УДК 517.535.4

А. М. РУССАКОВСКИЙ

НУЛИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

В различных задачах комплексного анализа часто приходится иметь дело с целыми функциями, обладающими тем свойством, что

$$M_f(h) = \sup\{|f(z)| : |\operatorname{Im} z| \leqslant h\} < \infty, \ \forall h.$$

Таковы, например, целые характеристические функции вероятностных распределений, целые функции, представимые рядами Дирихле с мнимыми показателями и т. д. Полное описание нулевых множеств таких функций было дано И. П. Камыниным и И. В. Островским [1].

В данной работе рассматриваются классы целых функций, ограниченных в каждой полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant h$, определяемые оценками на рост $M_f(h)$ при $h \to \infty$. Наиболее часто в качестве шкалы роста у нас будут фигурировать функции вида $\exp(\exp(\sigma h^\rho))$, где $\rho \geqslant 1$, $\sigma \geqslant 0$, хотя (см. теоремы 2, 3) все результаты можно получить и для более общих шкал роста, введенных М. Н. Шереметой [2]. Как видно, речь идет о целых функциях, имеющих бесконечный порядок в обычной шкале.

При рассмотрении таких классов целых функций естественно возникает задача описания нулевых множеств (дивизоров) функций того или иного класса. Цель настоящей работы — получение таких описаний (теоремы 2—5) в терминах считающей функции числа нулей по прямоугольникам $\{|x-\xi| \leqslant r,\ |y| \leqslant h\}$, $\xi \in \boldsymbol{R}$.

Подобные результаты, например, в случае конечного порядка и кругового исчерпания плоскости хорошо известны. Они содержатся в классических теоремах Бореля, Адамара и Линделефа (см., например, [3]) и опираются на аппарат канонических произведений.

В настоящей работе построение целой функции с заданными нулями проводится другим способом, использующим оценки Хермандера [4] решения $\bar{\partial}$-проблемы. Соответствующее утверждение (теорема 1) представляет, на наш взгляд, и самостоятельный интерес. Метод доказательства, характерный скорее для теории функций многих комплексных переменных, сводится к решению «второй проблемы Кузена с оценками». Таким образом, он вряд ли может считаться новым; с другой стороны, насколько известно, ранее он в таком виде не применялся. Автор должен с благодарностью отметить, что идею применения подобного метода ему сообщил Л. И. Ронкин.

Упоминаемая теорема 1 близка по форме к одному результату А. Скода [5], полученному в многомерном случае. А. Скода строит целую функцию с заданными нулями, в оценку которой входит субгармоническая мажоранта числа нулей в некоторой окрестности отрезка, соединяющего начало координат с точкой, в которой производится оценка. Хотя ни теорема 1 не следует из теоремы А. Скода, ни наоборот, при доказательстве теорем 2 и 3 можно было бы вместо теоремы 1 использовать результат А. Скода. В доказательстве теорем 4 и 5 этого сделать нельзя.

Введем следующие обозначения. Пусть D — дивизор в $\boldsymbol{C}$, т. е. $D=\{a_k;\ q_k\}$, где $a_k \in \boldsymbol{C}$, $q_k \in \boldsymbol{N}$ и пусть $|D| = \bigcup_k a_k$, $n_D(K) = \sum_{a_k \in K} q_k$, $n_D(x;\ r,\ h) = n_D(\Pi(x;\ r,\ h))$, где $x \in \boldsymbol{R}$, а $\Pi(\xi;\ r,\ h) = \{|x-\xi| \leqslant r,\ |y| \leqslant h\}$.

Пусть, далее, $\omega(z)$ — субгармоническая функция в $\boldsymbol{C}$, а $\omega^{[r]}(z) = \sup\{\omega(\zeta) : |z-\zeta| \leqslant r\}$.

Теорема 1. *Пусть D — дивизор в $\boldsymbol{C}$ и $\forall x \in \boldsymbol{R}$, $\forall y \in \boldsymbol{R}$:*

$$\ln n_D(x;\ 1,\ |y|) \leqslant \omega(x+iy). \tag{1}$$

Тогда существует такая целая функция $f(z)$ *с* $D_f = D$, *что*

$$\ln\ln^+|f(z)| \leqslant C + 2\ln(1+|z|^2) + \omega^{[1]}(z). \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть z_j — узлы квадратной решетки со стороной $\frac{1}{32}$. Обозначим через D_j открытый квадрат с центром z_j и стороной $\frac{1}{16}$, D'_j — то же со стороной $\frac{1}{4}$, D''_j — то же со стороной $\frac{3}{8}$.

Квадраты D_j образуют открытое покрытие C со свойствами

$$1)\ D_j \cap D_i \neq \varnothing \Rightarrow D_i \subset\subset D'_j,\ D'_i \subset\subset D''_j;$$

$$2)\ D_j \cap D_i \neq \varnothing \Rightarrow D'_j \cup D'_i \subset\subset D''_j \cap D''_i;\ D_i \cup D_j \subset\subset D'_i \cap D'_j.$$

Положим $P_j(z) = \prod\limits_{a_k \in \overline{D}'_j} (z-a_k)^{q_k}$ (если в D'_j нет точек a_k, положим $P_j(z) = 1$).

Функцию $f(z)$ будем строить в виде $f(z) = P_j(z)\exp(-g_j(z))$ на D_j. Функции $g_j(z)$, аналитические в D_j, нужно выбрать так, чтобы обеспечить «склейку» на пересечениях D_j и наличие необходимых оценок.

Пусть $D_j \cap D_i \neq \varnothing$. Определим на $D_j \cap D_i$ функции $P_{ji}(z) = P_i(z)(P_j(z))^{-1}$, $Q_{ji}(z) = \prod\limits_{a_k \in \overline{D}'_j \setminus \overline{D}'_j} (z-a_k)^{q_k}$.

Тогда на $D_j \cap D_i$ имеем $P_{ji} = Q_{ji} \cdot Q_{ij}^{-1}$, $P_{ji} = P_{ij}^{-1}$.

Очевидно, функции P_{ji}, P_{ij}, Q_{ji}, Q_{ij} голоморфны и не обращаются в нуль в $D'_j \cap D'_i$. Положим

$$g_{ji}(z) = \ln|P_{ji}(z)| + i\Big(\sum_{a_k \in \overline{D}'_j \setminus \overline{D}'_i} q_k \arg(z-a_k) - \\ - \sum_{a_k \in \overline{D}'_j \setminus \overline{D}'_j} q_k \arg(z-a_k)\Big).$$

Все аргументы $z - a_k$ выберем так, чтобы они были непрерывны в $D'_j \cap D'_i$ и принадлежали $(-2\pi, 2\pi]$.

Так как $P_{ji} = \exp g_{ji}$ на $D'_j \cap D'_i$, функции g_{ji} аналитичны в $D'_j \cap D'_i$. Очевидно, $g_{ji} = -g_{ij}$. Кроме того, на $D_i \cap D_j \cap D_k \neq \varnothing$ имеем

$$g_{ij} + g_{jk} + g_{ki} = 2\pi i N_{ijk},$$

где $N_{ijk} \in \mathbf{Z}$.

Поскольку $(\overline{D}'_j \setminus \overline{D}'_i) \cup (\overline{D}'_i \setminus \overline{D}'_k) \cup (\overline{D}'_k \setminus \overline{D}'_j) = (\overline{D}'_i \setminus \overline{D}'_j) \cup (\overline{D}'_k \setminus \overline{D}'_i) \cup (\overline{D}'_j \setminus \overline{D}'_k)$, в выражении $g_{ij} + g_{jk} + g_{ki}$ каждое слагаемое $iq_m \arg(z - a_m)$ фигурирует дважды с противоположными знаками. Разность аргументов $z - a_m$ может оказаться равной либо нулю, либо $\pm 2\pi$. Поэтому очевидно,

$$|N_{ijk}| \leqslant n_D(\overline{D}''_j \cap \overline{D}''_i \cap \overline{D}''_k).$$

Рассмотрим N_{ijk} как коцепь на покрытии D_j. Легко видеть, что $N_{ijk} - N_{jkl} + N_{kli} - N_{lij} = 0$, т. е. это коцикл. Поскольку $H^2(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Z}) = 0$, найдется такая коцепь $\{M_{\alpha\beta}\}$ с целочисленными элементами, что

$$M_{ij} + M_{jk} + M_{ki} = N_{ijk}.$$

Ниже мы покажем, что возможен такой выбор коцепи $\{M_{\alpha\beta}\}$, что

$$|M_{ij}| \leqslant C n_D(\Pi_{ij}), \tag{3}$$

где $\Pi_{ij} = \Pi_i \cap \Pi_j$, а $\Pi_l = \Pi\left(\operatorname{Re} z_l;\ \frac{1}{2},\ |\operatorname{Im} z_l| + \frac{1}{2}\right)$.

