УДК 513.33

В. С. ШУЛЬМАН

СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ И ТЕОРЕМЫ ФУГЛИДА — ПАТНЭМА — РОЗЕНБЛЮМА

Известная теорема Фуглида — Патнэма устанавливает эквивалентность в пространстве $L(H)$ всех ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, уравнений $N_1X = XN_2$ и $N_1^*X = XN_2^*$ для любых нормальных операторов N_1, N_2. Обозначив через Δ, $\tilde{\Delta}$ действующие в $L(H)$ операторы $X \to N_1X - XN_2$ и $X \to N^*X - XN_2^*$, это утверждение можно записать в виде $\operatorname{Ker}\Delta = \operatorname{Ker}\tilde{\Delta}$, или, что то же, $\operatorname{Ker}(\Delta_A + i\Delta_B) = \operatorname{Ker}(\Delta_A - i\Delta_B)$, где $\Delta_A(X) = A_1X - XA_2$; $\Delta_B(X) = B_1X - XB_2$, а A_k, B_k — эрмитовы компоненты операторов N_k. Поэтому оно является немедленным следствием такого результата (по существу, принадлежащего Розенблюму [1]):

если T, S — коммутирующие операторы в банаховом пространстве и $\|\exp itT\| = \|\exp itS\| = 1$ при $t \in R$ (в этом случае T, S называются эрмитовыми), то $\operatorname{Ker}(T + iS)$ совпадает с $\operatorname{Ker}T \cap \operatorname{Ker}S$.

Условие эрмитовости здесь можно ослабить до $\|\exp itT\| = 0(|t|)$, $\|\exp itS\| = 0(|t|)$ при $t \to \infty$. Более того, достаточно, сохранив это условие роста экспоненты для одного оператора, от другого требовать лишь вещественности спектра: этот неожиданный результат вместе с далеко идущими обобщениями (в том числе — на некоммутирующие T, S) получен Е. А. Гориным [2]. Иное также весьма интересное обобщение теоремы Розенблюма найдено Бояджиевым [3]: если $T_1, \ldots, T_n$ — коммутирующие эрмитовы операторы, а P — многочлен от n переменных, не имеющий нулей в $\mathbb{R}^n - \{0\}$, то $\operatorname{Ker} P(T_1, \ldots, T_n) \subset \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} T_k$.

Цель данной работы — выяснение связи рассматриваемой тематики со спектральным синтезом. Этот подход позволяет включить в единый контекст результаты Горина, Бояджиева, теорему Капланского об идеалах C^*-алгебр, а также получить новые критерии эквивалентности систем линейных операторных уравнений. Самостоятельный интерес могут представлять и некоторые вспомогательные утверждения о гомоморфизмах регулярных алгебр и об алгебрах с синтезируемой диагональю.

Условимся для произвольного семейства E элементов банаховой алгебры A (с единицей) обозначать через E' его коммутант (множество элементов алгебры, перестановочных со всеми элементами из E), через E'' — бикоммутант $(=(E')')$ и через $J(E)$ $(I_e(E),\ J_r(E))$ — порожденный E двусторонний (соответственно левый, правый) замкнутый идеал. Если $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ — набор элементов из центра алгебры A, то его спектром называется множество $\sigma(\vec{a})$ всех наборов $\vec{\lambda}$ из $\mathbf{C}^n$, для которых $J(\{a_i - \lambda_i 1\}_{i=1}^n) \neq A$. Хорошо известны существование функционального исчисления на алгебре ростков аналитических в окрестности $\sigma(\vec{a})$ функций и теорема об отображении спектра: $\sigma(F_1(\vec{a}), \ldots, F_k(\vec{a})) = \{(F_1(\vec{\lambda}), \ldots, F_k(\vec{\lambda})) : \vec{\lambda} \in \sigma(\vec{a})\}$. Для произвольного коммутативного набора $\vec{a}$ элементов алгебры A под $\sigma(\vec{a})$ понимается его спектр в алгебре $(\vec{a})'$ (в центре которой $\vec{a}$ содержится); соответствующий смысл придается и термину $F(\vec{a})$. В случае, когда набор состоит из одного элемента, это определение совпадает с обычным; в общем случае справедливо включение $\sigma(\vec{a}) \subset \prod_{i=1}^{n} \sigma(a_i)$.

Если алгебра A коммутативна, то через M_A обозначается пространство ее максимальных идеалов, а через $x \to \hat{x}$ — преобразование Гельфанда $A \to C(M_A)$. Множество $h(E) = \{m \in M_A : E \subset m\}$ называется оболочкой семейства $E \subset A$; E называется синтезируемым, если содержится в любом замкнутом идеале, оболочку которого содержит $h(E)$. Для $S \subset M_A$ положим $J_S = \bigcap_{m \in S} m$, $J_S^{(0)} = \{x \in A : S \cap \operatorname{supp} \hat{x} = \varnothing\}$; если A регулярна и полупроста, то J_S, J_S^0 являются соответственно наибольшим и наименьшим из идеалов с оболочкой S. S называется множеством синтеза, если $J_S = \overline{J_S^{(0)}}$. Если $\Phi : A \to B$ непрерывный (в дальнейшем непрерывность подразумевается) гомоморфизм коммутативных банаховых алгебр, то индуцированное отображение пространств максимальных идеалов обозначается Φ^*.

Алгебру всех ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве X мы будем обозначать $L(X)$. Для $E \subset L(X)$ символом $\operatorname{Ker} E$ обозначается пересечение ядер всех операторов из E.

