УДК 517.535

М. Н. ШЕРЕМЕТА

ДВУЧЛЕННАЯ АСИМПТОТИКА ЦЕЛЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

1°. Введение. Для целой функции

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z=re^{i\varphi}, \tag{1}$$

пусть $M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$, а $n_f(r)$ — количество нулей в $\{z:|z|\leqslant r\}$. Из более общих теорем теории целых функций вполне регулярного роста можно для функций (1) с нулями на одном луче получить условия на $n_f(r)$, при выполнении которых $\ln M_f(r)=(1+o(1))\Delta r^{\rho}(r\to+\infty)$, $\rho\in]0,+\infty[$, $\Delta\in]0,+\infty[$. Э. Линделеф показал [1], что это соотношение выполняется тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ неравенство $\ln|a_n|\leqslant-\frac{n}{\rho}\ln\frac{n}{e\rho(\Delta+\varepsilon)}$ $(n\geqslant n_0(\varepsilon))$ и существует последовательность (n_k) такая, что $n_k\uparrow+\infty$ $(k\to\infty)$ $n_{k+1}/n_k\to1$ $(k\to\infty)$ и $\ln|a_n|\geqslant-\frac{n}{\rho}\ln\frac{n}{e\rho(\Delta-\varepsilon)}$ при $n=n_k$.

Связь между ростом функции (1) с нулями на одном луче и ростом $n_f(r)$ в терминах двучленной асимптотики изучалась в работах различных авторов. Основной вклад в решение этой проблемы сделал В. Н. Логвиненко [2, 3]. Связь же роста $\ln M_f(r)$ с убыванием коэффициентов a_n в терминах двучленной асимптотики не изучена. Этому вопросу посвящена настоящая работа. Из более общей доказанной для целых рядов Дирихле теоремы 6 вытекает следующий аналог теоремы Линделефа: для того чтобы $\ln M_f(r) = \Delta r^{\rho} + (1 + o(1))\Delta_1 r^{\rho_1}$, $0 < \rho_1 < \rho < +\infty$, $0 < \Delta < +\infty$, $\Delta_1 \in \boldsymbol{R}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство $\ln|a_n| \leqslant -\frac{n}{\rho} \times$ $\times \ln\frac{n}{e\rho\Delta} + (\Delta_1 + \varepsilon)\left(\frac{n}{\rho\Delta}\right)^{\rho_1/\rho}$ $(n \geqslant n_0(\varepsilon))$ и существовала возрастающая последовательность (n_k) натуральных чисел такая, что $\ln|a_n| \geqslant$ $\geqslant -\frac{n}{\rho}\ln\frac{n}{e\rho\Delta} + (\Delta_1 - \varepsilon)\left(\frac{n}{\rho\Delta}\right)^{\rho_1/\rho}$ при $n = n_k$ и $n_{k+1} - n_k = o(n_k^{(\rho+\rho_1)/2\rho}) \times$ $\times (k \to \infty)$.

2°. Связь между ростом максимума модуля, максимального члена и убыванием коэффициентов целого ряда Дирихле. Целым рядом Дирихле называется абсолютно сходящийся в $\boldsymbol{C}$ ряд

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n),\ s = \sigma + it, \tag{2}$$

где $0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to \infty)$. Положим $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \boldsymbol{R}\}$, и пусть $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n) : n \in \boldsymbol{N}\}$ — максимальный член, а $\nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n|\exp(\sigma\lambda_n) = \mu(\sigma, F)\}$ — центральный индекс ряда (2). Через $n(t)$ обозначим считающую функцию последовательности (λ_n). Зависимость между ростом величины $M(\sigma, F)$ и убыванием коэффициентов a_n обычно характеризуется в терминах R-порядка ρ_R и R-типа T_R, определенных равенствами

$$\rho_R = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\sigma}\ln\ln M(\sigma, F),\ T_R = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} e^{-\sigma\rho_R}\ln M(\sigma, F).$$

Важную роль при доказательстве формул для нахождения R-порядка и R-типа через коэффициенты играют неравенство Коши $\mu(\sigma, F) \leqslant$ $\leqslant M(\sigma, F)$ и оценки сверху $M(\sigma, F)$ через $\mu(\sigma, F)$. Так как мы будем изучать двучленную асимптотику, нам будут нужны более гибкие оценки $M(\sigma, F)$ через $\mu(\sigma, F)$, чем ранее известные.