Продолжим доказательство, считая коцепь $\{M_{\alpha\beta}\}$ выбранной так, что (3) имеет место.

Положим $\tilde{g}_{ji} = g_{ji} - 2\pi i M_{ji}$. Теперь имеем $\tilde{g}_{ij} + \tilde{g}_{jk} + \tilde{g}_{ki} = 0$ на $D_j \cap D_i \cap D_k \neq \varnothing$, и на $D'_j \cap D'_i$ справедлива оценка

$$|\tilde{g}_{ji}| \leqslant |\ln|P_{ji}|| + \tilde{C} n_D(\Pi_{ij}). \tag{4}$$

Оценим $|P_{ji}|$ на $D_j \cap D_i$. Для этого заметим, что при $z \in D_j \cup D_i$, $a_k \in (\overline{D}'_j \setminus \overline{D}'_i) \cup (\overline{D}'_i \setminus \overline{D}'_j)$ справедливы оценки

$$\frac{1}{32} \leqslant |z - a_k| \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{16} < 1,$$

так что

$$32^{-n_D(\overline{D}'_j)} \leqslant \frac{\left(\frac{1}{32}\right)^{n_D(\overline{D}'_j)}}{1} \leqslant |P_{ji}| \leqslant \frac{1}{\left(\frac{1}{32}\right)^{n_D(\overline{D}'_i)}} \leqslant 32^{n_D(\overline{D}'_i)}.$$

Таким образом, поскольку $\overline{D}'_j \cup \overline{D}'_i \subset \overline{D}''_j \cap \overline{D}''_i \subset \Pi_{ij}$,

$$|\ln|P_{ji}|| \leqslant \ln 32 \cdot n_D(\overline{D}''_j \cap \overline{D}''_i) \leqslant \ln 32 \cdot n_D(\Pi_{ij}),$$

и, значит, в силу (1) и (4)

$$|\tilde{g}_{ji}(z)| \leqslant \tilde{\tilde{C}} n_D(\Pi_{ij}) \leqslant \tilde{\tilde{C}} n_D\Big(\operatorname{Re} z;\ \frac{9}{16},$$

$$|\operatorname{Im} z| + \frac{9}{16}\Big) \leqslant \tilde{\tilde{C}} \exp\left(\omega^{\left[\frac{5}{8}\right]}(z)\right),\quad z \in D_j \cup D_i. \tag{5}$$

Теперь наша задача представить $\tilde{g}_{ji}$ на $D_j \cap D_i$ в виде $\tilde{g}_{ji} = g_j - g_i$, где $g_l \in A(D_l)$ и удовлетворяет некоторым оценкам. Для этого построим разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{D_j\}$. Пусть $\chi_\nu \in C_0^\infty(\boldsymbol{C})$,

$$\sum \chi_\nu = 1,\ \operatorname{supp} \chi_\nu \subset D_\nu,\ \chi_\nu(z) = \chi_\mu(z + z_\mu - z_\nu)$$

и каждая точка содержится в носителях не более, чем L функций χ_ν.

Положим $h_j = \sum \chi_\nu \tilde{g}_{\nu j}$. Тогда $h_j - h_k = \sum \chi_\nu \tilde{g}_{jk} = \tilde{g}_{jk}$ на $D_j \cap D_k$. Поэтому $\bar{\partial} h_j = \bar{\partial} h_k$ на $D_j \cap D_k$, и равенствами $\alpha = \bar{\partial} h_j$ на D_j корректно определена в $\boldsymbol{C}$ (0, 1)-форма α. Кроме того, при $z \in D_j$ имеем

$$|\alpha(z)| = |\bar{\partial} h_j| = |\sum \bar{\partial} \chi_\nu \tilde{g}_{\nu j}| \leqslant$$

$$\leqslant CL \max_{D_\nu \cap D_j \neq \varnothing} |\tilde{g}_{\nu j}| \leqslant C' \exp(\omega^{\left[\frac{5}{8}\right]}(z)).$$

Тогда, очевидно, $\int\limits_{\boldsymbol{C}} |\alpha|^2 e^{-2\omega^{\left[\frac{5}{8}\right]}(z)} \frac{d\lambda}{(1+|z|^2)^2} < \infty.$

По теореме Хермандера [4, теорема 4.4.2] у уравнения $\bar{\partial}\beta = \alpha$ существует такое решение β, что

$$\int\limits_{\boldsymbol{C}} |\beta|^2 e^{-2\omega^{\left[\frac{5}{8}\right]}(z)} \frac{d\lambda}{(1+|z|^2)^4} < \infty.$$

Положим теперь $g_j = h_j - \beta$. Тогда $g_j - g_i = \tilde{g}_{ji}$, $g_j \in A(D_j)$ и

$$\int\limits_{D_j} |g_j|^2 e^{-2\omega^{\left[\frac{5}{8}\right]}(z)} \frac{d\lambda}{(1+|z|^2)^4} < \infty. \tag{6}$$

Пусть Ω_j — квадрат с центром z_j и стороной $\frac{1}{24}$. Тогда при $z \in \Omega_j$ из интегральной оценки (6) стандартным способом [4] получается оценка

$$|g_j(z)| \leqslant C(1+|z|^2)^2 \exp \omega^{[1]}(z)). \tag{7}$$

Отметим, что Ω_j также образуют покрытие $\boldsymbol{C}$. Определим целую функцию $f(z)$ равенствами $f(z) = P_j(z) \exp(-g_j(z))$ на Ω_j. Это определение корректно, так как $\Omega_j \cap \Omega_i \subset D_j \cap D_i$, и при $z \in \Omega_j \cap \Omega_i$ мы имеем

$$P_j e^{-g_j} = \frac{P_j}{P_i} e^{g_i - g_j} P_i e^{-g_i} = P_{ji} e^{-g_{ji}} P_i e^{-g_i} = P_i e^{-g_i}.$$

Далее, при $z \in \Omega_j$, очевидно, $|f(z)| = |P_j(z)| \exp(-\operatorname{Re} g_j(z))$. Поскольку $|P_j(z)| \leqslant 1$, $|\operatorname{Re} g_j(z)| \leqslant |g_j(z)|$, из (7) непосредственно следует требуемая оценка (2).

Для завершения доказательства остается показать, что возможен выбор коцепи $\{M_{\alpha\beta}\}$, удовлетворяющей (3).

Для нахождения этой коцепи необходимо решить бесконечную систему линейных уравнений. С каждым множеством $D_{ijkl} = D_i \cap \cap D_j \cap D_k \cap D_l$ естественно связать часть этой системы:

$$M_{ij} + M_{jk} + M_{ki} = N_{ijk};$$
$$M_{jk} + M_{kl} + M_{lj} = N_{jkl};$$
$$M_{kl} + M_{li} + M_{ik} = N_{kli};$$
$$M_{li} + M_{ij} + M_{jl} = N_{lij}.$$

Поскольку $\{N_{\alpha\beta\gamma}\}$ — коцикл, любое из этих уравнений является следствием трех других. Остается 3 уравнения с 6 неизвестными. Таким образом, имеются 3 свободных параметра.

Заметим, что D_{ijkl} — это квадрат исходной решетки со стороной $\frac{1}{32}$ с вершинами в точках z_i, z_j, z_k и z_l.

Решения систем уравнений, отвечающих двум смежным квадратам решетки с общими вершинами z_α и z_β, назовем согласованными, если $M^{(1)}_{\alpha\beta} = M^{(2)}_{\alpha\beta}$.

Для получения искомой коцепи достаточно построить решения систем уравнений, отвечающих квадратам решетки, которые согласованы для любой пары смежных квадратов.

Наши решения имеют следующий вид. Положим

$$M_{ij} = M_{kl} = 0,\ M_{ik} = C,\ M_{jk} = N_{ijk} + C,$$
$$M_{jl} = N_{ijk} + C - N_{jki},\ M_{li} = N_{kli} - C, \tag{8}$$

где $C = C(i, j, k, l)$ — параметр, определяемый с помощью индуктивного процесса, который будет далее описан.

