из (2) следует, что $[\sigma_1^{-1}\sigma_k, \sigma_1^{-1}\sigma_s] = 0$; $[\sigma_1^{-1}\sigma_s, \sigma_1^{-1}\gamma_{k,1}] = [\sigma_1^{-1}\sigma_k, \sigma_1^{-1}\gamma_{s,1}]$; $[\sigma_1^{-1}\gamma_{k,1},$

$\sigma_1^{-1}\gamma_{s,1}] = 0, \quad 1 \leqslant k, \quad s \leqslant n$ (3). Эти условия (см. также [7]) по существу являются условиями совместности некоторой системы дифференциальных уравнений в частных производных [4], [5].

**Теорема 2.** *Предположим, что для коммутативных операторных узлов $\Delta$ и $\Delta' : E = E'$ и $\sigma_k = \sigma'_k$; $\gamma_{k,1} = \gamma'_{k,1}$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$ ($\sigma_1$ — обратим), и кроме того, $S_1(\lambda) = S'_1(\lambda)$. Тогда главные компоненты* [1] *операторных узлов $\Delta$ и $\Delta'$ унитарно эквивалентны.*

II. Перейдем к построению треугольных моделей. Пусть $\dim E = r < \infty$, $\sigma_1 = J (= J^* = J^{-1})$. Предположим (для простоты), что $A_1$ имеет только вещественный спектр. Тогда [1] в случае абсолютной непрерывности матричной меры Стильтьеса мультипликативного интеграла $S_1(\lambda) = S(\lambda) = \overset{\frown}{\int\limits_0^l} \exp \frac{iJa_t}{\lambda - \alpha(t)} \, \mathrm{d}t$.

**Теорема 3.** *Для того чтобы для* $S_x(\lambda) = \overset{\frown}{\int\limits_0^x} \exp \frac{iJa_t}{\lambda - \alpha(t)} dt$ *выполнялись условия сплетаемости*

$$(\sigma_k \lambda + \gamma_{1,k}(x)) JS_x(\lambda) = S_x(\lambda) J (\sigma_k \lambda + \tilde{\gamma}_{1,k}), \quad (2 \leqslant k \leqslant n) \qquad (4)$$

*при некоторых $\gamma_{1,k}(x)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\gamma'_{1,k}(x) J = i [Ja_x, \sigma_x J], \quad \gamma_{1,k}(0) = \tilde{\gamma}_{1,k};$$
$$[Ja_x, (\sigma_k \alpha_x + \gamma_{1,k}(x)) J] = 0, \quad (2 \leqslant k \leqslant n). \qquad (5)$$

Уравнения (5) эквивалентны системе, состоящей из $(n-1)$ нелинейных уравнений

$$\left[ J \frac{d}{dx} A_x, \ (\sigma_k J \alpha_x + \tilde{\gamma}_{1,k} J + i [JA_x, \sigma_k J]) \right] = 0 \qquad (6)$$

$(2 \leqslant k \leqslant n)$, где $a_x = \frac{d}{dx} A_x$; задача свелась к отысканию общего решения $A_x$ $\left(\frac{d}{dx} A_x \geqslant 0\right)$ системы (6). Отметим, что коэффициенты многочленов $Q_{1,x}$ являются интегралами (6), $(2 \leqslant k \leqslant n)$.

Определим модельное пространство [5]

$$L^2_{r,a}(0, l) = \left\{ f(x) = (f_1(x), \ \ldots, \ f_r(x)), \ \int\limits_0^l f(t) \, a_t f^*(t) \, \mathrm{d}t < \infty \right\}, \qquad (7)$$

считая, что $L^2_{r,a}(0, l)$ профакторизовано по ядру метрики. Модельный оператор [5] $\overset{\circ}{A}_1$ имеет вид

$$(\mathring{A}_1 f)(x) = \alpha(x) f(x) + i \int_x^l f(t)\, a_t J\, \mathrm{d}t. \qquad (8)$$

**Теорема 4.** *Пусть* $\mathring{S}_1(\lambda) = \overset{l}{\underset{0}{\widehat{\int}}} \exp \frac{iJa_t}{\lambda - \alpha(t)} \mathrm{d}t$ *и существует решение системы* (5) $\gamma_{1,k}(x)$ *для некоторых эрмитовых матриц* $\sigma_k$, $\tilde{\gamma}_{1,k}$, *удовлетворяющих* (3), $2 \leqslant k \leqslant n$. *Тогда существует коммутативный операторный узел такой, что* $\mathring{H} = L^2_{r,a}(0, l)$, (7); $\gamma_{1,k} = \gamma_{1,k}(l)$; $\tilde{\gamma}_{1,k} = \gamma_{1,k}$,(0), $\mathring{A}_1$ *задан формулой* (8) *и*

$$(\mathring{A}_k f)(x) = f(x) J(\sigma_k \alpha(x) + \gamma_{1,k}(x)) + i \int_x^l f(t)\, a_t \sigma_k\, \mathrm{d}t, \qquad (9)$$

$2 \leqslant k \leqslant n$, $f(x) \in \mathring{H}$, *где* $\mathring{S}_1(\lambda)$ *характеристическая функция* $\mathring{A}_1$.