Теорема 1. *Если*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \ln n(t)/\ln t = h < +\infty, \tag{3}$$

то для любого $\varepsilon > 0$ *при* $\sigma \geqslant \sigma_0(\varepsilon)$ *имеет место неравенство*

$$\ln M(\sigma, F) \leqslant \ln\mu(\sigma, F) + (h + \varepsilon)\ln\left\{\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\mu(\sigma + 2\varepsilon, F)}{\mu(\sigma + \varepsilon, F)}\right\}. \tag{4}$$

Доказательство. При $\lambda_n > 2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon, F)}$ имеем

$$|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) = |a_n| \exp\{(\sigma+\varepsilon)\lambda_n\} \exp\{-\varepsilon\lambda_n\} \leqslant$$
$$\leqslant \mu(\sigma+\varepsilon, F) \exp\{-\varepsilon\lambda_n\} = |a_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)}| \exp\{(\sigma+\varepsilon)\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)}\} \exp\{-\varepsilon\lambda_n\} =$$
$$= |a_{\nu(\sigma+\varepsilon)F)}| \exp\{\sigma\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)}\} \exp\{\varepsilon(\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)} - \lambda_n)\} \leqslant$$
$$\leqslant \mu(\sigma, F) \exp\left\{\varepsilon\left(\frac{1}{2}\lambda_n - \lambda_n\right)\right\} = \mu(\sigma, F) \exp\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon\lambda_n\right\}.$$

Поэтому

$$M(\sigma, F) \leqslant \Big(\sum_{\lambda_n \leqslant 2\lambda\nu(\sigma+\varepsilon,F)} + \sum_{\lambda_n > 2\lambda\nu(\sigma+\varepsilon,F)}\Big) |a_n| \exp(\sigma\lambda_n) \leqslant$$
$$\leqslant \mu(\sigma, F)\, n(2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)}) + \mu(\sigma, F) \sum_{\lambda_n > 2\lambda\nu(\sigma+\varepsilon,F)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon\lambda_n\right\}. \quad (5)$$

Из (3) вытекает, что $\ln n(t) \leqslant \left(h + \frac{1}{2}\varepsilon\right) \ln t$ для всех достаточно больших t. Поэтому для всех достаточно больших σ имеем

$$\sum_{\lambda_n > 2\lambda\nu(\sigma+\varepsilon,F)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon\lambda_n\right\} \leqslant \int_{2\lambda\nu(\sigma+\varepsilon,F)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon t\right\} dn(t) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \int_{2\lambda\nu(\sigma+\varepsilon,F)}^{\infty} n(t) \exp\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon t\right\} dt \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \int_{2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{3} t\right\} dt =$$
$$= \frac{3}{2} \exp\left\{-\frac{2}{3}\varepsilon\lambda\nu(\sigma+\varepsilon, F)\right\} \to 0 \ (\sigma \to +\infty).$$

Таким образом, из (5) получаем

$$\ln M(\sigma, F) \leqslant \ln \mu(\sigma, F) + \ln n(2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)}) + o(1) \leqslant$$
$$\leqslant \ln \mu(\sigma, F) + (h+\varepsilon) \ln \lambda\nu(\sigma+\varepsilon, F) \quad (\sigma \geqslant \sigma_0(\varepsilon)) \quad (6)$$

Так как

$$\ln \mu(\sigma+2\varepsilon, F) - \ln \mu(\sigma+\varepsilon, F) = \int_{\sigma+\varepsilon}^{\sigma+2\varepsilon} \lambda_{\nu(t,F)}\, dt \geqslant \varepsilon\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)}),$$

из (6) легко получаем (4). Теорема 1 доказана.

Обозначим через Ω класс положительных на $]-\infty, +\infty[$ функций Φ таких, что производная Φ' непрерывна на $]-\infty, +\infty[$ и возрастает к $+\infty$. Функция $\Psi(x) = x - \Phi(x)/\Phi'(x)$ называется (см., например, [4]) ассоциированной с Φ функцией Ньютона. Покажем, что если $\Phi \in \Omega$, то Ψ — возрастающая к $+\infty$ функция. Действительно, для любых $x \in \boldsymbol{R}$ и $\delta > 0$ имеем

$$\Phi'(x)\Phi(x+\delta) - \Phi'(x+\delta)\Phi(x) = (\Phi'(x) - \Phi'(x+\delta))\Phi(x) +$$
$$+ \Phi'(x)(\Phi(x+\delta) - \Phi(x)) < \Phi'(x) \int_x^{x+\delta} \Phi'(t)\, dt < \delta\Phi'(x)\Phi'(x+\delta),$$

т. е. $\Phi(x+\delta)/\Phi'(x+\delta)-\Phi(x)/\Phi'(x)<\delta=x+\delta-x$ и, значит, $\Psi(x)<\Psi(x+\delta)$. Таким образом, Ψ — возрастающая функция. Если бы она была ограничена числом M, то при $x\geqslant M+1$ выполнялось бы неравенство $\Phi'(x)/\Phi(x)\leqslant 1/(x-M)$, т. е. $\Phi(x)\leqslant(x-M)\,\Phi(M+1)$, что невозможно, так как из условия $\Phi'(x)\uparrow+\infty\,(x\to\infty)$ вытекает, что $\frac{1}{x}\Phi(x)\to+\infty\,(x\to+\infty)$. В дальнейшем через φ будем обозначать функцию, обратную к Φ'.

