УДК 517.9

Ф. С. РОФЕ-БЕКЕТОВ

САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ОЦЕНКИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ТИПА ВО ВСЕМ R^n. 1. ВТОРОЙ ПОРЯДОК

В ряде работ [1—4] были получены достаточные условия существенной самосопряженности широких классов эллиптических операторов четных порядков в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$ и одновременно — сходимости интегралов энергетического типа для них с некоторым весовым множителем*. При обсуждении этих работ М. Ш. Бирман привлек мое внимание к вопросу о получении оценок для названных интегралов в норме графика соответствующего оператора, т. е. энергетических (или коэрцитивных) оценок, за что я искренне ему признателен.

В настоящей работе такие оценки устанавливаются путем более тщательного проведения рассуждений [1—4]. Предварительно мы выводим неравенства типа Гординга во всем пространстве (с весом) для функций, не предполагаемых финитными. Для выражений второго порядка, возможно, несимметричных, мы рассматриваем обобщенные по ряду направлений условия типа Титчмарша — Сирса [1, 2, 6], в том числе и типа [8].

Обозначаем $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$, $\|\cdot\|$ скалярное произведение и норму в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$, $(\cdot,\ \cdot)$, $|\cdot|$ — то же в $\boldsymbol{C}^n$. В интегралах по всему $\boldsymbol{R}^n$ пределов не указываем. Полагаем всюду $0\cdot\infty=0$.

§ 1. Уравнение Шредингера. **Теорема 1.** *Пусть оператор*

$$L=-\Delta+q(x) \tag{1}$$

с комплекснозначным локально ограниченным потенциалом q удовлетворяет при некоторых $\varepsilon>0$, $K>0$ условию

$$\operatorname{Re}\langle Lv,\ v\rangle\geqslant\langle L_{\varepsilon K}v,\ v\rangle \tag{2}$$

при любых $v\in C_0^\infty$, где $L_{\varepsilon K}=-\varepsilon\Delta-KQ(x)$,

$$1\leqslant Q(x)\leqslant\infty,\quad |Q^{-1/2}(x)-Q^{-1/2}(\xi)|\leqslant K'|x-\xi|. \tag{3}$$

Тогда при любом $\varepsilon_1\in(0,\ \varepsilon)$ найдется $C_1=C_1(\varepsilon_1,\ \varepsilon,\ K,\ K')$ такие, что справедливо неравенство типа Гординга

$$\operatorname{Re}\langle Q^{-1}Lu,\ u\rangle\geqslant\varepsilon_1\|Q^{-1/2}\nabla u\|^2-C_1\|u\|^2 \tag{4}$$

при $u\in D(L_{\max})=\{u\in L_2(\boldsymbol{R}^n): Lu\in L_2(\boldsymbol{R}^n)\}$ (Lu понимается в смысле обобщенных функций. Равенства $Q^{-1}(x)=0$, а впоследствии и $\nabla P(x)=0$ на множестве положительной меры не исключаются).

---

* Многочисленные признаки существенной самосопряженности дифференциальных операторов и литературные указания можно найти в монографиях [5—7, Ю. М. Березанского и Ю. Г. Кондратьева (1988), М. Рида и Б. Саймона (т. 2, 1978), в статьях [1—4].

Следствие 1. *При любом* $\varepsilon_2 > 0$ *найдется* $C_2 > 0$ *такое, что*

$$\langle Q^{-1}\nabla u, \nabla u\rangle \leqslant \varepsilon_2 \| Q^{-1}Lu\|^2 + C_2 \|u\|^2 \leqslant \leqslant \varepsilon_2 \|Lu\|^2 + C_2 \|u\|^2, \quad \forall u \in D(L_{\max}). \tag{5}$$

Замечание 1. Если в (2) допустить $\varepsilon = 0$, то утверждение теоремы 1 перестает быть верным даже при $Q \equiv 1$, $\operatorname{Im} q \equiv 0$, т. е. когда L полуограничен на C_0^∞, хотя, как показал А. Я. Повзнер еще в 1953 г. (см. также [7, 5]), оператор Шредингера (1) с непрерывным потенциалом в этом случае существенно самосопряжен. Пример одномерного позитивного на $C_0^\infty(1, \infty)$ оператора Шредингера $Lu = -u'' + q(x)u$, $q(x) = 2x^{-2} - 4x^2(7\sin x^4 + 4x^4\cos x^4)(2 + \cos x^4)^{-1}$, для которого не при всех $u \in D(L_{\max})$ существует предел интеграла Дирихле

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x (|u'|^2 + q(t)|u|^2)\,dt, \tag{6}$$

принадлежит Дж. Мозеру. Мы сейчас покажем, что также не для всех $u \in D(L_{\max})$ будет $u' \in L_2(1, \infty)$. Позитивность L следует из того. что уравнение $Lv = 0$ имеет решение $v = x^2(2 + \cos x^4) \neq 0$, $1 < x < \infty$, Второе решение $u(x) = v(x)\int_x^\infty v^{-2}(t)\,dt \in D(L_{\max})$, однако легко видеть, что $\int^\infty |u'(x)|^2\,dx = \infty$.

Доказательство теоремы 1. В [2, с. 742] построена такая функция $\varphi_R(x) \in C_0^\infty$, что $\varphi_R(x) = 0$, $(|x| \geqslant R)$; $0 \leqslant \varphi_R(x) \leqslant Q^{-1/2} \times (x) \leqslant 1$; $|\nabla\varphi_R(x)| \leqslant K_1 = K_1(K')$; $\varphi_R(x) \to Q^{-1/2}(x)$ локально равномерно по $x \in \boldsymbol{R}^n$ при $R \to \infty$. Пусть $u \in D(L_{\max}) \cap C^\infty$. Положим $u_R = \varphi_R(x)u(x) \in C_0^\infty$. Как показано в [2, с. 747]*,

$$\varepsilon^{-1}\operatorname{Re}\langle Lu_R, u_R\rangle + \varepsilon^{-1}K\|u\|^2 \geqslant \|\nabla u_R\|^2. \tag{7}$$

Но при любом $\alpha > 0$

$$\|\nabla u_R\|^2 = \|\varphi_R\nabla u + u\nabla\varphi_R\|^2 \geqslant \|\varphi_R\nabla u\|^2 - 2\|u\nabla\varphi_R\|\cdot\|\varphi_R\nabla u\| \geqslant \geqslant (1-\alpha^2)\|\varphi_R\nabla u\|^2 - \alpha^{-2}K_1^2\|u\|^2, \tag{8}$$