Условимся, что, если квадрат D_{ijkl} лежит в верхней полуплоскости, $z_j = z_i + \frac{i}{32}$, $z_k = z_i + \frac{1}{32}$, $z_l = z_i + \frac{1}{32} + \frac{i}{32}$, а если в нижней, то $z_j = z_i - \frac{i}{32}$, $z_k = z_i + \frac{1}{32}$, $z_l = z_i + \frac{1}{32} - \frac{i}{32}$. Таким образом, если $\operatorname{Im} z_i \neq 0$, то квадрат D_{ijkl} однозначно определяется точкой z_i и, значит, $C(i, j, k, l) = C(z_i)$.

Потребовав, чтобы решения, отвечающие квадратам, имеющим общую пару вершин на вещественной оси, были согласованы, мы и при $\operatorname{Im} z_i = 0$ будем иметь $C(i, j, k, l) = C(z_i)$.

Далее, при выбранном нами способе индексации из того, что $M_{ij} = M_{kl} = 0$, следует согласованность решений, отвечающих любой паре квадратов, смежных по горизонтали.

Таким образом, при выборе $C(z_i)$ достаточно обеспечить согласованность решений, отвечающих квадратам, смежным по вертикали.

База индукции. Если $\operatorname{Im} z_i = 0$, положим $C(z_i) = 0$.

n-й шаг индукции. Пусть уже определены $C(z_m)$ для z_m с $|\operatorname{Im} z_m| \leqslant \leqslant (n-1)\cdot\frac{1}{32}$ и пусть $|\operatorname{Im} z_i| = \frac{n-1}{32}$. Рассмотрим систему уравнений, отвечающих квадрату D_{ijkl}, и, подставляя в (8) параметр $C = C(z_i)$, определим величины $M_{\alpha\beta}$, после чего положим $C(z_j) = M_{jl}$.

Согласованность очевидна. Коцепь построена. Проведем оценки.

Из (8) следует, что

$$\forall \alpha,\ \beta \in \{i, j, k, l\} : |M_{\alpha\beta}| \leqslant |C(z_i)| +$$
$$+ 2\max\{|N_{ijk}|, |N_{jkl}|, |N_{kli}|, |N_{lij}|\} \leqslant$$
$$\leqslant |C(z_i)| + 2n_D(\overline{D}_i'' \cup \overline{D}_j'' \cup \overline{D}_k'' \cup \overline{D}_l'')$$

и, в частности,

$$|C(z_j)| \leqslant |C(z_i)| + 2n_D(\overline{D}_i'' \cup \overline{D}_j'' \cup \overline{D}_k'' \cup \overline{D}_l'').$$

Таким образом, на каждом шаге индукции к оценке прибавляется $2n_D(\overline{D}''_{i'} \cup \overline{D}''_{j'} \cup \overline{D}''_{k'} \cup \overline{D}''_{l'})$ для соответствующих i', j', k', l'. Поскольку $\overline{D}''_m$ образуют конечнократное покрытие, очевидно, $|M_{jk}|$ оценивается сверху через константу, умноженную на число точек D, попавших в множество $\left\{|x - \operatorname{Re} z_j| \leqslant \frac{1}{2},\ |y| \leqslant |\operatorname{Im} z_j| + \frac{1}{2}\right\} \cap \left\{|x - \operatorname{Re} z_k| \leqslant \right.$ $\left.\leqslant \frac{1}{2},\ |y| \leqslant |\operatorname{Im} z_k| + \frac{1}{2}\right\}$, что и доказывает (3).

Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что в каждом квадрате Ω_j с центром на вещественной оси можно указать такую точку $x_j \in \boldsymbol{R}$, в которой построенная функция $f(z)$ допускает некоторую оценку снизу.

Действительно, согласно теореме Картана [3, теорема 10], вне системы кружков с общей суммой радиусов $\frac{1}{50}$ многочлен $P_j(z)$ по модулю больше величины $(100e)^{-n_D(\overline{D}'_j)}$. Поскольку отрезок $\Omega_j \cap \boldsymbol{R}$ имеет длину $\frac{1}{24}$, он содержит некоторую точку x_j, не покрываемую упомянутой системой кружков, и ввиду (7) мы имеем

$$\ln|f(x_j)| = \ln|P_j(x_j)| - \operatorname{Re} g_j(x_j) \geqslant$$
$$\geqslant -\ln 100e \cdot n_D(\overline{D}'_j) - |g_j(x_j)| \geqslant -C_1 e^{\omega^{[1]}(x_j)} -$$
$$- C_2(1 + x_j^2)^2 e^{\omega^{[1]}(x_j)} \geqslant -C'(1 + x_j^2)^2 e^{\omega^{[1]}(x_j)}.$$

Перейдем к приложениям теоремы 1 в задачах описания дивизоров целых функций определенных классов. Учет числа нулей именно по прямоугольникам $\Pi(x;\ r,\ h)$ является естественным для функций, ограниченных в любой полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant h$:

$$M_f(h) = \sup\{|f(z)| : |\operatorname{Im} z| \leqslant h\} < \infty,\ \forall h.$$

Классы функций, которые будут рассматриваться, задаются оценками скорости роста $M_f(h)$ при $h \to \infty$.

Вначале приведем ряд необходимых оценок общего характера.

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ — целая функция, ограниченная в каждой полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant h$.* Тогда $\forall \xi \in \boldsymbol{R}$, $\forall r,\ h > 0$

$$n_{D_f}(\xi;\ r,\ h) \leqslant \frac{2}{\ln\frac{3}{2}} \cdot \frac{\theta}{\theta - 1} \cdot e^{\frac{\pi r}{2\theta h}} \cdot (\ln M_f(\theta h) - \ln|f(\xi)|),\ \forall \theta > 1.$$

Доказательство. Предположим, что $f(\xi) \neq 0$, иначе неравенство тривиально. Рассмотрим представление Грина функции $\ln|f(z)|$ в полосе $|\operatorname{Im} z| < \theta h$.

Функция Грина $G(z,\ \xi)$ для этой полосы имеет вид

$$G(z,\ \xi) = \ln\left|\operatorname{cth}\frac{\pi(z - \xi)}{4\theta h}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{2\cos\frac{\pi y}{2\theta h}}{\operatorname{ch}\frac{\pi(x - \xi)}{2\theta h} - \cos\frac{\pi y}{2\theta h}}\right),$$

Соответственно

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x \pm i\theta h,\ \xi) = \frac{\pi}{2\theta h} \frac{1}{\operatorname{ch} \dfrac{\pi (x-\xi)}{2\theta h}},$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ обозначает дифференцирование по внутренней нормали.

Имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{|y_k| < \theta h \\ x_k + iy_k \in |D_f|}} q_k \ln\left(1 + \frac{2\cos\dfrac{\pi y_k}{2\theta h}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi (x_k-\xi)}{2\theta h} - \cos\dfrac{\pi y_k}{2\theta h}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\theta h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|f(x+i\theta h) f(x-i\theta h)|\,dx}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi (x-\xi)}{2\theta h}} - \ln|f(\xi)|.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\theta h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi (x-\xi)}{2\theta h}} = 1,$$

правая часть не превосходит $\ln M_f(h) - \ln|f(\xi)|$. Каждое слагаемое в левой части при $x_k + iy_k \in \Pi(\xi;\, r,\, h)$ оценивается снизу следующим образом:

$$\ln\left(1 + \frac{2\cos\dfrac{\pi y_k}{2\theta h}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi (x_k-\xi)}{2\theta h} - \cos\dfrac{\pi y_k}{2\theta h}}\right) \geqslant \ln\left(1 + \frac{2\cos\dfrac{\pi}{2\theta}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi r}{2\theta h}}\right).$$

Воспользуемся далее неравенством

$$\ln(1+x) \geqslant \begin{cases} \dfrac{3}{4}x, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}; \\ \ln\dfrac{3}{2}, & x \geqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

откуда при $0 \leqslant x \leqslant 2$ вытекает неравенство $\ln(1+x) \geqslant \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}\cdot x$.