Теорема 2. *Пусть* $\Phi\in\Omega$. *Для того чтобы* $\ln\mu(\sigma,\ F)\leqslant\Phi(\sigma)$ *для всех* $\sigma>\sigma_0$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\ln|a_n|\leqslant$ $\leqslant-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ *для всех* $n>n_0$.

Доказательство. Не уменьшая общности, можем считать, что $\sigma_0=-\infty$. Если $\ln\mu(\sigma,\ F)\leqslant\Phi(\sigma)$ для всех $\sigma\in\boldsymbol{R}$, то $\ln|a_n|\leqslant$ $\leqslant\ln\mu(\sigma,\ F)-\sigma\lambda_n\leqslant\Phi(\sigma)-\sigma\lambda_n$ для всех $\sigma\in\boldsymbol{R}$ и $n\in\boldsymbol{N}$. Взяв $\sigma=$ $=\varphi(\lambda_n)$, получим

$$\ln|a_n|\leqslant\Phi(\varphi(\lambda_n))-\lambda_n\varphi(\lambda_n)=-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))\quad(n\in\boldsymbol{N}).$$

Наоборот, если $\ln|a_n|\leqslant-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всех $n\in\boldsymbol{N}$, то

$$\begin{aligned}\ln\mu(\sigma,\ F)&\leqslant\max\{-t\Psi(\varphi(t))+\sigma t:t\geqslant 0\}=\\&=\max\{-\Phi'(x)\Psi(x)+\sigma\Phi'(x):x\geqslant\varphi(0)\}\leqslant\\&\leqslant\max\{(\sigma-x)\Phi'(x)+\Phi(x):x\in\boldsymbol{R}\}=\Phi(\sigma),\end{aligned}$$

так как в силу условия $\Phi'(x)\uparrow+\infty\,(x\to+\infty)$ для любых $x\in\boldsymbol{R}$ и $\sigma\in\boldsymbol{R}$ выполняется неравенство $\Phi(\sigma)-\Phi(x)=\int\limits_x^\sigma\Phi'(t)\,dt\geqslant(\sigma-x)\Phi'(x)$. Теорема 2 доказана.

Обозначим

$$\varkappa_n=(\ln|a_{n-1}|-\ln|a_n|)/(\lambda_n-\lambda_{n-1}).$$

Теорема 3. *Пусть* $\Phi\in\Omega$, *а* $j\in\boldsymbol{N}$ — *фиксированное число. Если* $\varkappa_n\uparrow+\infty\,(n\to\infty)$ *и* $\ln|a_j|\leqslant-\lambda_j\Psi(\varphi(\lambda_j))$, *то* $\ln\mu(\varkappa_j,\ F)\leqslant\Phi(\varkappa_j)$.

Доказательство. Известно, что если $\varkappa_n\uparrow+\infty\,(n\to\infty)$, то $\mu(\sigma,\ F)=|a_n|\exp(\sigma\lambda_n)$ при $\varkappa_{n-1}\leqslant\sigma\leqslant\varkappa_n$. Поэтому при $n=j$, как при доказательстве теоремы 2, имеем

$$\begin{aligned}\ln\mu(\varkappa_j,\ F)=\ln|a_j|+\lambda_j\varkappa_j\leqslant-\lambda_j\Psi(\varphi(\lambda_j))+\lambda_j\varkappa_j\leqslant\\\leqslant\max\{-t\Psi(\varphi(t))+t\varkappa_j:t\geqslant 0\}\leqslant\Phi(\varkappa_j),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

3⁰. Тип и нижний тип второго члена асимптотики. Предположим, что $0<\rho_R<+\infty$, $0<T_R<+\infty$, а $0<\rho<\rho_R$. Положим

$$\Phi(\sigma,\ \tau)=T_R\exp(\rho_R\sigma)+\tau\exp(\rho\sigma).$$

Величину

$$\tau^*=\inf\{\tau:(\forall\sigma\geqslant\sigma_0(\tau))\,\{\ln M(\sigma,\ F)\leqslant\Phi(\sigma;\ \tau)\}\}$$

назовем типом, а

$$\tau_*=\sup\{\tau:(\forall\sigma\geqslant\sigma_0(\tau))\,\{\ln M(\sigma,\ F)\geqslant\Phi(\sigma;\ \tau)\}\}$$

— нижним типом второго члена асимптотики целого ряда Дирихле (2). Положим

$$V(x;\ t)=-\frac{x}{\rho_R}\ln\frac{x}{e\rho_R T_R}+t\left(\frac{x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R}(x>0),$$
$$t^*=\inf\{t:(\forall n\geqslant n_0(t))\{\ln|a_n|\leqslant V(\lambda_n;\ t)\}\}$$

и

$$t_*=\sup\{t:(\forall n\geqslant n_0(t))\{\ln|a_n|\geqslant V(\lambda_n;\ t)\}\}.$$

Теорема 4. *Если показатели ряда* (2) *удовлетворяют условию* (3), *то* $\tau^*=t^*$.