а так как $\bar u_R Lu_R = \varphi_R^2\bar u Lu + |u\nabla\varphi_R|^2 + 2i\operatorname{Im}(u\nabla\varphi_R, \varphi_R\nabla u) - \nabla(|u|^2 \times \varphi_R\nabla\varphi_R)$, то в силу теоремы Остроградского—Гаусса и свойств φ_R

$$\operatorname{Re}\langle Lu_R, u_R\rangle \leqslant \operatorname{Re}\langle\varphi_R^2 Lu, u\rangle + K_1^2\|u\|^2.$$

Отсюда и из (7), (8) при $u \in D(L_{\max}) \cap C^\infty$ следует:

$$\operatorname{Re}\langle\varphi_R^2 Lu, u\rangle \geqslant \varepsilon(1-\alpha^2)\langle\varphi_R^2\nabla u, \nabla u\rangle - [K + K_1^2(1+\varepsilon\alpha^{-2})]\cdot\|u\|^2. \tag{9}$$

---

* В [2] $\operatorname{Im} q \equiv 0$. Сейчас в силу (2) имеем: $\|\nabla u_R\|^2 = -\langle\Delta u_R, u_R\rangle = \varepsilon^{-1}\langle(L_{\varepsilon K} + KQ)u_R, u_R\rangle \leqslant \varepsilon^{-1}\operatorname{Re}\langle Lu_R, u_R\rangle + \varepsilon^{-1}K\|u\|^2$.

Покажем, что (9) верно для всех $u \in D(L_{\max})$. Для этого заметим, что $D(L_{\max}) \subset W^2_{2,\,\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$ (см., например, [6]), и положим $u_{R,\,\delta}(x) = \psi\left(\frac{|x|}{R}\right) u_\delta(x)$, где $u_\delta(x)$ — усреднение функции u с ядром из C_0^∞ по шару $|x-y| \leqslant \delta$ (так называемое усреднение по Соболеву), $\psi \in C_0^\infty$,

$$0 \leqslant \psi(|x|) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ \leqslant 1, & 1 < |x| \leqslant 2, \\ 0, & |x| \geqslant 2. \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, $u_{R,\,\delta} \in C_0^\infty$ и в (9) можно подставить $u_{R,\,\delta}(x)$ вместо u, а затем перейти к пределу при $\delta \to 0$. После этого в (9) можно отбросить множитель ψ, так как $\psi\left(\frac{|x|}{R}\right) = 1$ при $x \in \operatorname{supp} \varphi_R$, и (9) доказано в общем случае. Теперь, переходя в (9) к пределу при $R \to \infty$, получаем (4) с

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(1-\alpha^2), \quad C_1 = K + (1 + \varepsilon\alpha^{-2}) K_1^2,$$

где $K_1 = K_1(K')$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть оператор Шредингера (1) и некоторая непрерывная функция $0 \leqslant Q^{-1/2}(x) \leqslant 1$ таковы, что $\|Q^{-1/2}\nabla u\| < \infty$ при $u \in D(L_{\max})$ и $D(L_{\max})$ принадлежит локальному пространству С. Л. Соболева $W^2_{2,\,\mathrm{loc}}$ (Это выполнено, например, при условиях теоремы 1). Тогда, если существуют кусочно гладкая функция $0 \leqslant P(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$ и последовательность областей $\Omega_k = \{x \in \boldsymbol{R}^n : P(x) < N_k\}$, $N_k \to \infty$ такие, что*

$$|\nabla P(x)| \leqslant C N_k Q^{-1/2}(x), \quad x \in \Omega_k, \tag{11}$$

то интеграл Дирихле $D_q[u, v]$, отвечающий операции (1), существует для любых $u, \bar{v} \in D(L_{\max})$ в смысле суммирования с ядром $[(1 - P(x) N_k^{-1})_+]^\gamma$ при любом $\gamma \geqslant 1$:

$$D_q[u, v] \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{N_k \to \infty} \int_{\Omega_k} \left(1 - \frac{P(x)}{N_k}\right)^\gamma \{(\nabla u, \nabla v) + q(x) u \bar{v}\}\, dx$$

и справедливы равенства

$$D_q[u, v] = \langle Lu, v\rangle, \quad D_{\bar{q}}[v, u] = \langle JLJv, u\rangle,$$

где J — оператор комплексного сопряжения. Следовательно,

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, JLJv\rangle, \ \forall u, \ \bar{v} \in D(L_{\max}),$$

т. е. оператор Шредингера (1) $L_{\max}$ J-самосопряжен в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$, а при $q = \bar{q}$ — самосопряжен.*

---

* В смысле [7]. В частности, $L_{\max} = L_{\min}$ (т. е. замыканию с C_0^∞).

Следствие 2. При $\operatorname{Re} q(x) \geqslant \mathrm{const} > -\infty$, $\operatorname{Im} q(x) \geqslant C$ (*или* $\leqslant C$) *интеграл Дирихле для* L *сходится абсолютно*:

$$D[u, v] = \int \{(\nabla u, \nabla v) + q(x) u\bar{v}\} dx$$

(Этот факт известен [7, п. 16]).

Доказательство теоремы 2. Так как $\bar{v}Lu \in L_1(\boldsymbol{R}^n)$, то достаточно показать, что $\lim J_k = 0$, где

$$J_k \stackrel{\text{def}}{=} \int \left(1 - \frac{P(x)}{N_k}\right)_+^\gamma \{\nabla u, \nabla v) + q(x) u\bar{v} - \bar{v}Lu\} dx = \int \left(1 - P(x) N_k^{-1}\right)_+^\gamma \times$$
$$\times \nabla(\bar{v}\nabla u) dx = \gamma N_k^{-1} \int\limits_{\Omega_k} \left(1 - \frac{P(x)}{N_k}\right)^{\gamma-1} \bar{v}(\nabla u, \nabla P(x)) dx.$$

(Здесь было произведено интегрирование по частям). Отсюда, в силу (5) и (11) при $N_k \geqslant N_m^2 \to \infty$ имеем

$$|J_k|^2 \leqslant C^2\gamma^2 \| v \|^2 \left\{N_m^2 N_k^{-2} \int\limits_{\Omega_m} Q^{-1}(x) |\nabla u|^2 dx + \int\limits_{R^n \setminus \Omega_m} Q^{-1}(x) |\nabla u|^2 dx\right\} \to 0,$$

и теорема 2 доказана. Ее требования можно ослабить, см. § 2.