1. Связь между синтезом и теоремами Фуглида — Патнэма — Розенблюма выявляет уже следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра, $E \subset A$, $F \subset A$ и $h(F) \subset h(E)$. Если E синтезируемо, то* $\operatorname{Ker}(\Phi(F)) \subset \operatorname{Ker}(\Phi(E))$ *для любого гомоморфизма* $\Phi : A \to L(X)$.

Доказательство. Из условия сразу следует, что $E \subset I(F)$, и потому в силу непрерывности Φ $\Phi(E) \subset J_e(\Phi(F))$. Так как $J = \{A \in L(X) : \operatorname{Ker}\Phi(F) \subset \operatorname{Ker} A\}$ — замкнутый левый идеал алгебры $L(X)$, содержащий $\Phi(F)$, $\Phi(E) \subset I$.

Этот простой результат имеет нетривиальные следствия, поскольку позволяет использовать тонкие критерии синтезируемости. Рассмотрим, например, вопрос о справедливости непосредственного обобщения теоремы Фуглида — Патнэма, т. е. об эквивалентности линейных операторных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} N_k X M_k = 0 \quad \textbf{(1)}; \qquad \sum_{k=1}^{n} N_k^* X M_k^* = 0, \tag{2}$$

где $\{N_k\}_{k=1}^n$, $\{M_k\}_{k=1}^n$ — коммутативные наборы нормальных операторов в H. Вопрос этот в общем случае открыт*; мы решим его для достаточно гладких коэффициентных семейств. По определению, семейство нормальных операторов обладает гладкостью порядка $\alpha > 0$, если оно состоит из Lip_α-функций одного эрмитова оператора.

Следствие 1. *Если семейства $\{M_i\}_{i=1}^n$, $\{N_i\}_{i=1}^n$ обладают гладкостью порядка $\alpha > \frac{1}{2}$, то уравнения (1), (2) эквивалентны в $L(H)$.*

Доказательство. Пусть $N_k = \varphi_k(N)$, $M_k = \psi_k(M)$, где N, M — эрмитовы операторы, а φ_k, ψ_k — липшицевы порядка α функции на отрезках Δ_1, Δ_2, содержащих их спектры. Алгебра $A = C(\Delta_1) \widehat{\otimes} C(\Delta_2)$ изоморфна алгебре всех функций на $\Delta_1 \times \Delta_2 = M_A$, представимых рядами вида $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) g_j(y)$, где $f_j \in C(\Delta_1)$, $g_j \in C(\Delta_2)$, $\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\| \cdot \|g_j\| < \infty$. Гомоморфизм $\Phi : A \to L(L(H))$ зададим формулой $\Phi\left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j \otimes g_j\right) \times (X) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(N) X g_j(N)$. Тогда пространство решений уравнения (1)

* Вопрос об эквивалентности уравнений (1), (2) решен отрицательно в работе автора «Операторы умножения и спектральный синтез. Докл. АН СССР. 1990.

совпадает с $\operatorname{Ker}\Phi(s)$, где $s(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\psi_k(y)$, а пространство решений уравнения (2) — с $\operatorname{Ker}\Phi(\bar{s})$. Функции s, $\bar{s}$ принадлежат $\operatorname{Lip}_\alpha(\Delta_1 \times \times \Delta_2)$ и, в силу теоремы 7.2.2 работы [4], синтезируемы в A. Так как очевидно $h(s) = h(\bar{s})$, равенство $\operatorname{Ker}\Phi(s) = \operatorname{Ker}\Phi(\bar{s})$ следует из теоремы 1.

Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра. Для дальнейшего важен вопрос об условиях, которым должно удовлетворять множество $E \subset A$, для того, чтобы образ алгебры A в любом представлении содержался в бикоммутанте образа E. Нетрудно убедиться в необходимости следующего условия: E должно разделять точки пространства M_A. Мы сейчас выделим класс алгебр, для которых это необходимое условие является достаточным.

Обозначим через D_A диагональ декартова квадрата $M_A \times M_A$ $(= M_{A\hat{\otimes}A})$. Будем говорить, что A обладает свойством синтезируемости диагонали (кратко $A \in (SD)$), если D_A — множество синтеза для $A \widehat{\otimes} A$.

Следствие 2. *Если $A \in (SD)$, то $\Phi(A) \subset \Phi(E)''$ для любого разделяющего точки семейства $E \subset A$ и любого гомоморфизма Φ алгебры A в произвольную банахову алгебру.*

Доказательство. Пусть $\Phi: A \to B$ — гомоморфизм; зададим гомоморфизм $\Psi: A \widehat{\otimes} A \to L(B)$ формулой

$$\Psi\Big(\sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes y_j\Big)(b) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(x_j)\, b\, \Phi(y_j).$$

Положим также, $\tilde{x} = x \otimes 1 - 1 \otimes x$ $(x \in A)$, $\tilde{E} = \{\tilde{x} : x \in E\}$. Ввиду равенства $\Phi(x)' = \operatorname{Ker}\Psi(\tilde{x})$, нам достаточно доказать включени $\operatorname{Ker}\Psi(\tilde{E}) \subset \operatorname{Ker}\Psi(\tilde{A})$. Но $h(\tilde{E}) = D_A = h(\tilde{A})$, и, так как D_A — множество синтеза, то $\tilde{A}$ синтезируемо; остается применить теорему 1.