Доказательство. Пусть $\tau^*<+\infty$, а $\tau>\tau^*$ — произвольное число. Тогда $\ln\mu(\sigma,\ F)\leqslant\ln M(\sigma,\ F)\leqslant\Phi(\sigma;\ \tau)$ при $\sigma\geqslant\sigma_0(\tau)$ и по теореме 2 $\ln|a_n|\leqslant-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ при $n\geqslant n_0$, где Ψ — ассоциированная с $\Phi(\sigma;\ \tau)$ функция Ньютона, а φ — функция, обратная к функции $\Phi'(\sigma;\ \tau)=\rho_R T_R\exp(\rho_R\sigma)+\rho\tau\exp(\rho\sigma)$. Легко видеть, что

$$\Psi(\sigma)=\sigma-\frac{1}{\rho_R}-\tau\left(1-\frac{\rho}{\rho_R}\right)\frac{1}{\rho_R T_R\exp\{\sigma(\rho_R-\rho)\}+\tau\rho}=$$
$$=\sigma-\frac{1}{\rho_R}-(1+o(1))\frac{\tau}{\rho_R T_R}\left(1-\frac{\rho}{\rho_R}\right)\exp\{-\sigma(\rho_R-\rho)\}\ \ (\sigma\to+\infty).\tag{7}$$

Асимптотику функции φ находим, исходя из уравнения $\rho_R T_R\exp(\rho_R\sigma)+$ $+\rho\tau\exp(\rho\sigma)=x$, решение которого ищем в виде $\sigma=\frac{1}{\rho_R}\ln\frac{x-y}{\rho_R T_R}$, где, очевидно, $y=y(x)=o(x)\ (x\to+\infty)$. Более того, подставляя это значение σ в уравнение, получаем

$$y=\tau\rho\exp\left\{\frac{\rho}{\rho_R}\ln\frac{x-y}{\rho_R T_R}\right\}=(1+o(1))\,\tau\rho\left(\frac{x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R}(x\to+\infty).$$

Таким образом,

$$\varphi(x)=\frac{1}{\rho_R}\ln\frac{x}{\rho_D T_R}+\frac{1}{\rho_R}\ln\left(1-\frac{y(x)}{x}\right)=$$
$$=\frac{1}{\rho_R}\ln\frac{x}{\rho_R T_R}-(1+o(1)\frac{\tau\rho}{x\rho_R}\left(\frac{x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R}(x\to+\infty).\tag{8}$$

Из (7) и (8) вытекает

$$\Psi(\varphi(x))=\frac{1}{\rho_R}\ln\frac{x}{e\rho_R T_R}-(1+o(1))\frac{\tau}{x}\left(\frac{x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R}\ (x\to+\infty).\tag{9}$$

Если теперь $t>\tau$, то из (9) следует, что для всех $n\geqslant n_1\geqslant n_0$ имеет место неравенство $\ln|a_n|\leqslant-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))\leqslant V(\lambda_n;\ t)$. Отсюда следует, что $t^*\leqslant t$, и в силу произвольности t и τ получаем неравенство $t^*\leqslant\tau^*$, которое очевидно, если $\tau^*=+\infty$.

Доказательство противоположного неравенства проведем от противного. Допустим, что $t^*<\tau^*$. Выберем числа t и τ так, чтобы $t^*<t<\tau<\tau^*$. Тогда при $n\geqslant n_0$ выполняется неравенство $\ln|a_n|\leqslant$ $\leqslant V(\lambda_n;\ t)$. Как и выше, возьмем $\Phi(\sigma)=\Phi(\sigma;\ \tau)$. Тогда в силу

(9) имеем $-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n)) \geqslant V(\lambda_n;\ t)$, т. е. $\ln|a_n| \leqslant -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всех достаточно больших n. Поэтому по теореме 2 $\ln\mu(\sigma,\ F) \leqslant \Phi(\sigma;\ \tau)$, $\tau < \tau^*$ для всех достаточно больших σ. Используя неравенство (4) с $\varepsilon = 1$, получаем, что $\ln M(\sigma,\ F) \leqslant \ln\mu(\sigma,\ F) + O(\ln\ln\mu(\sigma+2)) \leqslant \Phi(\sigma,\ \tau) + O(\sigma)\ (\sigma \to +\infty)$. Отсюда легко вытекает, что $\tau^* \leqslant \tau$, что невозможно. Теорема 4 полностью доказана.

Теорема 5. *Пусть выполнено условие* (3), $\varkappa_n \uparrow +\infty\ (n\to\infty)$ *и* $\lambda_{n+1} - \lambda_n = o(\lambda_n^{\alpha})\ (n \to \infty)$, $\alpha = (\rho + \rho_R)/2\rho_R$. *Тогда* $\tau_* = t_*$.