§ 2. Оператор общего вида. Рассматриваются эллиптическое дифференциальное выражение

$$Mu = -\nabla(B(x)\nabla u) + i\{\nabla(b(x)u) + (\nabla u, c(x))\} + p(x)u, \qquad (12)$$

формально сопряженное к нему

$$M^+u = -\nabla(B^*(x)\nabla u) + i\{(\nabla u, b(x)) + \nabla(uc(x))\} + \bar{p}(x)u, \qquad (13)$$

и формально самосопряженное выражение («оператор сравнения»)

$$L_{\varepsilon K}u = -\varepsilon\{\nabla(A(x)\nabla u) - i[\nabla(a(x)u) + (\nabla u, a(x))] -$$
$$- |A^{-1/2}(x)a(x)|^2 u\} - KQ(x)u. \qquad (14)$$

Матрица $B(x)$ не предполагается эрмитовой, вектор-функции $b(x)$ и $c(x)$ принимают значения в $\boldsymbol{C}^n$, $a(x) \in \boldsymbol{R}^n$. Коэффициенты выражения M считаем достаточно гладкими для того, чтобы $D(M_{\max})$ и $D(M_{\max}^+)$ принадлежали $W_{2,\mathrm{loc}}^2$. Для этого, как известно, достаточно потребовать $p \in L_{\infty,\mathrm{loc}}$, $b, c \in C^1$, $B(x) \in C^4$, а при $B = B^* > 0$, $-B \in C^2$. Полагаем также $a \in C^1$, $0 < A = A^* \in C^2$, $0 \leqslant Q^{-1/2}(x) \leqslant 1$, $Q^{-1/2}$ — кусочно гладкая и, тем самым, $Q^{-1/2} \in \mathrm{Lip}_{1,\mathrm{loc}}$. Обозначаем $B = B_R + iB_J$, $\frac{1}{2}(b + \bar{c}) = h = h_R + ih_J$, где $B_R = B_R^*$, $B_J = B_J^*$, h_R, $h_J \in \boldsymbol{R}^n$.

Лемма. *Пусть при некоторых* $\varepsilon > 0$, $K \geqslant 0$ *выполняется одно из двух следующих неравенств для* $u \in C_0^\infty$:

либо
$$\left.\begin{matrix}\operatorname{Re}\langle Mu, u\rangle \\ |\langle Mu, u\rangle|\end{matrix}\right\} \geqslant \langle L_{\varepsilon K}u, u\rangle \qquad \begin{matrix}(15_1)\\(15_2)\end{matrix}$$

и пусть φ — *кусочно гладкая, финитная в* $\boldsymbol{R}^n$ *функция*, $\varphi Q^{1/2} \in L_\infty$.

Тогда для любой $u \in D(M_{\max})$ справедливо при любом $\alpha > 0$ одно из следующих двух неравенств, соответственно условиям (15_1) или (15_2), если обозначить $\boldsymbol{D} = A^{1/2}(x)\nabla - iA^{-1/2}a(x)$:

$$\operatorname{Re}\langle \varphi^2 Mu,\ u\rangle \geqslant \varepsilon(1-\alpha^2)\,\|\varphi \boldsymbol{D}u\|^2 - \{K\,\|Q^{1/2}\varphi u\|^2 + \varepsilon(\alpha^{-2}-1)\,\|uA^{1/2}\nabla\varphi\|^2 + \|uB_R^{1/2}\nabla\varphi\|^2\} - 2\operatorname{Im}\langle\varphi(B_J\nabla - ih_J)\,u,\ u\nabla\varphi\rangle; \tag{16_1}$$

$$|\langle \varphi^2 Mu,\ u\rangle| \geqslant \varepsilon(1-\alpha^2)\,\|\varphi \boldsymbol{D}u\|^2 - \{K\,\|Q^{1/2}\varphi u\|^2 + \varepsilon(\alpha^{-2}-1)\,\|uA^{1/2}\nabla\varphi\|^2 + \|u(B\nabla\varphi,\ \nabla\varphi)^{1/2}\|^2\} - 2\,|\operatorname{Im}\langle\varphi(B_J\nabla - ih_J)\,u,\ u\nabla\varphi\rangle - i\operatorname{Im}\langle\varphi(B_R\nabla - ih_R)\,u,\ u\nabla\varphi\rangle|. \tag{16_2}$$

Лемма верна и для нефинитных φ, если финитна $u \in D(M_{\max})$.

Доказательство. Пусть сначала $u \in D(M_{\max}) \cap C^\infty$, $0 \leqslant \varphi \in C_0^\infty$. Положим $u_\varphi(x) = \varphi(x)\,u(x) \in C_0^\infty$. Тогда $\boldsymbol{D}u_\varphi = \varphi\boldsymbol{D}u + uA^{1/2}\nabla\varphi$. Поэтому при $\forall\alpha > 0$

$$\|\boldsymbol{D}u_\varphi\|^2 \geqslant (1-\alpha^2)\,\|\varphi\boldsymbol{D}u\|^2 - (\alpha^{-2}-1)\,\|uA^{1/2}\nabla\varphi\|^2. \tag{17}$$

С другой стороны, интегрируя по частям, имеем

$$\|\boldsymbol{D}u_\varphi\|^2 = \frac{1}{\varepsilon}\langle(L_{\varepsilon K} + KQ)\,u_\varphi,\ u_\varphi\rangle \leqslant \frac{1}{\varepsilon}K\,\|\varphi Q^{1/2}u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\begin{cases}\operatorname{Re}\langle Mu_\varphi,\ u_\varphi\rangle\\ |\langle Mu_\varphi,\ u_\varphi\rangle|\end{cases}. \tag{18}$$

А так как

$$\bar u_\varphi Mu_\varphi = \varphi^2\bar u Mu + |u|^2(B\nabla\varphi,\ \nabla\varphi) - \nabla(\varphi\,|u|^2\,B\nabla\varphi) - \bar u_\varphi((B\nabla - ib)\,u,\ \nabla\varphi) + u_\varphi(\nabla\varphi,\ (B^*\nabla - ic)\,u) = \varphi^2\bar u Mu + |u|^2(B\nabla\varphi,\ \nabla\varphi) + 2\operatorname{Im}\{\bar u_\varphi((B_J\nabla - ih_J)\,u,\ \nabla\varphi)\} - 2i\operatorname{Im}\{\bar u_\varphi((B_R\nabla - ih_R)\,u,\ \nabla\varphi)\} - \nabla(\varphi\,|u|^2\,B\nabla\varphi), \tag{19}$$