Учитывая, что $\cos\dfrac{\pi}{2\theta} \geqslant \dfrac{\theta-1}{\theta}$, имеем

$$\ln\left(1 + \frac{2\cos\dfrac{\pi}{2\theta}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi r}{2\theta h}}\right) \geqslant \ln\frac{3}{2}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{2\theta}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi r}{2\theta h}} \geqslant \ln\frac{3}{2}\cdot\frac{\theta-1}{\theta}\cdot e^{-\frac{\pi r}{2\theta h}},$$

откуда и следует утверждение леммы.

Пусть функция $\varphi \in C([0,\infty))$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \nearrow \infty$ при $t \to \infty$, а $h(t)$ — решение уравнения

$$2h\cdot\varphi(h) = \pi t,\ t \geqslant 0. \tag{9}$$

Очевидно, $h(t) \nearrow \infty$, $t^{-1}h(t) \searrow 0$, $t^{-1}\varphi(h(t)) \searrow 0$.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ — целая функция, удовлетворяющая неравенству*

$$\ln \ln^+ M_f(h) \leqslant \varphi(h), \ \forall h \geqslant 0, \ f(0) = 1. \tag{10}$$

Тогда $\forall x \in \boldsymbol{R}, \ \forall r, \ h > 0$:

$$\ln n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant C + r + \varphi(h+1) + \ln^+ h + 2\varphi(2h(|x|)). \tag{11}$$

Доказательство. Заметим, что $n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant n_{D_f}(0,\ |x| + r,\ h)$, и воспользуемся леммой 1. Имеем

$$n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant C \frac{\theta}{\theta - 1} e^{\frac{\pi(|x|+r)}{2\theta h}} \ln M_f(\theta h).$$

Используя условие (10), получаем

$$\ln n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant C + \frac{\pi}{2\theta h} r + \frac{\pi |x|}{2h} + \varphi(\theta h) - \ln(\theta - 1), \ \forall \theta \in (1,\ 2].$$

Пусть $h \geqslant h(|x|)$. Тогда

$$\ln n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant C + \frac{\pi r}{2\theta h} + \frac{\pi |x|}{2h(|x|)} + \varphi(\theta h) - \ln(\theta - 1) = C + \frac{\pi r}{2\theta h} + \varphi(h(|x|)) + \varphi(\theta h) - \ln(\theta - 1).$$

Если же $h \leqslant h(|x|)$, то

$$\ln n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant \ln n_{D_f}(x;\ r,\ h(|x|)) \leqslant C + \frac{\pi r}{2\theta h} + \frac{\pi |x|}{2h(|x|)} + \varphi(\theta h(|x|)) - \ln(\theta - 1) \leqslant C + \frac{\pi r}{2\theta h} + 2\varphi(\theta h(|x|)) - \ln(\theta - 1).$$

Из приведенных неравенств вытекает, что $\forall r,\ h > 0$:

$$\ln n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant C + \frac{\pi r}{2\theta h} + 2\varphi(2h(|x|)) + \varphi(\theta h) - \ln(\theta - 1).$$

Полагая $\theta = 1 + \frac{1}{h}$, приходим к (11). Лемма доказана.

Пусть $\psi \geqslant 0$ — функция на $[0,\ \infty]$.

Лемма 3. *Пусть целая функция $f(z)$ удовлетворяет* (10) *и пусть*

$$\exists b > 0 : \forall x \in \boldsymbol{R}\ \exists \xi = \xi(x) \in \boldsymbol{R},\ |x - \xi| \leqslant b : \ln|f(\xi)| \geqslant -e^{\psi(|\xi|)}.$$

Тогда $\forall x \in \boldsymbol{R}, \ \forall r, \ h > 0$:

$$\ln n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant C + r + \varphi(h+1) + \ln^+ h + \psi^{[b]}(|x|).$$

Доказательство. Ввиду того, что $n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant n_{D_f}(\xi(x);\ r + b,\ h)$, утверждение леммы следует из леммы 1.

Для дальнейшего нам понадобится следующее утверждение.

Лемма А ([1, лемма 3]). *Пусть $\theta(r)$, $\theta(0) = 0$— непрерывная возрастающая функция на* $[0,\ \infty]$ *такая, что* $\theta(r) \nearrow \infty$, $r^{-1}\Theta(r) \to$

$\to 0$ $(r \to \infty)$. *Существует целая функция* $g(z)$, *обладающая свойством* $\forall h > 0$ *в полосе* $|\operatorname{Im} z| < h$ *при достаточно больших* $|z|$ *имеем*

$$\operatorname{Re} g(r) \geqslant \exp(\theta(|z|)). \tag{12}$$

Нам потребуется некоторая дополнительная информация, которую можно извлечь из доказательства леммы в [1], а именно: неравенство (12) выполняется, как только

$$4(\theta(2e|z|)+1)h|z|^{-1} \leqslant \frac{\pi}{3}. \tag{13}$$

Кроме того, нам нужны оценки сверху $|g(z)|$. Эта функция имеет вид

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{ez}{r(k)}\right)^{2k+2},$$

где $r(\theta)$ — функция, обратная к $\theta(r)$. Очевидно, $r(\theta) \nearrow \infty$, $\theta^{-1}r(\theta) \to \infty$. Предположим дополнительно, что

$$\left[\frac{d\ln\theta(r)}{d\ln r}\right]^{-1} = \frac{\theta\cdot r'(\theta)}{r(\theta)} < K. \tag{14}$$

Пусть $m = [\theta(2e|z|)]$. Тогда

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\frac{e|z|}{r(k)}\right)^{2k+2} < 1.$$

Имеем

$$\max_{|z|<r}|g(z)| \leqslant 1 + m\cdot\max_{1<k<m}\left(\frac{er}{r(k)}\right)^{2k+2}.$$

Выражение $\left(\frac{er}{r(k)}\right)^{2k+2}$ достигает максимума при таком значении $k = k_0$ что $\ln\frac{er}{r(k_0)} = \frac{(k_0+1)\,r'(k_0)}{r(k_0)}$. Отсюда и из (14) следует, что $0 \leqslant \ln\frac{er}{r(k_0)} \leqslant 2K$, или $\theta\left(\frac{er}{\exp(2K)}\right) \leqslant k_0 \leqslant \theta(er)$.

Имеем

$$\left(\frac{er}{r(k)}\right)^{2k+2} \leqslant \left(\frac{er}{r(k_0)}\right)^{2k_0+2} \leqslant (e^{2K})^{2\theta(er)+2}$$

и

$$\max_{|z|<r}|g(z)| \leqslant 1 + e^{\ln\theta(2er)+4K\theta(er)+4K} \leqslant Ce^{\ln\theta(2er)+4K\theta(er)}. \tag{15}$$

В нашем случае в качестве $\Theta(r)$ будет фигурировать функция вида $\theta(r) = B\varphi(h, (r))$. Из соотношения (9) следует, что $t^{-1}\varphi(h(t)) \to 0$ при $t \to \infty$, так что функция $\varphi(h(r))$ удовлетворяет условию леммы. Будем предполагать, что $\varphi \in C^1([0, \infty))$. Покажем, что условие (14) для этой функции эквивалентно условию

$$\varphi(t) \leqslant ct\varphi'(t),\ t \geqslant 0. \tag{16}$$

Действительно, в силу (9) имеем $\ln h(t) + \ln\varphi(h(t)) = \ln\frac{\pi}{2} + \ln t$. Дифференцируя по переменной $\ln t$, получаем

$$1 = \frac{\frac{dh(t)}{d\ln t}}{h(t)} + \frac{d\ln\varphi(h(t))}{d\ln t} = \frac{\varphi'(h(t))\frac{dh(t)}{d\ln t}}{\varphi'(h(t))\cdot h(t)} + \frac{d\ln\varphi(h(t))}{d\ln t} =$$

$$= \frac{\frac{d\varphi(h(t))}{d\ln t}}{\varphi'(h(t))\cdot h(t)} + \frac{d\ln\varphi(h(t))}{d\ln t} = \frac{\frac{d\ln\varphi(h(t))}{d\ln t}\cdot\varphi(h(t))}{\varphi'(h(t))\cdot h(t)} + \frac{d\ln\varphi(h(t))}{d\ln t},$$

откуда

$$\frac{\partial\ln\varphi(h(t))}{\partial\ln t} = \frac{1}{\frac{\varphi(h(t))}{\varphi'(h(t))\cdot h(t)} + 1}.$$

Выражение в правой части отграничено от нуля тогда и только тогда, когда $\varphi(h(t)) \leqslant ch(t)\varphi'(h(t))$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Пусть* $B \geqslant 1$, *а функция* φ *удовлетворяет* (16). *Существует такая целая функция* $g(z)$, *что*

$$|g(z)| \leqslant C\exp(B'\varphi(h(|z|)))$$

и $\exists h_0 > 0$: $\forall h > h_0$ *при* $z \in \{\zeta : |\operatorname{Im}\zeta| \leqslant h,\ h(|\zeta|) \geqslant 48eBh\}$ выполняется неравенство $\operatorname{Re} g(z) \geqslant \exp(B\varphi(h(|z|)))$.