Доказательство. Пусть $t_* < +\infty$. Тогда для любого $t > t_*$ существует возрастающая последовательность (n_j) натуральных чисел такая, что $\ln|a_{n_j}| \leqslant V(\lambda_{n_j};\ t)$. Взяв $\tau > t$ и $\Phi(\sigma) = \Phi(\sigma;\ \tau)$, как выше, получим $\ln|a_{n_j}| \leqslant V(\lambda_{n_j};\ t) \leqslant -\lambda_{n_j}\Psi(\varphi(\lambda_{n_j}))$, и по теореме 3 с $\sigma_j = \varkappa_{n_j}$ имеем $\ln\mu(\sigma_j,\ F) \leqslant \Phi(\sigma_j;\ \tau)$. Отсюда, используя неравенство (4) с $\varepsilon = 1$, как при доказательстве теоремы 4, получаем, что $\ln M \times (\sigma_j,\ F) \leqslant T_R \exp(\rho_R\sigma_j) + (1 + o(1))\tau\exp(\rho\sigma_j)\ (j \to \infty)$. Таким образом, $\tau_* \leqslant \tau$ и в силу произвольности t и τ приходим к неравенству $\tau_* \leqslant t_*$, которое очевидно, если $t_* = +\infty$.

Пусть теперь $t_* > -\infty$. Тогда для любого $t < t_*$ при $n \geqslant n_0$ имеем $\ln|a_n| \geqslant V(\lambda_n;\ t)$. Взяв $\tau < t$ и $\Phi(\sigma) = \Phi(\sigma;\ \tau)$, в силу (9), как при доказательстве теоремы 4, получим, что $\ln|a_n| \geqslant V(\lambda_n;\ t) \geqslant -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всех достаточно больших n.

Пусть $\varphi(\lambda_n) \leqslant \sigma \leqslant \varphi(\lambda_{n+1})$. Тогда $\sigma = \varphi(\lambda_n + x)$, где $0 \leqslant x \leqslant \lambda_{n+1} - \lambda_n = o(\lambda_n^{\alpha})\ (n\to\infty)$. Ясно, что $\lambda_n = \Phi'(\sigma) - x$ и $x = o(\lambda_n) = o(\Phi'(\sigma))\ (n \to \infty)$. Поэтому для указанных значений σ в силу (8) и (9) имеем

$$\begin{aligned}
&\ln\mu(\sigma,\ F) \geqslant \ln|a_n| + \lambda_n\varphi(\lambda_n + x) \geqslant -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n)) + \lambda_n\varphi(\lambda_n + x) = \\
&\quad = -\frac{\lambda_n}{\rho_R}\ln\frac{\lambda_n}{e\rho_R T_R} + (1+o(1))\tau\left(\frac{\lambda_n}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} + \frac{\lambda_n}{\rho_R}\ln\frac{\lambda_n + x}{\rho_R T_R} - \\
&\quad - (1+o(1))\frac{\tau\rho}{\sigma_R}\left(\frac{\lambda_n + x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = \frac{\lambda_n}{\rho_R}\left\{1 + \ln\left(1 + \frac{x}{\lambda_n}\right)\right\} + \\
&\quad + (1+o(1))\tau\left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right)\left(\frac{\lambda_n + x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = \frac{\lambda_n}{\rho_R} + \\
&\quad + \frac{\lambda_n}{\rho_R}\left\{\frac{x}{\lambda_n} - (1+o(1))\frac{x^2}{2\lambda_n^2}\right\} + (1+o(1))\tau\left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right)\left(\frac{\lambda_n + x}{\lambda_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = \\
&\quad = \frac{\lambda_n + x}{\rho_R} - (1+o(1))\frac{x^2}{2\rho_R\lambda_n} + (1+o(1))\tau\left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right)\left(\frac{\lambda_n + x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = \\
&\quad = \frac{\Phi'(\sigma)}{\rho_R} + o(\lambda_n^{\rho/\rho_R}) + (1+o(1))\tau\left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right)\left(\frac{\Phi'(\sigma)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = \\
&\quad = \frac{\Phi'(\sigma)}{\rho_R} + (1+o(1))\tau\left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right)\left(\frac{\Phi'(\sigma)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = \\
&\quad = T_R\exp(\sigma\rho_R) + (1+o(1))\tau\exp(\sigma\rho)\ \ (\sigma \to +\infty).
\end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенство Коши, легко получаем, что $\tau_* \geqslant \tau$, а в силу произвольности τ и t приходим к неравенству $\tau_* \geqslant t_*$, которое очевидно, если $t_* = -\infty$. Таким образом, $\tau_* = t_*$.