где интеграл от последнего слагаемого равен нулю, имеем из (17)—(19) при условиях $(15_{1,2})$ соответственно неравенства $(16_{1,2})$, установленные пока для гладких функций. В общем случае они получаются предельным переходом от специальным образом сглаженных функций: u аппроксимируем усреднениями по Соболеву, а φ и одновременно $\nabla\varphi$ — функциями $\hat\varphi_\delta \in C_0^\infty$ и $\nabla\hat\varphi_\delta$ такими, что $0 \leqslant \hat\varphi_\delta \leqslant \varphi$ и $(\hat\varphi_\delta Q^{1/2}) \to \varphi Q^{1/2} \in L_\infty$ снизу. Конструкция $\hat\varphi_\delta$ дана леммой 0.1 из [3]. Лемма доказана полностью, так как при доказательстве использована лишь финитность произведения $u_\varphi = \varphi(x)\,u(x)$, а не того или другого сомножителя. (Легко видеть, что при условии (15_1) $B_R(x) > 0$).

Отметим, что операция M (12) допускает эквивалентную запись:

$$Mu = -\nabla(B\nabla u) + i\{\nabla(hu) + (\nabla u,\ h)\} + \left\{p + i\nabla\left(\frac{b-\bar c}{2}\right)\right\}u. \tag{20}$$

Теорема 3. *При условиях леммы пусть*

$$A(x) \geqslant (BB^*(x) + B^*B(x))^{1/2} = \sqrt{2}\,(B_R^2 + B_J^2)^{1/2} \tag{21}$$

и пусть существуют кусочно гладкая функция $0 \leqslant P(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$ *и монотонная последовательность* $0 < N_x \to \infty$ *такие, что*

$$|A^{1/2}(x)\nabla Q^{-1/2}(x)| \leqslant K' = \mathrm{const}; \tag{22}$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x: P(x) < N_k} |Q^{-1/2}(x) A^{1/2}(x) \nabla P(x)| \leqslant C N_k \to \infty; \tag{23}$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\substack{x: P(x) < N_k \\ x < k < \infty}} |(Q^{-1/2}(h_J - B_J A^{-1} a),\ \nabla(Q^{-1/2}(1 - P N_k^{-1})))| < C, \tag{24}$$

а в случае (15_2), *кроме того*,

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\substack{x: P(x) < N_k \\ 1 \leqslant k < \infty}} |Q^{-1/2}(h_R - B_R A^{-1} a),\ \nabla(Q^{-1/2}(1 - P N_k^{-1})))| < C. \tag{25}$$

Тогда при любом $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ *найдется* $C_1 = C_1(\varepsilon_1, \varepsilon, K, K', C)$ *такое, что при* $u \in D(M_{\max})$ *справедливо неравенство*

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{Re}\langle Q^{-1} M u,\ u\rangle \\ |\langle Q^{-1} M u,\ u\rangle| \end{matrix}\right\} \geqslant \varepsilon_1 \| Q^{-1/2} \boldsymbol{D} u \|^2 - C_1 \| u \|^2, \tag{$26_{1,2}$}$$

где 1-й или 2-й варианты отвечают условиям $(15_{1,2})$ *соответственно. Одновременно неравенства* $(26_{1,2})$ *справедливы при условиях теоремы и для* *$u \in D(M^+_{\max})$, *если заменить в них* M на M^+.

Замечание 2. В силу (21) — (23) условия (24), (25) выполнены, если, соответственно,

$$\boldsymbol{Z}\,|Q^{-1/2} A^{-1/2}(h_J - B_J A^{-1} a)| \leqslant C,\ \ |Q^{-1/2} A^{-1/2}(h_R - B_R A^{-1} a)| \leqslant C \tag{$27_{1,2}$}$$

Доказательство. Положим в лемме $\varphi(x) = Q^{-1/2}(x) \times \times \left(1 - \frac{P(x)}{N_k}\right)_+$, и перейдем к пределу в $(16_{1,2})$ при $N_k \to \infty$, замечая, что в силу условий теоремы $0 \leqslant \varphi Q^{1/2} \leqslant 1$,

$$\max\{2^{1/4} |B_R^{1/2}\nabla\varphi|,\ |(B\nabla\varphi,\ \nabla\varphi)|^{1/2}\} \leqslant |A^{1/2}\nabla\varphi| \leqslant A^{1/2}\nabla Q^{-1/2}| + \\ + |Q^{-1/2} A^{1/2} \nabla P / N_k| \leqslant K' + C; \tag{28_1}$$

$$|\langle \varphi(B_J\nabla - i h_J) u,\ u\nabla\varphi\rangle| \leqslant |\langle \varphi A^{-1/2} B_J A^{-1/2} \boldsymbol{D} u; \\ u A^{1/2}\nabla\varphi\rangle| + |\langle i\varphi A^{-1/2}(-h_J + B_J A^{-1} a) u,\ u A^{1/2}\nabla\varphi\rangle| \leqslant \\ \leqslant 2^{-1}\beta^2 \|\varphi \boldsymbol{D} u\|^2 + 2^{-2}\beta^{-2}(K' + C)^2 \|u\|^2 + \|u\|^2 \{\mathrm{vrai\,sup}\,|Q^{-1/2} \times \\ \times ((h_J - B_J A^{-1} a),\ \nabla(Q^{-1/2}(1 - P N_k^{-1})))|\}, \tag{28_2}$$

так как $|A^{-1/2} B_J A^{-1/2}| \leqslant 2^{-1/2}$. Учитывая (24) и произвольную малость $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, получаем (26_1) из (16_1). Оценивая в (16_2) последнее слагаемое по схеме (28_2) с учетом (25) и так как $|A^{-1/2} B_R A^{-1/2}| \leqslant \leqslant 2^{-1/2}$ и используя (28_1) и (28_2), получаем (26_2). Теорема доказана, ибо $(15_{1,2})$ справедливы одновременно и для M^+.