Следовательно, вопрос о существовании коммутативной системы $n$ операторов с заданными $\sigma_k$, $\gamma_{1,k}$ ($1 \leqslant k \leqslant n$) (которые удовлетворяют (3)) эквивалентен существованию решения системы нелинейных уравнений (6) $A_x$ такого, что $\frac{d}{dx} A_x \geqslant 0$.

Отметим, что связь коммутативной системы операторов с нелинейными уравнениями была обнаружена недавно. Она в случае коммутативной системы дифференциальных операторов конечного порядка позволила методами обратной задачи и алгебраической геометрии проинтегрировать некоторые нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза [6]. Построение $L$, $A$ пары Лакса [6] для уравнений (6) неизбежно приводит нас к условию сплетаемости (4), т. е. решение задачи (6) эквивалентно задаче факторизации характеристической функции с сохранением сплетаемости (4).

**Теорема 5.** *Для вполне несамосопряженной* (1) *коммутативной системы операторов* $\{A_k\}_1^n$ *узла* $\Delta$ *в случае* $\dim E < \infty$ *имеют место* $Q_{k,s}(A_k, A_s) = 0$, $1 \leqslant k$, $s \leqslant n$.

Данный результат при $n = 2$ был получен впервые М. С. Лившицем, а в случае $n = 2$ коммутативной системы дифференциальных операторов конечного порядка — И. М. Кричевером [6].

III. Следующая теорема показывает, что, вообще говоря, произвольная система двух (что является несущественным) ограниченных операторов может быть реализована сужением некоторой коммутативной системы операторов на инвариантное подпространство одного из них.

**Теорема 6.** *Пусть* $A_1$, $A_2$ *произвольная система ограниченных операторов в* $H$. *Тогда существует расширение* $\tilde{H} \supset H$ *и коммутативная система* $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2 \in [\tilde{H}, \tilde{H}]$ такая, что $A_k = P_H \tilde{A}_k P_H$, $k = 1, 2$ ($P_H$ *ортопроектор на* $H$), *причем,* $H$ *яв-*

*ляется инвариантным подпространством для* $\tilde{A}_1$, *а* $\tilde{A}_2$ ***обладает*** *свойством* $\tilde{A}_2^2 = 0$.

IV. **Пример.** Пусть $n = 2$, а $\dim E = 3$ и

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & i\gamma_2 & \gamma_3 \\ -i\gamma_2 & \gamma_4 & -i\gamma_2 \\ \gamma_3 & i\gamma_2 & \gamma_5 \end{bmatrix},$$

где $\gamma_k \in \boldsymbol{R}$, $1 \leqslant k \leqslant 5$; $\gamma_4 + \gamma_5 = \gamma_1$; $1 = 8\gamma_3 - 4\gamma_5 - 4\gamma_1$. Тогда риманова поверхность $\Gamma = \{(z_1, z_2), \ Q(z_1, z_2) = 0\}$, определяется алгебраической кривой $O = Q(z_1, z_2) = z_1^2 - 4z_2^3 + z_2 g_2 + g_3$. Очевидно, что униформизация $z_2 = \gamma(u)$; $z_1 = \gamma'(u)$ ($\gamma$ — функция Вейерштрасса) приводит нас к решению уравнения (6) в эллиптических функциях. Особенности характеристической функции располагаются в прямоугольнике периодов не только на его границе, но и внутри [5]. А задача факторизации характеристической функции приводит к задаче $J$ факторизации матриц функций на торе [5].

**Список литературы:** 1. *Лившиц М. С., Янцевич А. А.* Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах.— Х.: Изд-во при Харьк. ун-те, 1971.— 160 с. 2. *Золотарев В. А.* О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов.— Докл. АН АрмССР. 1981, **62**, № 3, с. 136—140. 3. *Лившиц М. С.* Коммутирующие несамосопряженные операторы и порождаемые ими решения систем дифференциальных уравнений в частных производных.— Сообщ. АН ГрузССР, 1978, **91**, № 2, с. 281—284. 4. *Золотарев В. А.* Об открытых системах и характеристических функциях коммутирующих систем операторов.— Рукопись депонирована в ВИНИТИ, РЖ «Математика» 9Б662 деп, 1979, с. 1—35. 5. *Золотарев В. А.* Треугольные модели и задачи Коши для характеристических функций коммутирующих систем операторов.— Рукопись депонирована в ВИНИТИ, РЖ «Математика» 1Б916 деп, 1981, с. 1—66. 6. *Кричевер И. М.* Интегралы нелинейных уравнений эволюции и уединенные волны.— Математика, 1969, с. 128—150. 7. *Ваксман Л. Л.* Гармонический анализ многопараметрических полугрупп сжатий.— Рукопись депонирована в ВИНИТИ, РЖ «Математика» 1Б1055, 1981, с. 1—167.

*Поступила в редколлегию 13.01.82.*