4°. Целые ряды Дирихле с регулярной двучленной асимптотикой. Из теорем 4 и 5 вытекает, что *при выполнении условий теоремы 5, для того чтобы*

$$\ln M(\sigma,\ F)=T_R\exp(\rho_R\sigma)+(1+o(1))\,T\exp(\rho\sigma)\,(\sigma\to+\infty),\quad T\in\boldsymbol{R},\quad (10)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\ln|a_n|=-\frac{\lambda_n}{\rho_R}\ln\frac{\lambda_n}{e\rho_R T_R}+(1+o(1))\,T\left(\frac{\lambda_n}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R}(n\to\infty).$$

Если выполнено соотношение (10), то будем говорить, что ряд (2) имеет регулярную двучленную асимптотику. Следующий критерий регулярности двучленной асимптотики уточняет теорему Линделефа.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие* (3). *Для того чтобы целый ряд Дирихле имел регулярную двучленную асимптотику, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *выполнялось неравенство* $\ln|a_n|\leqslant V(\lambda_n;\ T+\varepsilon)\,(n\geqslant n_0(\varepsilon))$ *и существовала возрастающая последовательность* (n_k) *натуральных чисел такая, что* $\ln|a_{n_k}|\geqslant V(\lambda_{n_k};\ T-\varepsilon)\,(k\in\boldsymbol{N})$ *и* $\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o(\lambda_{n_k}^{\alpha})\,(k\to\infty)$.

Доказательство. Пусть имеет место соотношение (10). Тогда по теореме 4 $t^*=\tau^*=T$ и, значит, $\ln|a_n|\leqslant V(\lambda_n;\ T+\varepsilon)$ $(n\geqslant n_0(\varepsilon))$.

Доказательство существования последовательности (n_k) проведем от противного. Допустим, что существуют числа $\eta>0$ и $\delta>0$ такие, что $\ln|a_n|\leqslant V(\lambda_n;\ T-\eta)$ на бесконечном множестве интервалов вида $n'_\nu<n<n''_\nu$ таких, что $\lambda_{n''_\nu}-\lambda_{n'_\nu}>\delta\lambda_{n'_\nu}^{\alpha}$. В то же время $\ln|a_n|\leqslant V(\lambda_n;\ T+\varepsilon)$ для всех $n\geqslant n_0(\varepsilon)$. Поэтому при больших ν имеем

$$M(\sigma,\ F)\leqslant\sum_{n<n_0(\varepsilon)}|a_n|\exp(\sigma\lambda_n)+\sum_{n'_\nu<n<n''_\nu}\exp\{V(\lambda_n;\ T-\eta)+\sigma\lambda_n\}+$$
$$+\Big(\sum_{n_0(\varepsilon)\leqslant n\leqslant n'_\nu}+\sum_{n\geqslant n''_\nu}\Big)\exp\{V(\lambda_n;\ T+\varepsilon)+\sigma\lambda_n\}.\qquad(11)$$

Ясно, что

$$\sum_{n<n_0(\varepsilon)}|a_n|\exp(\sigma\lambda_n)=\exp\{O(\sigma)\}\,(\sigma\to+\infty).\qquad(12)$$

Вторая сумма в правой части (11) оценивается рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\exp\{V(\lambda_n;\ T-\eta)+\sigma\lambda_n\}$. Оценивая, как обычно, его максимальный член и используя неравенство (4), для любого $\varepsilon>0$ при $\sigma\geqslant\sigma_0(\varepsilon)$ получаем, что логарифм суммы этого ряда не превышает $\Phi(\sigma;\ T-\eta+\varepsilon)$. Таким образом,

$$\sum_{n'_\nu<n<n''_\nu}\exp\{V(\lambda_n;\ T-\eta)+\sigma\lambda_n\}\leqslant\exp\{\Phi(\delta;\ T-\eta+\varepsilon)\}\qquad(13)$$

Обозначим

$$B(x;\ \sigma)=V(x;\ T+\varepsilon)+\sigma x=-\frac{x}{\rho_R}\ln\frac{x}{e\rho_R T_R}+(T+\varepsilon)\left(\frac{x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R}+\sigma x.$$

Тогда

$$B'(x;\ \sigma) = -\frac{1}{\rho_R}\ln\frac{x}{\rho_R T_R} + \frac{\rho(T+\varepsilon)}{x\rho_R}\left(\frac{x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} + \sigma$$

и $B''(x;\ \sigma) < 0$. Отсюда следует, что $B(x;\ \sigma)$ — вогнутая функция имеет единственную точку максимума $x(\sigma)$, на $[a, x(\sigma)]$ она возрастает а на $[x(\sigma),\ +\infty[$ убывает. Ясно, что

$$\frac{1}{\rho_R}\ln\frac{x(\sigma)}{\rho_R T_R} - \frac{\rho(T+\varepsilon)}{x\rho_R}\left(\frac{x(\sigma)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} \equiv \sigma. \tag{14}$$

Левая часть (14) с точностью до множителя $(1 + o(1))$ во втором члене асимптотики такая, как правая часть (8). Поэтому легко видеть, что проделав операцию, обратную к нахождению функции φ, из (14) получим соотношение

$$x(\sigma) = \rho_R T_R \exp(\sigma\rho_R) + (1 + o(1))\,\rho(T+\varepsilon)\exp(\sigma\rho)\quad (\sigma\to+\infty). \tag{15}$$