Доказательство. Вначале заметим, что, как следует из (9),

$$\forall c \geqslant 1 : \varphi(h(ct)) = \frac{\pi ct}{2h(ct)} \leqslant c\frac{\pi t}{2h(t)} = c\varphi(h(t)).$$

Из (15) с учетом (16) и этого замечания имеем

$$|g(z)| \leqslant Ce^{\ln(B\varphi(h(2e|z|)))+K'\varphi(h(e|z|))} \leqslant C'e^{\ln\varphi(h(|z|))+K''\varphi(h(|z|))} \leqslant C''e^{B'\varphi(h(|z|))}.$$

Согласно отмеченному выше, оценка снизу имеет место, если выполняется соотношение (13).

Пусть число $h_0 > 0$ таково, что $\varphi(t) \geqslant 1$ при $t \geqslant h_0$. Пусть, далее, $h > h_0$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant h$ и $h(|z|) \geqslant 48eBh$. Тогда $\varphi(h(2e|z|)) \geqslant \varphi(h(|z|)) \geqslant \geqslant \varphi(48eBh) \geqslant \varphi(h) \geqslant 1$ и $4(B\varphi(h(2e|z|)) + 1)\cdot h|z|^{-1} \leqslant \leqslant \frac{8B\varphi(h(2e|z|))}{|z|}h \leqslant \frac{16eB\varphi(h(|z|))}{|z|}\cdot\frac{h(|z|)}{48eB} = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$, т. е. (13) выполнено.

Лемма доказана.

Обозначим через P_1 множество таких функций $\varphi \in C^2([0, \infty))$, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \nearrow \infty$, $\varphi''(t) \geqslant 0$. Через P_2 обозначим множество таких функций $\varphi \in C^2([0, \infty))$, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \nearrow \infty$, φ удовлетворяет (16) и $\frac{\partial}{\partial t}t\frac{\partial}{\partial t}\varphi(h(t)) \geqslant 0$.

Ламма 5. *Пусть функции* $\varphi_1 \in P_1$, $\varphi_2 \in P_2$, $\varphi_3 \in P_2$ *таковы, что* $\varphi_1 \geqslant \varphi_3 \geqslant \varphi_2$, *и пусть* h_i — *решение уравнения* (9) *с* $\varphi = \varphi_i$. *Пусть, далее,* D — *дивизор в* $\boldsymbol{C}$, *причем* $\forall x \in \boldsymbol{R}$, $\forall r$, $h > 0$:

$$\ln n_D(x;\ r,\ h) \leqslant C + r + \varphi_1(h) + A\varphi_2(h_2(|x|)),$$

где $A > 0$.

Тогда существует такая целая функция $F(z)$, *что* $D_F = D$ *и* $\exists B_1, B_2, N > 0$:

$$\ln \ln^+ M_F(h) \leqslant C' + \varphi_1(h+1) + B_1 \psi(Nh) + B_2 \varphi_3(Nh),$$

где $\psi(t) = \varphi_2(h_2(h_3^{-1}(\varphi_3^{-1}(\varphi_1(t)))))$, *а* f^{-1} *обозначает функцию, обратную к* f.

Доказательство. Положим $\omega(z) = C + 1 + \varphi_1(|\operatorname{Im} z|) + A\varphi_2(h_2(|z|))$. Так как $\varphi_1''(t) \geqslant 0$ и $\frac{\partial}{\partial t} t \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2(h_2(t)) \geqslant 0$, функция $\omega(z)$ субгармонична. Применим теорему 1. Согласно этой теореме существует такая целая функция $f(z)$ с $D_f = D$, что

$$\ln \ln^+ |f(z)| \leqslant \tilde{C} + \omega^{[1]}(z) + 2\ln(1 + |z|^2) \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{\tilde{C}} + \varphi_1(|\operatorname{Im} z| + 1) + A\varphi_2(h_2(|z| + 1)) + 2\ln(1 + |z|^2).$$

Далее, из условия (16) следует, что

$$\ln \frac{\varphi_2(h_2(x))}{\varphi_2(h_2(1))} = \int_1^x \frac{\partial \ln \varphi_2(h_2(t))}{\partial \ln t} d \ln t \geqslant \frac{1}{1+c} \ln x, \ x > 1,$$

откуда $\varphi_2(h_2(x)) \geqslant a x^{\frac{1}{1+c}}$.

Поэтому при достаточно больших x справедливо неравенство $\varphi_2(h_2(x)) \geqslant 2 \ln(1 + x^2)$, так что

$$\begin{aligned} \ln \ln^+ |f(z)| &\leqslant \tilde{\tilde{C}} + \varphi_1(|\operatorname{Im} z| + 1) + A\varphi_2(h_2(2|z|)) + 2\ln(1 + |z|^2) \leqslant \\ &\leqslant C' + \varphi_1(|\operatorname{Im} z| + 1) + (1 + 2A)\varphi_2(h_2(|z|)) = \\ &= C' + \varphi_1(|\operatorname{Im} z| + 1) + B_1\varphi_2(h_2(|z|)). \end{aligned} \tag{17}$$

Пусть $g(z)$ — функция, существование которой утверждается в лемме 3 с $B = (1 + B_1)$, $\varphi = \varphi_3$. Положим $F(z) = f(z) e^{-e^{C'} \cdot g(z)}$ и покажем, что это искомая функция.

Пусть $h > \max(h_0, 1)$, а $|\operatorname{Im} z| \leqslant h$. Тогда при $h_3(|z|) \geqslant 48eBh$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} g(z) \geqslant \exp(B\varphi_3(h_3(|z|))).$$

Заметим, что, поскольку $\varphi_3 \leqslant \varphi_1$,

$$h_3(t) = \varphi_1^{-1}(\varphi_1(h_3(t))) \geqslant \varphi_1^{-1}(\varphi_3(h_3(t))). \tag{18}$$

Кроме того,

$$\varphi_2(h_2(t)) \leqslant \varphi_3(h_3(t)) \tag{19}$$

так как $\varphi_2 \leqslant \varphi_3$, $h_2 \geqslant h_3$, а в силу (9)

$$\varphi_2(h_2(t)) = \frac{\pi t}{2h_2(t)} \leqslant \frac{\pi t}{2h_3(t)} = \varphi_3(h_3(t)).$$

1. Пусть сначала $48eBh \leqslant \varphi_1^{-1}(\varphi_3(h_3(|z|)))$. Тогда в силу (18) выполняется неравенство $\operatorname{Re} g(z) \geqslant \exp(B\varphi_3(h_3(|z|)))$. Учитывая (17) и (19), имеем

$$\ln|F(z)| = \ln|f(z)| - e^{C'}\operatorname{Re} g(z) \leqslant e^{C'+\varphi_1(h+1)+B_1\varphi_2(h_2(|z|))} - \\ - e^{C'(1+B_1)\varphi_3(h_3(|z|))} \leqslant e^{C'+B_1\varphi_2(h_2(|z|))}\left(e^{\varphi_1(h+1)} - e^{\varphi_3(h_3(|z|))}\right) \leqslant \\ \leqslant e^{C'+B_1\varphi_2(h_2(|z|))}\left(e^{\varphi_1(48eBh)} - e^{\varphi_3(h_3(|z|))}\right) \leqslant 0.$$

2. Пусть теперь $h_3(|z|) \geqslant 48eBh \geqslant \varphi_1^{-1}(\varphi_3(h_3(|z|)))$. **Поскольку** тогда $\operatorname{Re} g(z) \geqslant 0$,

$$\ln|F(z)| \leqslant \ln|f(z)| \leqslant e^{C'+\varphi_1(h+1)+B_1\varphi_2(h_2(|z|))} \leqslant \\ \leqslant e^{C'+\varphi_1(h+1)+B_1\varphi_2(h_2(h_3^{-1}(h_3(|z|))))} \leqslant e^{C'+\varphi_1(h+1)+B_1\varphi_2(h_2(h_3^{-1}(\varphi_3^{-1}(\varphi_1(48eBh)))))} \leqslant \\ \leqslant e^{C'+\varphi_1(h+1)+B_1\psi(Nh)}.$$

3. Наконец, если $h_3(|z|) < 48eBh$, то

$$\ln|F(z)| \leqslant \ln|f(z)| + e^{C'}|g(z)| \leqslant e^{C'+\varphi_1(h+1)+B_1\varphi_2(h_2(|z|))} + \\ + Ce^{C'+B'\varphi_3(h_3(|z|))} \leqslant (C+1)\,e^{C'+\varphi_1(h+1)+(B_1+B')\varphi_3(h_3(|z|))} \leqslant \\ \leqslant e^{C''+\varphi_1(h+1)+(B_1+B')\varphi_3(48eBh)} \leqslant e^{C''+\varphi_1(h+1)+B_2\varphi_3(Nh)}.$$

Из приведенных оценок следует утверждение леммы.