* Следовательно, $\|Q^{-1/2}\boldsymbol{D}w\| < \infty$ при $w \in D(M_{\max}) + D(M^+_{\max})$.

Теорема 4. *Пусть операция* M (12) *и кусочно гладкая функция* $0 \leqslant P(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$ *таковы, что для некоторой монотонной последовательности* $0 < N_k \to \infty$ *и финитной кусочно гладкой функции* $\theta(t) \geqslant 0$, $\theta(0) = 1$, $\theta(t) = 0$ *при* $t \geqslant 1$,

$$\int \left| \theta'\left(\frac{P(x)}{N_k}\right) \right| \cdot |((B(x)\nabla - ib(x))u, \nabla P(x))|^2 dx = O(N_k^2) \qquad (29)$$

при каждом $u \in D(M_{\max})$. *Тогда интеграл Дирихле* $D_M[u, v]$, *отвечающий операции* M, *существует в смысле суммирования с ядром* $\theta_1(P(x)/N_k)$ *при любых* $u \in D(M_{\max})$, $v \in W^1_{2, \mathrm{loc}} \cap L_2$:

$$D_M[u, v] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{N_k \to \infty} \int \theta_1(P(x)/N_k)\{((B\nabla - ib)u, \nabla v) + i(\nabla u, c)\bar{v} + p(x)u\bar{v}\}\, dx, \qquad (30)$$

причем $D_M[u, v] = \langle Mu, v\rangle$; $\theta_1(t) = \theta(t) - \theta'(+0)(t - t^2/\delta)_+$.

Доказательство. Будем считать, что $\theta'(+0) = 0$, так как в противном случае можно заменить $\theta(t)$ на $\theta_1(t) = \theta(t) - \theta'(+0) \times (t - t^2/\delta)_+$, где $0 < \delta \leqslant 1$ и $|\theta'(t)| \geqslant \frac{1}{2}|\theta'(+0)|$ при $t \in (0, \delta)$. Тогда $\theta_1'(+0) = 0$ и $|\theta_1'(t)| \leqslant 3|\theta'(t)|$ при $t \in (0, 1)$, а потому (29) справедливо и при замене θ на θ_1. Так как $\bar{v}Mu \in L_1$, то достаточно показать, что $J_k \to 0$, $(N_k \to \infty)$, где

$$J_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int \theta(P(x)/N_k)\{((B(x)\nabla - ib(x))u, \nabla v) + i(\nabla u, c(x))\bar{v} + p(x)u\bar{v} - \bar{v}Mu\}\, dx = \int \theta(P(x)/N_k)\{((B\nabla - ib)u, \nabla v) + \bar{v}\nabla((B\nabla - ib)u)\}\, dx = \int \theta(P(x)/N_k)\nabla(\bar{v}(B\nabla - ib)u)\, dx = -\frac{1}{N_k}\int \theta'(P(x)/N_k)\bar{v}((B\nabla - ib)u, \nabla P)\, dx.$$

Отсюда следует в силу (29):

$$|J_k|^2 \leqslant N_k^{-2}\int |\theta'(P/N_k)| \cdot |v|^2 dx \cdot \int |\theta'(P/N_k)| \times |((B\nabla - ib)u, \nabla P)|^2 dx = N_k^{-2} \cdot o(\|v\|^2) \cdot O(N_k^2) \to 0.$$

Теорема доказана.

Следствие 3. *Если при каждом* $v \in D(M^+_{\max})$ *при* $N_k \to \infty$

$$\int |\theta'(P(x)/N_k)| \cdot |((B^*(x)\nabla - ic(x))v, \nabla P)|^2 dx = O(N_k^2), \qquad (31)$$

то при $\forall u \in W^1_{2, \mathrm{loc}} \cap L_2(\boldsymbol{R}^n)$ *существует интеграл Дирихле*

$$D_{M^+}[v, u] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{N_k \to \infty} \int \theta_1(P(x)/N_k)\{((B^*\nabla - ic)v, \nabla u) + i(\nabla v, b)\bar{u} + \bar{p}(x)v\bar{u}\}\, dx, \qquad (32)$$

причем $D_{M^+}[v, u] = \langle M^+v, u\rangle$.

Следствие 4. *Если одновременно выполнены условия теоремы 4 и следствия 3, то при любых* $u \in D(M_{\max})$, $v \in D(M^{+}_{\max})$

$$D_M[u, v] = \overline{D_{M^+}[v, u]}, \tag{33}$$

а потому $\langle Mu, v\rangle = \overline{\langle M^+v, u\rangle} = \langle u, M^+v\rangle$ *и* $M_{\max} = M_{\min}$, $M^{+}_{\max} = M^{+}_{\min}$. *В частности, если выражение* M *формально самосопряжено, то оператор* M *на* C_0^∞ *существенно самосопряжен, а* $M_{\max}$ *самосопряжен в* $L_2(\boldsymbol{R}^n)$.

Доказательство. Равенство (33) непосредственно вытекает из (30) и (32) в силу приведения подобных членов, а остальные утверждения следуют из (33) с очевидностью.

Укажем достаточные условия, при которых выполнено (29), т. е. применима теорема 4 (ср. [3]):

Теорема 5. *Если оператор* M *имеет вид* (20) *(или* (12) *с* $b(x) = \overline{c}(x)$*), то при условиях теоремы 3* и (27) *с заменой* (23) *более жестким требованием*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x:P(x)<N_k} | Q^{1/2}(x)\, A^{1/2}(x)\, \nabla P(x) | \leqslant CN_k \to \infty \tag{34}$$

выполняются одновременно условия (29) *и* (31). *Если же* M *имеет вид* (12) *с* $b \neq \overline{c}$, *то, кроме* (34), *следует потребовать*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x:P(x)<N_k} | ((b(x) - \overline{c(x)}),\ \nabla P(x)) | \leqslant CN_k \to \infty \tag{35}$$