Положим, для краткости, $l_1 = \lambda_{n_\nu}$, $l_2 = \lambda_{n''_\nu}$ и выберем $\sigma = \sigma_\nu$ так, чтобы $x(\sigma_\nu) = l_1 + \frac{1}{2}\delta l_1^\alpha$. Тогда $l_1 < x(\sigma_\nu) < l_1 + \delta l_1^\alpha \leqslant l_2$. Из изложенного выше вытекает, что для экспоненциального многочлена $F_1(\sigma_\nu) = \sum\limits_{n=n_0(\varepsilon)}^{n'_\nu} \exp\{V(\lambda_n;\ T+\varepsilon) + \sigma_\nu\lambda_n\}$ максимальным членом будет $\mu(\sigma_\nu, F_1) = \exp\{V(\lambda_{n'_\nu},\ T+\varepsilon) + \sigma_\nu\lambda_{n_\nu}\}$, для которого в силу (14), (15) имеем

$$\ln\mu(\sigma_\nu,\ F_1) = -\frac{l_1}{\rho_R}\ln\frac{l_1}{e\rho_R T_R} + (T+\varepsilon)\left(\frac{l_1}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} +$$

$$+\frac{l_1}{\rho_R}\ln\frac{l_1 + \frac{1}{2}\delta l_1^\alpha}{\rho_R T_R} - \frac{\rho(T+\varepsilon)\,l_1}{\rho_R\left(l_1 + \frac{1}{2}\delta l_1^\alpha\right)}\left(\frac{l_1 + \frac{\delta}{2}l_1^\alpha}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} =$$

$$= \frac{l_1}{\rho_R}\left\{1 + \ln\left(1 + \frac{\delta}{2}l_1^{\alpha-1}\right)\right\} + (1+o(1))(T+\varepsilon)\left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right)\left(\frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} =$$

$$= \frac{l_1 + \frac{1}{2}\delta l_1^\alpha}{\rho_R} - (1+o(1))\frac{\delta^2}{4\rho_R}l_1^{\rho/\rho_R} + (1+o(1))(T+\varepsilon)\left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = \frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R} + (1+o(1))\left\{T+\varepsilon)\left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{\delta^2}{4\rho_R}(T_R\rho_R)^{\rho/\rho_R}\right\}\left(\frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = T_R\exp(\rho_R\sigma_\nu) +$$

$$+ (1+o(1))\left\{T + \varepsilon - \frac{\delta^2}{4\rho_R}(T_R\rho_R)^{\rho/\rho_R}\right\}\exp(\sigma_\nu\rho) =$$

$$= \Phi\left(\sigma_\nu;\ (1+o(1))\left\{T + \varepsilon - \frac{\delta^2}{4\rho_R}(T_R\rho_R)^{\rho/\rho_R}\right\}\right)\ (\sigma_\nu\to\infty).$$

Отсюда, как при доказательстве (4), получаем неравенство

$$\sum_{n_0 < n \leqslant n'_\nu} \exp\{V(\lambda_n;\ T+\varepsilon) + \sigma_\nu \lambda_n\} \leqslant \exp\left\{\Phi\left(\sigma_\nu;\ T - \frac{\delta^2}{4\rho_R}(T_R\rho_R)^{\rho/\rho_R} + 2\varepsilon\right)\right\} \tag{16}$$

для всех достаточно больших ν. Аналогично для ряда Дирихле $F_2(\sigma_\nu) = \sum_{n=n''_\nu}^{\infty} \exp\{V(\lambda_n;\ T+\varepsilon) + \sigma\lambda_n\}$ максимальным будет член $\mu(\sigma_\nu,\ F_2) = \exp\{V(\lambda_{n''_\nu};\ T+\varepsilon) + \sigma_\nu \lambda_{n''_\nu}\}$, для которого в силу (14) и (15) имеем

$$\ln\mu(\sigma_\nu,\ F_2) \leqslant V(l_1 + \delta l_1^\alpha;\ T+\varepsilon) + \sigma_\nu(l_1 + \delta l_1^\alpha) =$$

$$= -\frac{l_1+\delta l_1^\alpha}{\rho_R}\ln\frac{l_1+\delta l_1^\alpha}{e\rho_R T_R} + (T+\varepsilon)\left(\frac{l_1+\delta l_1^\alpha}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} +$$

$$+ \frac{l_1+\delta l_1^\alpha}{\rho_R}\ln\frac{l_1+\frac{1}{2}\delta l_1^\alpha}{\rho_R T_R} - \frac{\rho(T+\varepsilon)}{\rho_R}\,\frac{l_1+\delta l_1^\alpha}{l_1+\frac{1}{2}\delta l_1^\alpha}\left(\frac{l_1+\frac{1}{2}\delta l_1^\alpha}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} =$$