Для того чтобы доказанная «теорема о бикоммутанте» была эффективной, необходима более конкретная информация о классе (SD). Легко показать, что в него входят групповые алгебры дискретных групп. Действительно, $l^1(\Gamma \times \Gamma) \cong l^1(\Gamma) \widehat{\otimes} l^1(\Gamma)$, и $D_{l^1(\Gamma)}$ — подгруппа в $\hat{\Gamma} \times \hat{\Gamma}$, поэтому ее синтезируемость — следствие теоремы о синтезируемости смежных классов. Следующий результат позволяет значительно расширить список примеров.

Теорема 2. *Пусть алгебры A, B — регулярны, $\Phi: A \to B$ — гомоморфизм и $\overline{\Phi(A)} = B$. Если $A \in (SD)$, то $B \in (SD)$.*

Доказательство. Гомоморфизм Φ естественно порождает гомоморфизм $\tilde{\Phi}: A \widehat{\otimes} A \to B \widehat{\otimes} B$; легко проверить, что $\tilde{\Phi}^*(D_B) \subset D_A$. Следовательно, если преобразование Гельфанда элемента $f \in A \widehat{\otimes} A$ обращается в нуль в окрестности U множества D_A, то $\tilde{\Phi}(f)\hat{}$ обращается в нуль в окрестности $(\tilde{\Phi}^*)^{-1}(U) \supset D_B$. Иными словами, Φ отобра-

жает $J^{(0)}_{D_A}$ в $J^{(0)}_{D_B}$. По условию $J^{(0)}_{DA}=I_{D_B}$, так, что $a\otimes 1-1\otimes a\in \overline{J^{(0)}_{D_A}}$ и, следовательно, $\Phi(a)\otimes 1-1\otimes\Phi(a)=\tilde{\Phi}(a\otimes 1-1\otimes a)\in \overline{J^{(0)}_{D_B}}$ для любого $a\in A$. В силу плотности образа гомоморфизма Φ отсюда следует, что $b\otimes 1-1\otimes b\in\overline{J^{(0)}_{D_B}}$ для любого $b\in B$. Пусть теперь $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\otimes c_n\in J_{D_B}$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n c_n=0$ и $f=f-1\otimes\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n c_n\right)=$
$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n\otimes 1-1\otimes b_n)(1\otimes c_n)\in\overline{J^{(0)}_{D_B}}$, т. е. $J_{D_B}=\overline{J^{(0)}_{D_B}}$.

Из теоремы 2 следует, что в (SD) входит любая регулярная алгебра, порожденная ограниченной подгруппой (она содержит плотный образ групповой алгебры). Более того, как показывает доказательство теоремы, для принадлежности к (SD) достаточно, чтобы множество всех элементов, порождающих ограниченные подгруппы, было множеством образующих алгебры. В частности, (SD) содержит все алгебры $C(K)$, регулярные фактор-алгебры мер на ЛКАГ, тензорные алгебры $C(K_1)\hat{\otimes} C(K_2)$.

Одним из следствий теоремы 1 является теорема Бояджиева. В самом деле, пусть F_n — алгебра преобразований Фурье конечных мер на $\boldsymbol{R}^n$. Если $T_1,\ldots,T_n$ — коммутативное семейство эрмитовых операторов в банаховом пространстве X, то формула

$$\Psi(\hat{\mu})=\int\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\pi_k(\vec{\lambda})\,T_k\right)d\mu \tag{3}$$

(где $\pi_k(\cdot)$ — координатные функции) задает представление алгебры F_n в X. Если $\Delta\subset\mathbf{R}^n$ — куб, содержащий $\prod\limits_{i=1}^{n}\sigma(T_i)$, то идеал $J(\Delta)$ всех функций из F_n, обращающихся в нуль на Δ, содержится в $\operatorname{Ker}\Psi$, так что Ψ определяет гомоморфизм $\Phi: F_n/I(\Delta)\to L(X)$. Алгебра $A=$ $=F_n/I(\Delta)$ (состоящая из сужений на Δ функций из F_n) регулярна и удовлетворяет условию Диткина, из которого следует, что все точки куба Δ — множества синтеза. Следовательно, семейство $\pi/\Delta=(\pi_1/\Delta,\ldots$ $\ldots,\pi_n/\Delta)$ синтезируемо, его оболочка состоит из точки $\vec{0}$ или пуста. Пусть $f=P|_{\Delta}$ — сужение многочлена P на Δ, тогда $f\in A$, и из условия $P^{-1}(0)\cap\mathbf{R}^n\subset\{\vec{0}\}$ вытекает включение $h(f)\subset h(\pi/\Delta)$. Применяя теорему 1, получаем $\operatorname{Ker}\Phi(f)\subset\operatorname{Ker}\Phi(\pi/\Delta)$. Так как $\Phi(\pi_k/\Delta)=T_k$ и $\Phi(f)=P(T_1,\ldots,T_n)$, $\operatorname{Ker}P(T_1,\ldots,T_n)\subset\bigcap\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Ker}T_k$. Разумеется, многочлен здесь можно заменить любой достаточно гладкой функцией, не имеющей нулей в $\prod\limits_{i=1}^{n}\sigma(T_i)\setminus\{\vec{0}\}$.

Для того чтобы получить аналогичные результаты о ядрах операторов, подчиненных лишь условиям на спектр (a priori не допускающих применения неаналитических функций), принятый подход необходимо расширить. Точнее говоря, требуется модификация теоремы 1, в которой ядро семейства операторов из образа некоторой регулярной алгебры сравнивалось бы с ядром семейства, этому образу не принадлежащего.