Лемма 6. $P_1 \subset P_2$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in P_1$. Поскольку $\varphi''(t) \geqslant 0$, $\varphi(t) = \int_0^t \varphi'(x)\,dx \leqslant t\varphi'(t)$, т. е. выполняется (16). Остается проверить что из $\varphi''(t) \geqslant 0$ следует $\frac{\partial}{\partial t} t \frac{\partial}{\partial t}\varphi(h(t)) \geqslant 0$.

По определению $h(t)\varphi(h(t)) = \frac{\pi}{2}t$. Дважды дифференцируя это равенство по t, получаем

$$h''(t)\,\varphi(h(t)) + 2h'^2(t)\,\varphi'(h(t)) + h(t)\,h''(t)\,\varphi'(h(t)) + \\ + h(t)\,h'^2(t)\,\varphi'(h(t)) = 0,$$

откуда

$$h''(t) = -\frac{h'^2(t)\,[h(t)\,\varphi''(h(t)) + 2\varphi'(h(t))]}{\varphi(h(t)) + h(t)\,\varphi'(h(t))}.$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} t \frac{\partial}{\partial t}\varphi(h(t)) = \frac{\partial}{\partial t}(th'(t)\,\varphi'(h(t))) = \\ = \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}(h(t)\,\varphi(h(t))\,h'(t)\,\varphi'(h(t))) = \frac{2}{\pi}(h'^2\varphi\varphi' + hh'^2\varphi'^2 + \\ + hh''\varphi\varphi' + hh'^2\varphi\varphi'') = \frac{2}{\pi}(\varphi + h\varphi')^{-1}\,[h'^2\varphi^2\varphi' + hh'^2\varphi\varphi'^2 + hh'^2\varphi\varphi'_2 + \\ + h^2h'^2\varphi'^3 - h^2h'^2\varphi\varphi'\varphi'' - 2hh'^2\varphi\varphi'^2 + hh'^2\varphi^2\varphi'' + h^2h'^2\varphi\varphi'\varphi''] = \\ = \frac{2}{\pi}(\varphi + h\varphi')^{-1}\cdot h'^2(\varphi^2\varphi' + h^2\varphi'^3 + h\varphi^2\varphi'') \geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Следуя М. Н. Шеремете, обозначим через L^0 множество таких функций $\beta(x)$ на $[0, \infty)$, что $\beta(x) \nearrow \infty$ при $x \to \infty$ и $\lim\limits_{x \to \infty} (\beta(x))^{-1} \times \beta(x(1+\gamma(x))) = 1$ для всякой функции $\gamma(x)$ такой, что $\gamma(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Через Λ обозначим множество медленно растущих функций. Это те функции из L^0, для которых $\lim\limits_{x \to \infty} (\beta(x))^{-1} \beta(cx) = 1$, $\forall c \in (0, \infty)$. Наконец, через L обозначим множество таких функций из L^0, что

$$\lim_{x \to \infty} (\beta(x))^{-1} \beta(cx) < \infty, \ \forall c \in (0, \infty).$$

Введем теперь классы целых функций, с которыми мы будем работать.

Пусть $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in L^0$. Через $[\rho, \infty]_{\alpha,\beta}$ обозначим класс целых функций, ограниченных в каждой горизонтальной полосе, и таких, что

$$\overline{\lim_{h \to \infty}} \frac{\alpha(\ln \ln^+ M_f(h))}{\beta(\ln h)} = \rho.$$

Пусть $\alpha, \beta, \gamma \to\in L$. Через $[\rho, \infty)_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначим класс целых функций, ограниченных в любой горизонтальной полосе, и таких, что

$$\overline{\lim_{h \to \infty}} \frac{\alpha(\ln \ln^+ M_f(h))}{\beta(\gamma^\rho(h))} < \infty.$$

Следующие теоремы дают описание дивизоров функций введенных классов.

Теорема 2. *Пусть функции* $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in L^0$ *и число* $\rho > 0$ *таковы, что* $\forall \varepsilon(t) \to \rho$, $\exists \rho(t) \to \rho$: $\rho(t) \geqslant \varepsilon(t)$, *а функция* $\varphi(t) = \alpha^{-1}(\rho(t)\beta(\ln t))$ *принадлежит* $C^2([0, \infty))$ *и* $\varphi''(t) \geqslant 0$.

Для того чтобы дивизор D *был дивизором некоторой функции из класса* $[\rho, \infty]_{\alpha,\beta}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\exists \varepsilon(t) \to \rho : \forall x \in \boldsymbol{R}$, $\forall r$, $h > 0$:

$$\ln n_D(x;\ r,\ h) \leqslant C + r + \alpha^{-1}(\varepsilon(h)\beta(\nu \,|\ln h)) + \alpha^{-1}(\varepsilon(h(|x|))\beta(\ln h(\ x|))).$$

Теорема 3. *Пусть функции* $\alpha \in L$, $\beta \in L$, $\gamma \in L$ *и число* $\rho > 0$ *таковы, что* $\forall C > 0$ *функция* $\varphi(t) = \alpha^{-1}(C\beta(\gamma^\rho(t)))$ *принадлежит* $C^2([0, \infty))$ *и* $\varphi''(t) \geqslant 0$.

Для того чтобы дивизор D *был дивизором некоторой функции из класса* $[\rho, \infty)_{\alpha,\beta,\gamma}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\exists C > 0$:

$$\ln n_D(x;\ r,\ h) \leqslant C + r + \alpha^{-1}(C\beta(\gamma^\rho(h))) + \alpha^{-1}(C\beta(\gamma^\rho(h(|x|)))).$$

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $f \in [\rho, \infty)_{\alpha,\beta}$. Тогда найдется такая функция $\varepsilon(t) \to \rho$, что

$$\ln \ln^+ M_f(h) \leqslant \alpha^{-1}(\varepsilon(h)\beta(\ln h)) = \varphi(h).$$

Применяя лемму 2, получаем

$$\ln n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant C + r + \varphi(h+1) + \ln^+ h + 2\varphi(2h(|x|)).$$

Достаточно проверить, что

$$\text{а)}\ \varlimsup_{h\to\infty}\frac{\alpha(\varphi(h+1)+\ln^{+}h)}{\beta(\ln h)}\leqslant\rho;\quad \text{б)}\ \varlimsup_{|x|\to\infty}\frac{\alpha(2\varphi(2h(|x|))}{\beta(\ln h(|x|))}\leqslant\rho.$$

Имеем

$$\text{а)}\ \varlimsup_{h\to\infty}\frac{\alpha(\varphi(h+1)+\ln^{+}h)}{\beta(\ln h)}-\varlimsup_{h\to\infty}\frac{\alpha(\varphi(h+1)(1+o(1))}{\alpha(\varphi(h+1))}\times$$

$$\times\frac{\alpha(\varphi(h+1))}{\beta(\ln h)}=\varlimsup_{h\to\infty}\frac{\alpha(\varphi(h+1))}{\beta(\ln h)}=\varlimsup_{h\to\infty}\frac{\varepsilon(h+1)\,\beta(\ln(h+1))}{\beta(\ln h)}=$$

$$=\rho\varlimsup_{h\to\infty}\frac{\beta(\ln h(1+o(1)))}{\beta(\ln h)}=\rho;$$

$$\text{б)}\ \varlimsup_{|x|\to\infty}\frac{\alpha(2\varphi(2h(|x|)))}{\beta(\ln h(|x|))}=\varlimsup_{|x|\to\infty}\frac{\alpha(2\varphi(2h(|x|)))}{\alpha(\varphi(2h(|x|)))}\times$$

$$\times\frac{\alpha(\varphi(2h(|x|)))}{\beta(\ln h(|x|))}=\varlimsup_{|x|\to\infty}\frac{\alpha(\varphi(2h(|x|)))}{\beta(\ln h(|x|))}=$$

$$=\varlimsup_{|x|\to\infty}\frac{\varepsilon(2h(|x|))\,\beta(\ln 2h(|x|))}{\beta(\ln h(|x|))}=\rho\times$$

$$\times\varlimsup_{|x|\to\infty}\frac{\beta(\ln h(|x|)(1+o(1)))}{\beta(\ln h(|x|))}=\rho.$$