$$= \frac{l_1+\delta l_1^\alpha}{\rho_R}\left\{1 + \ln\left(1 - \frac{\delta l_1^\alpha}{2(l_1+\delta l_1^\alpha)}\right)\right\} + (1+o(1))(T+\varepsilon)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\rho}{\rho_R}\right)\left(\frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = \frac{l_1+\delta l_1^\alpha}{\rho_R}\left\{1 - \frac{\delta l_1^\alpha}{2(l_1+\delta l_1^\alpha)} -\right.$$

$$\left.-(1+o(1))\frac{\delta^2}{8}\frac{l_1^{2\alpha}}{(l_1+\delta l_1^\alpha)^2}\right\} + (1+o(1))(T+\varepsilon)\left(1-\frac{\rho}{\rho_R}\right)\left(\frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} =$$

$$= \frac{l_1+\frac{1}{2}\delta l_1^\alpha}{\rho_R} - (1+o(1))\frac{\delta^2}{8\rho_R}\,l_1^{\rho/\rho_R} + (1+o(1))(T+\varepsilon)\left(1-\frac{\rho}{\rho_R}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = \frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R} + (1+o(1))\left\{(T+\varepsilon)\left(1-\frac{\rho}{\rho_R}\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{\delta^2}{8\rho_R}(T_R\rho_R)^{\rho/\rho_R}\right\}\left(\frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} \leqslant \Phi\left(\sigma_\nu;\ (1+o(1))\times\right.$$

$$\left.\times\left\{T+\varepsilon-\frac{\delta^2}{8\rho_R}(T_R\rho_R)^{\rho/\rho_R}\right\}\right)\ (\nu\to\infty).$$

Отсюда как выше, получаем

$$\sum_{n=n''_\nu}^{\infty} \exp\{V(\lambda_n;\ T+\varepsilon) + \sigma_\nu\lambda_n\} \leqslant \exp\left\{\Phi\left(\sigma_\nu;\ T - \frac{\delta^2}{8\rho_R}(T_R\rho_R)^{\rho/\rho_R} + 2\varepsilon\right)\right\} \tag{17}$$

для всех достаточно больших ν. Положим $\gamma = \min\left\{\eta, \frac{\delta^2}{8\rho_R}(T_R\rho_R)^{\rho/\rho_R}\right\}$. Тогда из (11), (12), (16) и (17) следует, что $M(\sigma_\nu, F) \leqslant 4\exp \times \times \{\Phi(\sigma_\nu;\ T-\gamma+2\varepsilon)\} \leqslant \exp\{\Phi(\sigma_\nu;\ T-\gamma+3\varepsilon\}$ для любого $\varepsilon > 0$ при $\nu \geqslant \nu_0(\varepsilon)$. Отсюда вытекает неравенство $\tau^* \leqslant T - \eta$, что невозможно. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Из неравенства $\ln|a_n| \leqslant V(\lambda_n;\ T+\varepsilon) \times \times (n \geqslant n_0(\varepsilon))$ вытекает, что $t^* \leqslant T$, и по теореме 4 $\tau^* = t^* \leqslant T$. Далее, взяв $\tau < T - \varepsilon$, $\Phi(\sigma) = \Phi(\sigma;\ \tau)$, из неравенства $\ln|a_{n_k}| \geqslant \geqslant V(\lambda_{n_k};\ T-\varepsilon)$, как обычно, получим что $\ln|a_{n_k}| \geqslant -\lambda_{n_k}\Psi(\varphi(\lambda_{n_k}))$. Поэтому, как при доказательстве теоремы 5, для всех $\sigma \in [\varphi(\lambda_{n_k}), \varphi(\lambda_{n_{k+1}})]$ получим неравенство $\ln\mu(\sigma, F) \geqslant T_R\exp(\rho_R\sigma) + (1+o(1)) \times \times \tau\exp(\rho\sigma)$ $(\sigma \to +\infty)$. Отсюда, как обычно, получаем неравенство $\tau_* \geqslant t_* \geqslant T$. Таким образом, $T \leqslant \tau_* \leqslant \tau^* \leqslant T$, т. е. имеет место соотношение (10).

Список литературы: 1. *Lindelöf E.* Sur la détermination de la croissance des fonctions entiéres définies par un developpement de Taylor // Bull. Soc. Math. 1903. **27**, N 1. P. 1—62. 2. *Логвиненко В. Н.* О целых функциях с нулями на полупрямой. I // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1972. Вып. 16. С. 154—158. 3. *Логвиненко В. Н.* О целых функциях с нулями на полупрямой. II // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1973. Вып.17. С.84—99. 4. *Urenko J. B.* Improbability of nonconvergent chaos in Newton's method // J. Math. Anal. and Appl. 1986. **117**, N 1. P. 42—47.

Поступила в редколлегию 10.10.87