2. Установим некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть банахова алгебра A содержится в центре банаховой алгебры B. Если все простые идеалы алгебры A примарны, то для любого максимального левого идеала $I \subset B$ идеал $I \cap A$ алгебры A максимален.*

Доказательство. Положим $J = I \cap A$. Если $x_1, x_2 \in A$, $x_1 x_2 \in J$, $x_1 \notin J$, то $(Bx_1 + I)x_2 \subset I$ и потому $Bx_1 + I \neq B$. В силу максимальности I это означает, что $Bx_1 + I = I$, т.е. $x_1 \in I$ и, значит, $x_1 \in J$. Мы доказали, что J — простой идеал, откуда по условию следует, что он примарен. Пусть m — максимальный идеал алгебры A, содержащий J. Так как алгебра m/J радикальна, для любого элемента $x \in m$ выполняется условие $\operatorname{dist}(x^n, J)^{1/n} \to 0$. Поскольку $Bx + I = B$, найдется элемент $a \in B$ такой, что $1 - ax \in I$. Отсюда, ввиду перестановочности x с a, $1 - a^n x^n \in I$ и, следовательно, $\operatorname{dist}(a^n x^n, I) \geqslant 1$. Поэтому $\operatorname{dist}(x^n, J) \geqslant \operatorname{dist}(x^n, I) \geqslant \| a \|^{-n} \operatorname{dist}(a^n x^n, a^n I) \geqslant \| a \|^{-n} \times \operatorname{dist}(a^n x^n, I) \geqslant \| a \|^{-n}$ — противоречие. Лемма доказана.

Замечание. Класс (PP) коммутативных банаховых алгебр, все простые идеалы которых примарны, содержит все регулярные полупростые алгебры (в самом деле, если $m_1, m_2 \in M_A$, $m_1 \neq m_2$, то найдутся $x_1 \notin m_1$, $x_2 \notin m_2$ такие, что $x_1 x_2 = 0$; следовательно, для любого идеала $J \subset m_1 \cap m_2$ выполняются соотношения $x_1 \notin J$, $x_2 \notin J$, $x_1 x_2 \in J$, т. е. J не прост). Кроме того, если $A \in (PP)$, то $\overline{\Phi(A)} \in (PP)$ для любого непрерывного гомоморфизма Φ алгебры A (если идеал $J \subset \overline{\Phi(A)}$ не примарен, то для любых $m_1, m_2 \in h(J)$ идеалы $\Phi^*(m_1)$ и $\Phi^*(m_2)$ входят в $h(\Phi^{-1}(J))$ так, что $\Phi^{-1}(J)$ не примарен и, следовательно, не прост, откуда немедленно следует, что J не прост).

Лемма 2. *Пусть $\Phi : A \to B$ — гомоморфизм банаховых алгебр, причем A регулярна и полупроста, и $\Phi(A)$ содержится в центре алгебры B. Тогда для любого замкнутого собственного левого идеала $J \subset B$ и любого $m \in h(\Phi^{-1}(J))$ найдется собственный левый идеал $I \subset B$, содержащий $\Phi(m)$ и J.*

Доказательство. Покажем, что в собственном левом идеале содержится $\Phi(m^{(0)}) \cup J$, где $m^{(0)} = J^{(0)}_{\{m\}}$ — минимальный из идеалов с оболочкой $\{m\}$. Действительно, если левый идеал, порожденный $\Phi(m^{(0)}) \cup J$, совпадает с B, то $\sum_{i=1}^{n} a_i \Phi(x_i) + b = 1$ при некоторых $x_i \in A$, $a_i \in B$, $b \in J$. Так как $m \notin \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{supp} x_i$, в силу регулярности A найдется элемент $y \in A$ такой, что $y(m) \neq 0$ и $yx_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Следовательно,

$$\Phi(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Phi(x_i) \Phi(y) + b\Phi(y) = b\Phi(y) \in J,$$

что невозможно, поскольку $y \notin m$.

Пусть теперь I — максимальный левый идеал, содержащий $\Phi(m^{(0)})$ и J. В силу замечания к лемме 1 $\overline{\Phi(A)} \in (PP)$; по лемме 1 идеал $I_0 = I \cap \overline{\Phi(A)}$ алгебры $\overline{\Phi(A)}$ максимален, и потому $\Phi^{-1}(I) = \Phi^{-1}(I_0) = \Phi^*(I_0) \in M_A$. Так как $m^{(0)} \subset \Phi^{-1}(I)$, то $\Phi^{-1}(I) = m$, $\Phi(m) \subset I$. Лемма доказана.

Следствие 3. *Пусть Φ: $A \to B$ — гомоморфизм банаховых алгебр. Если A регулярна и полупроста, то для любого $x \in A$* $\sigma(\Phi(x)) = \hat{x}(h(\mathrm{Ker}\,\Phi))$.