для обеспечения (29), (31), *а* (35) *обеспечивается требованием*

$$| Q^{-1/2}(x)\, A^{-1/2}(x)\, (b(x) - \overline{c(x)}) | < C. \tag{36}$$

Доказательство. Имеем $B\nabla - ib = BA^{-1/2}\boldsymbol{D} + i\,(BA^{-1}a - b) = BA^{-1/2}\boldsymbol{D} + (h_J - B_J A^{-1}a) - i\,(h_R - B_R A^{-1}a) + \frac{1}{2}\, i\,(\overline{c} - b)$. Соответственно левая часть (29) разбивается на слагаемые, каждое из которых допускает оценку вида CN_k^2, чем устанавливается (29) и аналогично — (31). Действительно, рассмотрим, учитывая (34):

$$\int \left| \theta'\left(\frac{P(x)}{N_k}\right) \right| \cdot | (BA^{-1/2}\boldsymbol{D}u,\ \nabla P) |^2\, dx \leqslant$$
$$\leqslant C \int\limits_{P(x)<N_k} | (Q^{-1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})\, \boldsymbol{D}u,\ Q^{1/2}A^{1/2}\nabla P) |^2\, dx \leqslant$$
$$\leqslant CN_k^2 \| Q^{-1/2}\boldsymbol{D}u \|^2 = O(N_k^2),$$

так как в силу $(26_{1,2})$ $\| Q^{-1/2}\boldsymbol{D}u \|^2 < \infty$. Остальные слагаемые оцениваются аналогично. Например, в силу (34) и (27) имеем

$$\int | \theta'(P(x)/N_k) | \cdot | ((h_R - B_R A^{-1}a)\, u,\ \nabla P) |^2\, dx \leqslant$$
$$\leqslant C \int\limits_{P(x)<N_k} | Q^{-1/2}A^{-1/2}(h_R - B_R A^{-1}a)\, u,\ Q^{1/2}A^{1/2}\nabla P) |^2\, dx \leqslant C_1 \|u\|^2 N_k^2.$$

Теорема доказана. Ее условия обеспечивают применимость теоремы 4 и одновременно — справедливость $(26_{1,2})$, а потому — конечность интеграла энергетического типа $\langle Q^{-1}\boldsymbol{D}u,\ \boldsymbol{D}u\rangle$ при $u \in D(M_{max}) + D(M^{+}_{\max})$. Однако для справедливости (29) и применимости теоремы 4 последнее не обязательно, как и условие (22), от которого можно избавиться с помощью подходящего изменения потенциала оператора сравнения.

Теорема 6. *Пусть для операции* M (12) *при некоторых* $\varepsilon > 0$, $K \geqslant 0$ *и любых* $u \in C_0^\infty$ *выполняется неравенство*

$$\operatorname{Re}\langle Mu,\ u\rangle \geqslant \langle \Lambda_{\varepsilon K}u,\ u\rangle \tag{37}$$

где

$$\Lambda_{\varepsilon K} = L_{\varepsilon K} + (2^{-1/2} + \varepsilon)\, Q(x)\, |A^{1/2}(x)\, \nabla Q^{-1/2}(x)|^2, \tag{38}$$

операция $L_{\varepsilon K}$ *задана формулами* (14) *и* (21), *кусочно гладкие функции* $0 \leqslant Q^{-1/2}(x) \leqslant 1$ *и* $0 \leqslant P(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$ *удовлетворяют условиям* (23) *и* (24), *а также*

$$|A^{-1/2}(x)\, B_J(x)\, \nabla Q^{-1/2}(x)| \leqslant K'/\sqrt{2} = \mathrm{const}. \tag{39}$$

Тогда найдутся такие числа $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon) > 0$, $C_1 = C_1(\varepsilon,\ C,\ K,\ K') \geqslant 0$, *что при любых* $u \in D(M_{\max})$

$$\operatorname{Re}\langle Q^{-1}Mu,\ u\rangle \geqslant \varepsilon_1\, \| Q^{-1/2}\boldsymbol{D}u\|^2 + \varepsilon_2\, \|uA^{1/2}\nabla Q^{-1/2}\|^2 - C_1\, \|u\|^2. \tag{40}$$

Если же (23) *заменить более жестким требованием* (34), *то при* (35) *и* (27_1) *обеспечиваются условия применимости теоремы 4 и ее следствий. В этом случае в частности* $M_{\max} = M_{\min}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\Lambda_{\varepsilon K}$ отличается от $L_{\varepsilon K}$ лишь добавкой к потенциалу (38), первый вариант леммы остается справедливым при замене условия (15_1) на (37) и одновременной добавке к правой части (16_1) слагаемого

$$(2^{-1/2} + \varepsilon)\, \|Q^{1/2}\varphi u A^{1/2}\nabla Q^{-1/2}\|^2.$$

Отсюда, полагая $\varphi = Q^{-1/2}(x)\left(1 - \frac{P(x)}{N}\right)_+$ и учитывая справедливость (28_2) при условии (39) вместо (22), (но с учетом (24)), а также учитывая, что $B_R \leqslant 2^{-1/2}A$, получаем следующую оценку, где $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ — любые, $N = N_k$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle (1 - P(x)/N)_+^2 Q^{-1}(x)\, Mu,\ u\rangle &\geqslant \varepsilon(1 - \alpha^2)\, \|(1 - P(x)/N)_+ \times \\ &\times Q^{-1/2}\boldsymbol{D}u\|^2 - K\|u\|^2 - [\varepsilon(\alpha^{-2} - 1) + 2^{-1/2}]\{(1 + \beta^2) \times \\ \times \|(1 - P/N)_+ uA^{1/2}\nabla Q^{-1/2}\|^2 &+ (1 + \beta^{-2})\, \|uQ^{-1/2}A^{1/2}\nabla P/N\|^2_{\{P(x) < N\}}\} + \\ + (2^{-1/2} + \varepsilon)\, \|(1 - P/N)_+ uA^{1/2}\nabla Q^{-1/2}\|^2 &- \beta^2\, \|(1 - P/N)_+ Q^{-1/2}\boldsymbol{D}u\|^2 - \\ &- 2^{-1}\beta^{-2}(K' + C)^2\, \|u\|^2 - 2C\, \|u\|^2. \end{aligned} \tag{41}$$

Выберем теперь $\alpha < 1$ достаточно близким к 1, а $\beta > 0$ — достаточно малым, чтобы при данном $\varepsilon > 0$ было $\varepsilon_2 = 2^{-1/2} + \varepsilon - [\varepsilon(\alpha^{-2} - 1) +$

$+2^{-1/2}](1+\beta^2)>0$, $\varepsilon_1=\varepsilon(1-\alpha^2)-\beta^2>0$, после чего, учитывая (23) и переходя к пределу при $N_k\to\infty$, получаем из (41) неравенство (40) с некоторым $C_1\geqslant 0$, не зависящим от u. Поэтому в частности $\|Q^{-1/2}\boldsymbol{D}u\|<\infty$, и если выполнены условия (34), (35), (24) и (27), то применимость теоремы 4 и ее следствий доказываются точно так же, как и в теореме 5. Теорема доказана. Ее следствием является