2. Пусть теперь D — такой дивизор, что

$$\ln n_D(x;\ r,\ h)\leqslant C+r+\alpha^{-1}(\varepsilon(h)\,\beta(\ln h))+$$
$$+\alpha^{-1}(\varepsilon(h(|x|))\,\beta(\ln h(|x|))).$$

Согласно условию $\exists\rho(t)\to\rho$: $\rho(t)\geqslant\varepsilon(t)$ и функция $\varphi(t)=\alpha^{-1}(\rho(t)\beta(\ln t))$ обладает неотрицательной второй производной. Применим лемму 5 с $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\varphi$. Это возможно ввиду леммы 6. По лемме 5 существует такая целая функция $F(z)$ с $D_F=D$, что

$$\ln\ln^{+}M_F(h)\leqslant C+C\varphi(Nh).$$

Имеем

$$\varlimsup_{h\to\infty}\frac{\alpha(C\varphi(Nh))}{\beta(\ln h)}=\varlimsup_{h\to\infty}\frac{\alpha(C\varphi(Nh))}{\alpha(\varphi(Nh))}\,\frac{\alpha(\varphi(Nh))}{\beta(\ln h)}=$$

$$=\varlimsup_{h\to\infty}\frac{\alpha(\varphi(Nh))}{\beta(\ln h)}=\varlimsup_{h\to\infty}\frac{\rho(Nh)\,\beta(\ln Nh)}{\beta(\ln h)}=\rho\varlimsup_{h\to\infty}\frac{\beta(\ln h(1+o(1)))}{\beta(\ln h)}=\rho.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть функция $f\in[\rho,\ \infty]_{\alpha,\beta,\gamma}$. Тогда найдется такая постоянная C, что $\ln\ln^{+}M_f(h)\leqslant\alpha^{-1}(C\beta(\gamma^{\rho}(h)))=\varphi(h)$. Применяя лемму 2, получаем $\ln n_{D_f}(x;r,h)\leqslant C+r+\varphi(h+1)+\ln^{+}h+2\varphi(2h(|x|))$. Имеем

$$\text{а)}\ \varlimsup_{h\to\infty}\frac{\alpha(\varphi(h+1)+\ln^{+}h)}{\beta(\gamma^{\rho}(h))}=\varlimsup_{h\to\infty}\frac{C\beta(\gamma^{\rho}(h+1))}{\beta(\gamma^{\rho}(h))}\leqslant$$

$$\leqslant C\varlimsup_{h\to\infty}\frac{\beta(\gamma^{\rho}(2h))}{\beta(\gamma^{\rho}(h))}\leqslant C\varlimsup_{h\to\infty}\frac{\beta(C'\gamma^{\rho}(h))}{\beta(\gamma^{\rho}(h))}\leqslant C''\varlimsup_{h\to\infty}\frac{\beta(h^{\rho}(h))}{\beta(\gamma^{\rho}(h))}<\infty;$$

б) $\overline{\lim\limits_{|x|\to\infty}} \dfrac{\alpha(2\varphi(2h(|x|)))}{\beta(h^\rho(h(|x|)))} \leqslant C_1 \overline{\lim\limits_{|x|\to\infty}} \dfrac{\alpha(\varphi(2h(|x|)))}{\beta(\gamma^\rho(h(|x|)))} =$

$$= CC_1 \overline{\lim_{|x|\to\infty}} \frac{\beta(\gamma^\rho(2h(|x|)))}{\beta(\gamma^\rho(h(|x|)))} \leqslant CC_1 \overline{\lim_{|x|\to\infty}} \frac{\beta(C'\gamma^\rho(h(|x|)))}{\beta(\gamma^\rho(h(|x|)))} < \infty.$$

2. Пусть D — такой дивизор, что $\ln n_D(x;\ r,\ h) \leqslant C + r + \varphi(h) + \varphi(h(|x|))$, где $\varphi(t) = \alpha^{-1}(C\beta(\gamma^\rho(t)))$.

Ввиду условия теоремы применима лемма 5 с $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$. Согласно этой лемме существует такая целая функция $F(z)$ с $D_F = D$, что $\ln\ln^+ M_F(h) \leqslant \hat{C} + \hat{C}\varphi(Nh)$. Имеем

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\alpha(\hat{C}\varphi(Nh))}{\beta(\gamma^\rho(h))} \leqslant \hat{C}_1 \overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\alpha(\varphi(Nh))}{\beta(\gamma^\rho(h))} =$$

$$= \hat{C}_1 \overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{C\beta(\gamma^\rho(Nh))}{\beta(h^\rho(h))} \leqslant \hat{C}_1 C \overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\beta(\hat{N}\gamma^\rho(h))}{\beta(\gamma^\rho(h))} < \infty.$$

Теорема доказана.

Примеры 1. Приведем примеры наборов α, β, ρ, для которых выполнены условия теоремы 2:

$$\alpha = \ln t,\ \beta = t,\ \rho > 1;$$
$$\alpha = \ln\ln t,\ \beta = t,\ \rho > 0;$$
$$\alpha = \ln_j(t),\ \beta = \ln_{j-1} t,\ \rho > 1$$

($\ln_j$ — j-я итерация логарифма), $j \geqslant 2$;

$$\alpha = \ln_j t,\ \beta = \ln_i(t),\ \rho > 0 \text{ при } j - i \geqslant 2.$$

2. Примеры наборов α, β, γ, ρ, для которых выполнены условия теоремы 3:

$$\alpha = t,\ \beta = t,\ \gamma = t,\ \rho \geqslant 1;$$
$$\alpha = \ln t,\ \beta = t,\ \gamma = t,\ \rho > 0.$$

Рассмотрим новые классы функций. Пусть $\alpha \in L$, $\beta \in L^0$, $\gamma \in L^0$. Через $[\rho,\ \sigma]_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначим класс целых функций, ограниченных в каждой полосе, и таких, что

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\alpha(\ln\ln^+ M_F(h))}{\beta(\gamma^\rho(h))} \leqslant \sigma.$$

Через $[\rho,\ \sigma)_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначим подкласс в $[\rho,\ \sigma]_{\alpha,\beta,\gamma}$, состоящий из функций, для которых

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\alpha(\ln\ln^+ M_F(h))}{\beta(\gamma^\rho(h))} < \sigma.$$

Ниже, чтобы избежать большого числа технических условий, мы ограничимся случаем $\alpha = t$, $\beta = t$, $\gamma = t$. Таким образом, $[\rho,\ \sigma]_{t,t,t}$ ($[\rho,\ \sigma)_{t,t,t}$) — это класс целых функций, для которых

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\ln\ln^+ M_F(h)}{h^\rho} \leqslant \sigma\ (<\sigma).$$

Через $[\rho,\ \sigma]^*_{t,t,t}$ ($[\rho,\ \sigma)^*_{t,i,t}$) обозначим подкласс в $[\rho,\ \sigma]_{t,t,t}$ ($[\rho,\ \sigma)_{t,t,t}$), состоящий из функций, удовлетворяющих условию $\exists\varepsilon\in(0,\ \rho)$, $\exists b_1,\ b_2>0 : \forall x\in \mathbf{R},\ \forall\xi=\xi(x)\in\mathbf{R},\ |x-\xi|\leqslant b_1$:

$$\ln|F(\xi)|\geqslant -\exp\left(b_2|\xi|^{\frac{\rho-\varepsilon}{1+\rho-\varepsilon}}\right).$$

Следующие теоремы дают описание дивизоров функций классов $[\rho,\ \sigma]^*_{t,t,t}$ и $[\rho,\ \sigma)^*_{t,t,t}$.