Доказательство. Пусть B_1 — максимальная коммутативная подалгебра в B, содержащая $\Phi(A)$. Если $\lambda = \hat{x}(m)$ для некоторого $m \in h(\mathrm{Ker}\,\Phi)$, то в силу леммы 2, примененной к алгебрам A, B_1 и идеалу $J = \{0\}$, найдется собственный идеал $I \subset B_1$, содержащий m. Это означает, что $\Phi(x) - \lambda 1 \in I$, т. е. λ принадлежит спектру элемента $\Phi(x)$ относительно алгебры B_1. Так как B_1 — наполненная подалгебра в B, $\lambda \in \sigma(\Phi(x))$, т. е. $\hat{x}(h(\mathrm{Ker}\,\Phi)) \subset \sigma(\Phi(x))$. Пусть теперь $\lambda \notin \hat{x}(h(\mathrm{Ker}\,\Phi))$, тогда $h(x - \lambda \cdot 1)$ не пересекается с $h(\mathrm{Ker}\,\Phi)$ и, следовательно, $x - \lambda \cdot 1$ обратим по модулю $\mathrm{Ker}\,\Phi$: $y(x - \lambda \cdot 1) - 1 \in \mathrm{Ker}\,\Phi$ для некоторого $y \in A$. Отсюда $\Phi(y)(\Phi(x) - \lambda \cdot 1) = 1$, $\lambda \notin \sigma(\Phi(x))$. Мы показали, что $\sigma(\Phi(x)) \subset \hat{x}(h(\mathrm{Ker}\,\Phi))$.

Следствие 4. *Пусть алгебра A — регулярна, B — коммутативна, Φ: $A \to B$ — гомоморфизм. Если семейство $E \subset A$ синтезируемо, то $\Phi(E)$ синтезируемо.*

Доказательство. Пусть $J \subset B$ — замкнутый идеал такой, что $h(J) \subset h(\Phi(E))$. Если $m \in h(\Phi^{-1}(J))$, то по лемме 2 $\Phi^{-1}(\tilde{m}) + J$ содержится в некотором собственном идеале алгебры B. Следовательно, существует максимальный идеал $\tilde{m} \in M_B$, для которого $\Phi(m) \subset \tilde{m}$, $J \subset \tilde{m}$. Первое из этих включений влечет $m \subset \Phi^{-1}(\tilde{m})$ и, ввиду максимальности, $m = \Phi^{-1}(\tilde{m})$. Из второго следует

$$\tilde{m} \in h(J) \subset h(\Phi(E)),\ \Phi(E) \subset \tilde{m},\ E \subset \Phi^{-1}(\tilde{m}).$$

Итак, $h(\Phi^{-1}(J)) \subset h(E)$, $E \subset \Phi^{-1}(J)$, $\Phi(E) \subset J$.

Будем говорить, что семейство E элементов банаховой алгебры B удовлетворяет условию R_0, если оно является образом синтезируемого семейства элементов регулярной алгебры A при непрерывном гомоморфизме Φ: $A \to B$. Если к тому же $\Phi(A) \subset E''$, то по определению E удовлетворяет условию R.

Примером семейства со свойством R является всякое коммутативное семейство эрмитовых элементов: нужный гомоморфизм Φ алгебры $A = F_n/I(\Delta)$ строился ранее, а включение $\Phi(A) \subset E''$ следует из того, что координатные функции порождают A. В силу следствия 2 то же справедливо для любого разделяющего точки семейства достаточно гладких функций от коммутирующих эрмитовых элементов.

В частности, любой нормальный оператор в банаховом пространстве обладает свойством R, поскольку является результатом применения функции $f(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 + i\lambda_2$ к паре коммутирующих эрмитовых операторов. Другие примеры операторов со свойством R: операторы, удовлетворяющие условию «неквазианалитичности» $\int_R \| \exp itT \| (1 + t^2)^{-1} dt < \infty$ (в качестве A здесь берется весовая алгебра Фурье), операторы, порождающие ограниченные или медленно растущие группы, скалярные и квазискалярные операторы. Говоря нестрого, семейство операторов удовлетворяет условию R_0, если оно допускает достаточно богатое функциональное исчисление; для проверки включения $\Phi(A) \subset E''$ используется следствие 2.

Следующее утверждение — основной результат работы.

Теорема 3. *Пусть* $(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k)$ — *коммутативное семейство элементов банаховой алгебры* B и $F(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$ — *функция, аналитическая в окрестности множества* $\sigma(\vec{a}, \vec{b})$, *причем выполнено условие*

$$\sigma(\vec{a}, \vec{b}) \cap F^{-1}(0) \subset \{\vec{0}\} \times C^k. \tag{4}$$

Если семейство $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *удовлетворяет условию* R, *то* $\vec{a} \subset J_l(F(\vec{a}, \vec{b})) \cap J_r(F(\vec{a}, \vec{b}))$.

Доказательство. По условию $\vec{a} = \Phi(\vec{x})$, где $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — синтезируемое семейство элементов регулярной алгебры A; $\Phi: A \to B$ — непрерывный гомоморфизм, причем $\Phi(A) \subset (\vec{a})''$. Полагая $B_1 = (\vec{a}, \vec{b})'$, заметим, что Φ отображает A в центр алгебры B_1. Обозначим через J замкнутый идеал алгебры B_1, порожденный $F(\vec{a}, \vec{b})$; так как $J \subset J_l(F(\vec{a}, \vec{b})) \cap J_r(F(\vec{a}, \vec{b}))$, достаточно доказать, что $\vec{a} \subset J$. Если это неверно, то $\vec{x} \not\subset \Phi^{-1}(J)$, откуда в силу синтезируемости следует существование максимального идеала $m \in h(\Phi^{-1}(J))$, не содержащего $\vec{x}$. Пусть $\vec{\lambda} = \overrightarrow{x(m)} = (x_1(m), \ldots, x_n(m))$, тогда $\vec{\lambda} \neq 0$, $\vec{x} - \vec{\lambda} \cdot 1 \subset m$ и, следовательно, $\vec{a} - \vec{\lambda} \cdot 1 \subset \Phi(m)$. Применяя лемму 2 к алгебре B_1 и идеалам J, m, убеждаемся в том, что существует собственный левый идеал I, содержащий $\vec{a} - \vec{\lambda} \cdot 1$, $F(\vec{a}, \vec{b})$. Это означает, что набор $(\vec{\lambda}, 0)$ принадлежит спектру набора $(\vec{a}, F(\vec{a}, \vec{b}))$ в алгебре B_1. По теореме об отображении спектра найдется такой набор $\vec{\mu} \in C^k$, что $(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) \in \sigma(\vec{a}, \vec{b})$, $F(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) = 0$. Из (4) следует, что $\vec{\lambda} = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие 5. *Если* $(\vec{T}, \vec{S}) = (T_1, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_k)$ — *коммутативное семейство операторов, причем* $\vec{T}$ *удовлетворяет* *условию R то* $\operatorname{Ker}\vec{T} \supset \operatorname{Ker} F(\vec{T}, \vec{S})$ *для любой аналитической в окрестности* $\sigma(\vec{T}, \vec{S})$ *функции* F, *удовлетворяющей условию (4).*