Теорема 7. *Пусть для операции M (12) при некоторых $\varepsilon>0$, $K\geqslant 0$ и любых $u\in C_0^\infty$ выполняются* (37) *и* (38), *но с*

$$L_{\varepsilon K}=\varepsilon\boldsymbol{D}^*\boldsymbol{D}-KQ(x)P^2(x),\quad Q(x)P^2(x)\geqslant 1,\tag{14'}$$

*а кусочно гладкие функции $Q^{-1/2}(x)\geqslant 0$, $0<P(x)\to\infty$, $(|x|\to\infty)$, удовлетворяют условиям**

$$|P^{-2}(x)Q^{-1/2}(x)A^{1/2}(x)\nabla P(x)|\leqslant C;\tag{23'}$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\substack{x:P(x)<N_k\\ 1<k<\infty}}|(Q^{-1/2}(h_J-B_JA^{-1}a),\ P^{-1}\nabla(Q^{-1/2}(P^{-1}-N_k^{-1})))|<C,\tag{24'}$$

а также

$$\sup_{x,N}\left|A^{-1/2}(x)B_J(x)\nabla\left(Q^{-1/2}(x)\left(\frac{1}{P(x)}-\frac{1}{N}\right)_+\right)\right|\leqslant K_1.\tag{39'}$$

Тогда найдутся такие числа $\varepsilon_1=\varepsilon_1(\varepsilon)>0$, $\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon)>0$, $C_1=C_1(\varepsilon,C,K,K_1)\geqslant 0$, что при любых $u\in D(M_{\max})$,

$$\operatorname{Re}\langle Q^{-1}P^{-2}Mu,\ u\rangle\geqslant\varepsilon_1\|Q^{-1/2}P^{-1}\boldsymbol{D}u\|^2+\varepsilon_2\|uA^{-1/2}\nabla(Q^{-1/2}P^{-1})\|^2-C_1\|u\|^2.\tag{40'}$$

Если же (23′) *заменить более жестким требованием*

$$|Q^{1/2}(x)A^{1/2}(x)\nabla P(x)|\leqslant C,\tag{34'}$$

а также потребовать (35) *и*

$$|Q^{-1/2}P^{-1}A^{-1/2}(h_J-B_JA^{-1}a)|\leqslant C,\tag{27$_1$}$$

то обеспечиваются условия применимости теоремы 4 и ее следствий. В этом случае в частности $M_{\max}=M_{\min}$.

Доказательство. Положим $Q_1(x)=Q(x)P^2(x)\geqslant 1$. Тогда оказываются выполненными условия первой части теоремы 6 при замене Q на Q_1 в формулах (14), (23) и (24) в силу (14′), (23′) и (24′), а также в (39) в силу (39′). Поэтому при этих условиях справедливо (40) с заменой Q на Q_1, что эквивалентно (40′), если только показать справедливость (37), (38) при замене Q на Q_1. Докажем справедливость этих формул.

---

* Здесь $Q(x)\geqslant 1$ не требуется, достаточно $Q(x)>0$.

Прежде всего, (14′) означает, что $L_{\varepsilon K} = \varepsilon \boldsymbol{D}^* \boldsymbol{D} - KQ_1(x)$, а это совпадает с $L_{\varepsilon K}$ (14) при замене там Q на Q_1. Переходя к (38), рассмотрим величину

$$(2^{-1/2} + \varepsilon) Q | A^{1/2} \nabla Q^{-1/2} |^2 = (2^{-1/2} + \varepsilon) Q_1 P^{-2} | A^{1/2} \nabla (Q_1^{-1/2} P) |^2 =$$
$$= (2^{-1/2} + \varepsilon) Q_1 | A^{1/2} \nabla Q_1^{-1/2} + P^{-2} Q^{-1/2} A^{1/2} \nabla P |^2 \geqslant$$
$$\geqslant (2^{-1/2} + \varepsilon)(1 - \gamma^2) Q_1 | A^{1/2} \nabla Q_1^{-1/2} |^2 - (2^{1/2} + \varepsilon)(\gamma^{-2} - 1) C^2 Q_1 \geqslant$$
$$\geqslant (2^{-1/2} + \varepsilon') Q_1 | A^{1/2} \nabla Q_1^{-1/2} |^2 - C' Q_1 \tag{42}$$

при достаточно малых $\gamma > 0$, $\varepsilon' > 0$ и достаточно большом $C' > 0$. Здесь была учтена оценка (23′). Сопоставляя (42) с (14′), с (37) и (38), видим, что (37) и (38) остаются в силе при замене в (38) Q на $Q_1 = QP^2$ с одновременной заменой ε на достаточно малое $\varepsilon' > 0$ и K на $K + C'$. Итак, (40′) доказано. В частности, $\| Q_1^{-1/2} \boldsymbol{D} u \| = \| Q^{-1/2} P^{-1} \boldsymbol{D} u \| < \infty$ и, учитывая остальные условия теоремы 7, убеждаемся в применимости теоремы 4 и ее следствий точно так же, как в теоремах 5 и 6, но с заменой Q на Q_1. Теорема доказана.

Замечание 3. При условиях теоремы 7 конечность нормы $\| Q^{-1/2} \boldsymbol{D} u \|$, очевидно, не обязательна. Можно лишь утверждать, что существует зависящая от $u \in D(M_{\text{мах}})$ константа $K_1[u] = \| Q_1^{-1/2} \boldsymbol{D} u \|^2 \geqslant 0$ такая что

$$\int\limits_{P(x) < N_k} Q^{-1}(x) \, |\boldsymbol{D} u(x)|^2 \, dx \leqslant K_1[u] \cdot N_k^2, \quad k = 1, 2, \ldots$$