Теорема 4. *Пусть числа* ρ и σ *таковы, что* $\exists\varepsilon(t)\to\sigma$, $\exists\sigma(t)\to\sigma$, $\sigma(t)\geqslant\varepsilon(t)$: *функция* $\varphi(t)=\sigma(t)t^\rho$ *принадлежит* $C^2([0,\ \infty))$ *и* $\varphi''(t)\geqslant 0$.

Для того чтобы дивизор D *был дивизором некоторой функции из класса* $[\rho,\ \sigma]^*_{t,t,t}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\exists\varepsilon\in(0,\ \rho)$, $\exists\varepsilon(t)\to\sigma$, $\exists C>0$:

$$\ln n_D(x;\ r,\ h)\leqslant C+r+\varepsilon(h)h^\rho+C|x|^{\frac{\rho-\varepsilon}{1+\rho-\varepsilon}}.$$

Отметим, что условию теоремы удовлетворяют пары $(\rho,\ \sigma)$, если $\rho>1,\ \sigma\geqslant 0$.

Теорема 5. *Пусть* $\rho\geqslant 1,\ \sigma>0$. *Для того чтобы дивизор* D *был дивизором некоторой функции класса* $[\rho,\ \sigma)^*_{t,t,t}$, необходимо и достаточно, чтобы $\exists\varepsilon_1\in(0,\ \rho)$, $\exists\varepsilon_2\in(0,\ \sigma)$, $\exists C>0$:

$$\ln n_D(x;\ r,\ h)\leqslant C+r+(\sigma-\varepsilon_2)h^\rho+C|x|^{\frac{\rho-\varepsilon_1}{1+\rho-\varepsilon_1}}.$$

Доказательство теоремы 4.1. Пусть $f(z)\in[\rho,\ \sigma]^*_{t,t,t}$. Тогда $\exists\varepsilon(t)\to\sigma : \ln\ln^+ M_f(h)\leqslant\varepsilon(h)\cdot h^\rho=\varphi_1(h)$ и, кроме того, $\exists\varepsilon\in(0,\ \rho)$, $\exists b_1,\ b_2>0$: $\forall x\in\mathbf{R}$, $\exists\xi=\xi(x)\in\mathbf{R}$, $|x-\xi|\leqslant b_1$: $\ln|f(\xi)|\geqslant -\exp\left(b_2|\xi|^{\frac{\rho-\varepsilon}{1+\rho-\varepsilon}}\right)$.

Применим лемму 3. Согласно этой лемме

$$\ln n_D(x;\ r,\ h)\leqslant C+r+\varphi_1(h+1)+\ln^+ h+b_2(|x|+b_1)^{\frac{\rho-\varepsilon}{1+\rho-\varepsilon}}\leqslant$$

$$\leqslant C'+r+\varphi_1(h+1)+\ln^+ h+C'|x|^{\frac{\rho-\varepsilon}{1+\rho-\varepsilon}}.$$

Остается проверить, что $\varlimsup\limits_{h\to\infty}\dfrac{\varphi_1(h+1)+\ln^+ h}{h^\rho}\leqslant\sigma$. Действительно, $\varlimsup\limits_{h\to\infty}\dfrac{\varphi_1(h+1)+\ln^+ h}{h^\rho}=\varlimsup\limits_{h\to\infty}\dfrac{\varepsilon(h+1)(h+1)^\rho}{h^\rho}=\sigma$.

2. Пусть теперь D — такой дивизор, что

$$\ln n_D(x;\ r,\ h)\leqslant C+r+\varepsilon(h)\cdot h^\rho+C|x|^{\frac{\rho-\varepsilon}{1+\rho-\varepsilon}}.$$

Положим $\varphi_1(x)=\sigma(t)\cdot t^\rho$, где $\sigma(t)\searrow\sigma$, $\sigma(t)\geqslant\varepsilon(t)$ и $(\sigma(t)t^\rho)''\geqslant 0$; $\varphi_2(t)=\sigma t^{\rho-\varepsilon}$, $\varphi_3(t)=\sigma t^{\rho-\varepsilon/2}$. Тогда $\varphi_1(t)\geqslant\varphi_3(t)\geqslant\varphi_2(t)$, $\varphi_2(t)$ и $\varphi_3(t)$ удовлетворяют (16). Далее, если $\varphi(t)=ct^\alpha$, $\alpha>0$, то из (9) следует, что $h(t) = \left(\frac{\pi t}{2c}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$, $\varphi(h(t)) = c\left(\frac{\pi t}{2c}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$. Поэтому φ_2, φ_3 принадлежат P_2 и применима лемма 5. Согласно этой лемме существует такая целая функция $F(z)$ с $D_F = D$, что

$$\ln \ln^+ M_F(h) \leqslant C + \varphi_1(h+1) + B_2\varphi_3(Nh) + B_1\psi(Nh) =$$

$$= C + \sigma(h+1)\cdot(h+1)^\rho + B_1' h^{\rho\frac{\rho-\frac{\varepsilon}{2}}{\rho-\varepsilon}} + B_2' h^{\rho-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Имеем

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\sigma(h+1)(h+1)^\rho + B_1'\cdot h^{\rho\left(1-\frac{\varepsilon}{2(\rho-\varepsilon)}\right)} + B_2' h^{\rho-\frac{\varepsilon}{2}}}{h^\rho} =$$

$$= \overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\sigma(h+1)(h+1)^\rho}{h^\rho} = \sigma.$$

Остается показать, что $F(z)$ можно выбрать так, чтобы выполнялись соответствующие оценки снизу. Для этого заметим, что $F(z) = f(z)e^{-e^{C'}g(z)}$, где $f(z)$ — функция, существование которой утверждается в теореме 1, а $g(z)$ — функция из леммы 4, построенная по функции $\varphi_3(h_3(t)) = \hat{C}t^{\frac{\rho-\varepsilon/2}{1+\rho-\varepsilon/2}}$. Для $g(z)$ справедлива оценка $|g(z)| \leqslant C\exp\left(\hat{B}|z|^{\frac{\rho-\varepsilon/2}{1+\rho-\varepsilon/2}}\right)$. Согласно замечанию 1 функция $f(z)$ в некоторой точке x_j каждого квадрата Ω_j с центром на вещественной оси допускает оценку снизу $\ln|f(x_j)| \geqslant -\tilde{C}(1+x_j^2)^2 e^{\omega^{[1]}(x_j)}$.

Субгармоническая функция $\omega(z)$ в нашем случае имеет вид $\omega(z) = \tilde{\tilde{C}} + \varphi_1(|\operatorname{Im} z|) + A\varphi_2(h_2(|z|))$, так что

$$(1+x_j^2)^2 e^{\omega^{[1]}(x_j)} \leqslant C_1(1+x_j^2)e^{\hat{A}(|x_j|+1)^{\frac{\rho-\varepsilon}{1+\rho-\varepsilon}}} \leqslant C_2 e^{A'|x_j|^{\frac{\rho-\varepsilon/2}{1+\rho-\varepsilon/2}}}.$$

Имеем

$$\ln|F(x_j)| = \ln|f(x_j)| - e^{C'}\operatorname{Re} g(x_j) \geqslant \ln|f(x_j)| - e^{C'}|g(x_j)| \geqslant$$

$$\geqslant -Ce^{(A'+\hat{B})|x_j|^{\frac{\rho-\varepsilon/2}{1+\rho-\varepsilon/2}}} \geqslant -e^{B'|x_j|^{\frac{\rho-\varepsilon/2}{1+\rho-\varepsilon/2}}}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5 отличается от доказательства предыдущей теоремы только выбором функции $\varphi_1(t)$, которая в этом случае имеет вид $(\sigma - \varepsilon)t^\rho$ для некоторого $\varepsilon \in (0, \sigma)$.

Список литературы: 1. *Камынин И. П., Островский И. В.* О нулевых множествах эрмитово-положительных функций // Сиб. мат. журн. 1982. **23**, № 3. С. 66—82. 2. *Шеремета М. Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Изв. вузов. Сер. Математика. 1967. **57**, № 2. С. 100—108. 3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. С. 245. 4. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., 1968. С. 235. 5. *Skoda H.* Solution a croissance du second probl. de Cousin dans C^n // Ann. Inst. Fourier. 1971. **21**. P. 11—23.

Поступила в редколлегию 08.02.89