Доказательство. Достаточно заметить, что операторы, ядра которых содержат $\operatorname{Ker}F(\vec{T}, \vec{S})$, образуют замкнутый левый идеал в алгебре всех операторов.

Замечания. 1) Пусть T — неквазианалитический оператор, S — коммутирующий с T оператор с вещественным спектром; полагая $F(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 + i\lambda_2$ и применяя теорему 3, получаем $\operatorname{Ker}(T + iS) \subset \operatorname{Ker} T$. Отсюда следует равенство $\operatorname{Ker}(T + iS) = \operatorname{Ker}T \cap \operatorname{Ker} S$, доказанное Е. А. Гориным [2].

2) Следствие 5 можно модифицировать, выбирая иные конструкции левых идеалов в $L(X)$. В частности, рассматривая идеалы $\{T \in L(X) : Tx_n \to 0\}$, где $\{x_n\}$ — фиксированная последовательность векторов, легко получать «аппроксимационные» варианты теоремы Фуглида — Патнэма — Розенблюма.

3) Условие $\Phi(A) \subset (\vec{a})''$ (входящее в R) теоремы 3 может быть ослаблено до $\Phi(A) \subset (\vec{a})'$, если в ограничениях на F заменить $\sigma(\vec{a}, \vec{b})$ спектром семейства $(\vec{a}, \vec{b})$ относительно наполненной подалгебры $B_0 \subset B$, порожденной $\Phi(A)$, $\vec{b}$ (либо еще более обширным множеством $\prod_{i=1}^{n} \sigma(a_i) \times \prod_{j=1}^{k} \sigma(b_j)$. Доказательство то же, но с заменой алгебры B_1 алгеброй B_0. Это используется при доказательстве следующего результата об эквивалентности линейных операторных уравнений.

Следствие 6. *Пусть семейства* $\{M_i\}_{i=1}^n$, $\{N_i\}_{i=1}^n$ *коммутирующих нормальных операторов обладают гладкостью порядка* $\alpha > \frac{1}{2}$ *и пусть* $\{P_j\}_{j=1}^k$, $\{Q_j\}_{j=1}^k$ — *коммутативные семейства операторов, перестановочные с* $\{M_i\}_{i=1}^n$, $\{N_i\}_{i=1}^n$ *соответственно. Если* $\{P_j\}_{j=1}^k$ *состоит из квазинильпотентных операторов, то линейное операторное уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} M_i X N_i + \sum_{j=1}^{k} P_j X Q_j = 0$$

в $L(H)$ *эквивалентно системе уравнений*

$$\sum_{j=1}^{n} M_j X N_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{k} P_j X Q_j = 0.$$

Доказательство. Оператор $X \mapsto \sum_{i=1}^{n} M_i X N_i$ в $L(H)$ обозначим через T, а оператор $X \mapsto \sum_{j=1}^{k} P_j X Q_j$ — через S. При доказательстве следствия 1 было установлено, что T — образ синтезируемого элемента регулярной алгебры $A = C(\Delta_1) \widehat{\otimes} C(\Delta_2)$ при непрерывном гомоморфизме ее в $L(L(H))$. Нетрудно видеть, что $\Phi(A) \subset \{S\}'$, и, так как функция $F(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 + \lambda_2$ на множестве $\sigma(T) \times \sigma(S) = \sigma(T) \times \{0\}$ удовлетворяет условию $F^{-1}(0) = \vec{0}$, учитывая замечание 3, получаем $\operatorname{Ker}(T+S) \subset \operatorname{Ker} T$, т. е. $\operatorname{Ker}(T+S) = \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Ker} S$. Следствие доказано.

С заменой односторонних идеалов двусторонними теорема 3 допускает обобщение на некоммутативные семейства элементов. Мы ограничимся рассмотрением двухэлементных наборов.

Пусть $a, b \in B$. Для любой функции $F(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\lambda) g_i(\mu)$, где f_i, g_i аналитичны в окрестностях $\sigma(a)$ и $\sigma(b)$, положим $F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a) g_i(b)$.

Теорема 4. *Если a удовлетворяет условию R_0 и $F(\lambda, \mu) \neq 0$ при $\lambda \in \sigma(a) \setminus \{0\}$, $\mu \in \sigma(b)$, то $a \in J(F(a, b))$.*

Доказательство. Пусть Φ: $A \to B$ — гомоморфизм регулярной алгебры, переводящий синтезируемый элемент $x \in A$ в a. Как и при доказательстве теоремы 3, достаточно установить, что $x \in m$ для любого $m \in h(\Phi)^{-1}(J))$, где $J = J(F(a, b))$. Пусть p: $B \to B/J$ — канонический гомоморфизм и $\Psi = p \circ \Phi$. Так как $\Phi^{-1}(J) = \operatorname{Ker} \psi$, в силу следствия 4 число $\lambda = \hat{x}(m)$ принадлежит $\sigma(\psi(x)) = \sigma(p(a))$. Если I — собственный правый идеал в B/J, содержащий $p(a) - \lambda \cdot 1$, то $F(\lambda \cdot 1, p(b)) = F(\lambda \cdot 1, p(b)) - F(p(a), p(b)) = \sum_{=1}^{n} (f_i(\lambda) \cdot 1 - f_i(p(a))) g_i(p(b)) \in I$ и, следовательно, $0 \in \sigma(F \times \times (\lambda 1, p(a)))$. По теореме об отображении спектра $0 = F(\lambda, \mu)$ для некоторого $\mu \in \sigma(p(b))$. Из условия (и очевидных включений $\sigma(p(a)) \subset \sigma(a)$, $\sigma(p(b)) \subset \sigma(b)$) следует, что $\lambda = 0$, т. е. $x \in m$. Теорема доказана.

Следствие 7. *Пусть $a \in B$, $b \in B$, $\sigma(a) \cap \sigma(b) \subset \{0\}$. Если a удовлетворяет условию R_0, то $J(a-b) = J(a) + J(b)$.*

Доказательство. Применяя теорему 4 к функции $F(\lambda, \mu) = \lambda - \mu$, получаем $a \in J(a-b)$, откуда $b \in J(a-b)$ и, следовательно, $\overline{J(a) + J(b)} \subset J(a-b)$. Обратное включение очевидно.

Отметим, что следствие 7 обобщает теорему Капланского о симметричности замкнутых двусторонних идеалов в C^*-алгебрах: если a, b — эрмитовы, то $J(a+ib) = \overline{J(a) + J(b)} = J(a-ib)$.

Следствие 8. *Если $a \in B$ удовлетворяет условию R_0, а $b \in B$ квазинильпотентен, то $J(a-b) = \overline{J(a) + J(b)}$.*

3. Сделаем несколько дополнительных замечаний.

Пусть A — регулярная алгебра с эрмитовой инволюцией. Будем говорить, что для A имеется аналог теоремы Фуглида, если при любом $a \in A$ уравнения $a\xi = \xi a$ и $a^*\xi = \xi a^*$ эквивалентны в любом унитальном A-бимодуле. Легко видеть, что класс таких алгебр довольно узок:

он не содержит групповых алгебр некомпактных групп и, более общим образом, алгебр, обладающих несимметричными идеалами (если I — несимметричный идеал, то положим $X = A/J$, $a(x+J) = ax+J$, $(x+J)a = a(m)x+J$, где m — фиксированный идеал из $h(J)$; имеем при $a \in J$, $a^* \notin J$: $a(1+J) = (1+J)a = 0$, $a^*(1+J) = a^*+J \neq 0$, $(1+J)a^* = \widehat{a}(m)\,(1+J) = 0$). Однако для алгебр, обладающих свойством SD, рассматриваемые уравнения эквивалентны, если a разделяет точки. Более того, для $A \in (SD)$ любые две системы уравнений вида $\{a_i\xi = \xi a_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$, где $\{a_i\}_{i=1}^n$ — разделяющее точки семейство, эквивалентны в любом A-бимодуле. Это утверждение, анонсированное в [5], доказывается аналогично следствию 2. Его частными случаями являются теорема об эквивалентности системы $T^2X = XT^2$, $T^3X = XT^3$ уравнению $TX = XT$ для нормальных T (см. [6]) и результаты [7].

Класс (SD) обладает важным характеристическим свойством восстановимости действия по совокупности спектральных подпространств.

Пусть X — модуль над регулярной полупростой алгеброй A. Для $A_1 \subset A$, $X_1 \subset X$ положим

$$\operatorname{ann} A_1 = \{\xi \in X : A_1\xi = \{0\}\},\ \operatorname{ann} X_1 = \{a \in A : aX_1 = \{0\}\}.$$

Каждому замкнутому подмножеству $\alpha \subset M_A$ сопоставим спектральное подпространство $X(\alpha) = \{\xi \in X : h(\operatorname{ann}\xi) \subset \alpha\}$. Нетрудно видеть, что $X(\alpha) = \operatorname{ann} J_\alpha^{(0)}$ и что $aX \subset X(\operatorname{supp}\widehat{a})$ для любого $a \in A$. Отсюда легко следует, что если X_1, X_2 — A-модули, то всякий гомоморфизм $T: X_1 \to X_2$ сохраняет спектральные подпространства.

Теорема 5. *Если $A \in (SD)$, то всякое линейное отображение A-модуля X_1 в A-модуль X_2, сохраняющее спектральные подпространства, является A-гомоморфизмом.*

Доказательство. Полагая $E_1 = \{a \otimes 1 - 1 \otimes a : a \in A\}$, $E_2 = \{a \otimes b : \operatorname{supp}\widehat{a} \cap \operatorname{supp}\widehat{b} = \varnothing\}$, имеем $h(E_1) = h(E_2) = D_A$, откуда ввиду синтезируемости D_A $I(E_1) = I(E_2)$. В пространстве $L(X_1, X_2)$ введем структуру $A\widehat{\otimes}A$-модуля, полагая $(a \otimes b)Y = L_a^{X_2} Y L_b^{X_1}$, где $L_a^{X_i}$ — операторы умножения на a в X_i. Ясно, что подпространство $Y_1 \subset L(X_1, X_2)$, состоящее из всех A-гомоморфизмов, совпадает с $\operatorname{ann} E_1$. Если Y_2 — совокупность всех отображений из $L(X_1, X_2)$, сохраняющих спектральные подпространства, то для любого $T \in Y_2$ и любых a, b из A

$$(a \otimes b)T(X_1) \subset aT(X_1(\operatorname{supp}\widehat{b})) \subset aX_2(\operatorname{supp}\widehat{b}) \subset X_2(\operatorname{supp}\widehat{a} \cap \operatorname{supp}\widehat{b}).$$

Откуда следует, что $Y_2 \subset \operatorname{ann} E_2 = \operatorname{ann} J(E_2) = \operatorname{ann} E_1 = Y_1$. Теорема доказана.

Применяя теорему 5 к тождественному отображению, заключаем, что структура A-модуля однозначно восстанавливается по совокупности спектральных подпространств. Покажем, что вне класса (SD) этот результат, а следовательно, и теорема 5 перестают быть справедливыми.

Рассмотрим аннулятор X идеала $J_{DA}^{(0)}$ в $(A \widehat{\otimes} A)^*$. Формулы $a\xi(F) = \xi((a \otimes 1)F)$, $\xi a(F) = \xi((1 \otimes a)F)$ определяют в X две структуры A-модуля; возникающие таким образом A-модули мы будем обозначать X_1 и X_2. Покажем, что $X_1(\alpha) = X_2(\alpha)$ для любого замкнутого $\alpha \subset M_A$. Для этого достаточно доказать, что $h(\mathrm{ann}_1 \xi) = h(\mathrm{ann}_2 \xi)$ при любом $\xi \in X$. Пусть $m \in M_A \setminus h(\mathrm{ann}_1 \xi)$. Это означает, что $\hat{a}(m) \neq 0$ для некоторого $a \in \mathrm{ann}_1 \xi$. Пусть b — такой элемент алгебры A, что $\hat{b}(m) \neq 0$ и $\mathrm{supp}\, \hat{b} \cap h(a) = \varnothing$. Докажем, что $\xi b = 0$. Пусть $I = \mathrm{ann}_1(\xi b)$. Ясно, что $a \in I$ (поскольку $a\xi = 0$) и $J^{(0)}_{\mathrm{supp}\, \hat{b}} \subset I$ (если $x \in J^{(0)}_{\mathrm{supp}\, \hat{b}}$, то $x \otimes b \in J^{(0)}_{DA}$ и потому $x\xi b(F) = \xi((x \otimes b)F) = 0$ для $F \in A \widehat{\otimes} A$). Поэтому $h(I) \subset h(a) \cap h(J^{(0)}_{\mathrm{supp}\, \hat{b}}) = h(a) \cap \mathrm{supp}\, b = \varnothing$. Это означает, что $I = A$, так, что $\xi b = 0$. Следовательно, $b \in \mathrm{ann}_2 \xi$, $m \notin h(\mathrm{ann}_2 \xi)$. Таким образом, $h(\mathrm{ann}_2 \xi) \subset h(\mathrm{ann}_1 \xi)$. Аналогично доказывается обратное включение. Мы доказали совпадение спектральных подпространств. Теперь заметим, что совпадение действий, т. е. равенство $a\xi = \xi a$ при $\xi \in X$, $a \in A$, имеет место в том и только том случае, когда все функционалы из X аннулируют элементы $a \otimes 1 - 1 \otimes a$. В силу соотношений двойственности это означает, что $a \otimes 1 - 1 \otimes a \in \overline{J^{(0)}_{DA}}$ для любого $a \in A$. Так как замкнутый идеал, порожденный элементами $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ в $A \widehat{\otimes} A$, совпадает с J_{DA} (см. доказательство теоремы 2), $\overline{J^{(0)}_{DA}} = J_{DA}$, т. е. совпадение действий эквивалентно синтезируемости диагонали.

Для групповых алгебр свойство восстановимости действия по спектральным подпространствам было доказано и с успехом использовано в работе [8].

Автор глубоко признателен Е. А. Горину и А. С. Файнштейну за полезные обсуждения рассмотренных в работе вопросов.

Список литературы: 1. *Rosenblum M.* On a theorem of Fuglede and Putnam // J London Math. Soc. 33. 1958. P. 376—377. 2. *Горин Е. А.* О подпространствах банаховой алгебры, выделяемых аналитически // XI Всесоюз. шк. по теории операторов. Ч. II. Челябинск, 1986. С. 36.3. *Boyadziev K.* Commuting C_0-groups and the Fuglede—Putnam theorem // Stud. Math. 1985. **81**, N 3. P. 303—306. 5. *Шульман В. С.* Линейные операторные уравнения с нормальными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1983. **270**, № 5. С. 726—729. 6. *Kittaneh F.* On the commutants modulo C_p of A^2 and A^3 // J. Australian Math. Soc. 1986. A-41, N 1. P. 47—50. 7. *Du Hongke* On normal operators and its adjoints // Шусюэ цзиньчжан. Adv. Math. 1987. **16**, N 1. P. 67—71. 8. *Arveson W.* On groups of automorphisms of operator algebras // I. Funct. Anal. 1974. **15**, N 2. P. 217—243.

Поступила в редколлегию 04.11.87