§ 3. Симметрическое выражение. Здесь мы особо сформулируем вытекающие из результатов § 2 теоремы о существенной самосопряженности, так как они представляют наибольший интерес, а звучат наиболее просто. Положим

$$L = (i\nabla + b(x))^* A(x) (i\nabla + b(x)) + q(x), \tag{43}$$

где $q(x) \in \boldsymbol{R}$, $b(x) \in \boldsymbol{R}^n$, $A(x) = A^*(x) > 0$ — вещественная позитивная матрица. Очевидно, $L = \boldsymbol{D}_1^* \boldsymbol{D}_1 + q$, где $\boldsymbol{D}_1 \equiv A^{1/2}(x)(i\nabla + b(x)) = i\boldsymbol{D} \equiv i(A^{1/2}\nabla - iA^{-1/2}a)$ при $a(x) = A(x) b(x)$, и пусть

$$L_{\varepsilon K} = \varepsilon \boldsymbol{D}_1^* \boldsymbol{D}_1 - KQ(x); \tag{44}$$

$$\Lambda_{\varepsilon K} = L_{\varepsilon K} + (1 + \varepsilon) Q(x) | A^{1/2}(x) \nabla Q^{-1/2}(x) |^2; \tag{45}$$

$$\Lambda_{\varepsilon K}^{P} = \varepsilon \boldsymbol{D}_1^* \boldsymbol{D}_1 - KQ(x) P^2(x) + (1 + \varepsilon) Q(x) | A^{1/2}(x) \nabla Q^{-1/2}(x) |^2, \tag{46}$$

где $0 \leqslant Q^{-1/2}(x) \leqslant 1$, $0 < P(x) \to \infty$ ($|x| \to \infty$) — так же, как и прежде, кусочно гладкие функции. Из теоремы 3 следует

Теорема 8. *Пусть при некоторых* $\varepsilon > 0$, $K \geqslant 0$ *для* (43), (44) *выполняется при любых* $u \in C_0^\infty$ *неравенство*

$$\langle Lu, u \rangle \geqslant \langle L_{\varepsilon K} u, u \rangle,$$

и пусть существуют такие P *и* Q *указанного выше вида, что выполнены условия* (22) *и* (23). *Тогда при любом* $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ *найдется* $C_1 =$

$= C_1(\varepsilon_1, \varepsilon, K, K', C) \geqslant 0$ *такое, что при всяком* $u \in D\ (L_{\max})$ *выполняется неравенство типа Гординга:*

$$\operatorname{Re}\langle Q^{-1}Lu,\ u\rangle \geqslant \varepsilon_1 \| Q^{-1/2}\boldsymbol{D}_1 u\|^2 - C_1\|u\|^2.$$

Следующая теорема вытекает из теоремы 5 (ср. [3]).

Теорема 9. *При условиях теоремы* 8 *с заменой* (23) *более жестким* (34) *оператор* L (43) *существенно самосопряжен на* C_0^∞, *т. е.* $L_{\max}$ *самосопряжен в* $L_2(\boldsymbol{R}^n)$, *и для оператора* L *при любых* $u \in D(L_{\max})$, $v \in W^1_{2,\,\mathrm{loc}} \cap L_2(\boldsymbol{R}^n)$ *существует интеграл Дирихле в смысле суммирования с ядром* $\theta(P(x)/N)$, *где* $\theta(t)$ *— финитная, кусочно гладкая функция,* $\theta(t) \geqslant 0$, $\theta(0) = 1$, $\theta(t) = 0$ *при* $t \geqslant 1$, *а в остальном — любая;*

$$D_L[u,\ v] \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{N_k\to\infty} \int \theta(P(x)/N_k)\{(A(x)(i\nabla + b(x))u,\ (i\nabla + b(x)v) + q(x)u\bar{v}\}\,dx, \tag{47}$$

причем

$$D_L[u,\ v] = \langle Lu,\ v\rangle. \tag{48}$$

Из теоремы 6 непосредственно вытекает следующая.

Теорема 10. *Пусть для операций* L (43) *и* $\Lambda_{\varepsilon K}$ (45) *при некоторых* $\varepsilon > 0$, $K \geqslant 0$ *и любых* $u \in C_0^\infty$ *выполнено неравенство*

$$\langle Lu,\ u\rangle \geqslant \langle \Lambda_{\varepsilon K}u,\ u\rangle$$

и функции P *и* Q *удовлетворяют* (23). *Тогда найдутся такие числа* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon) > 0$, $C_1 = C_1(\varepsilon, K, C)$, *что при любых* $u \in D\ (L_{\max})$ *справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re}\langle Q^{-1}Lu,\ u\rangle \geqslant \varepsilon_1\|Q^{-1/2}\boldsymbol{D}_1 u\|^2 + \varepsilon_2\|uA^{1/2}\nabla Q^{-1/2}\|^2 - C_1\|u\|^2.$$

Если же (23) *заменить более жестким условием* (34), *то оператор* L *существенно самосопряжен в* $L_2(\boldsymbol{R}^n)$ *и для него существует интеграл Дирихле в смысле* (47) *и справедливо* (48).

Следующая теорема 11 является частным случаем теоремы 7, а также следствием теоремы 10.

Теорема 11. *Пусть для операций* L (43) *и* $\Lambda^P_{\varepsilon K}$ (46) *при некоторых* $\varepsilon > 0$, $K \geqslant 0$ *и любых* $u \in C_0^\infty$ *выполнено неравенство*

$$\langle Lu,\ u\rangle \geqslant \langle \Lambda^P_{\varepsilon K}u,\ u\rangle, \tag{49}$$

а функции $Q(x) > 0$, $0 < P(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$ *подчинены условию*

$$Q(x)P^2(x) \geqslant 1 \tag{50}$$

(*но* $Q(x) \geqslant \mathrm{const} > 0$ *не требуется, как и в теореме* 7). *Тогда при условии* (23′) $|P^{-2}(x)Q^{-1/2}(x)A^{1/2}(x)\nabla P(x)| \leqslant C$ *найдутся такие числа* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon) > 0$, $C_1 = C_1(\varepsilon, K, C) \geqslant 0$, *что при любых* $u \in D(L_{\max})$ *справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re}\langle Q^{-1}P^{-2}Lu,\ u\rangle \geqslant \varepsilon_1\|Q^{-1/2}P^{-1}\boldsymbol{D}_1 u\|^2 + \varepsilon_2\|uA^{1/2}\nabla(Q^{-1/2}P^{-1})\|^2 - C_1\|u\|^2, \tag{51}$$

а при замене (23′) *более жестким требованием* (34′): $|Q^{1/2}(x)A^{1/2} \times \times (x)\nabla P(x)| \leqslant C$ *оператор* L *существенно самосопряжен в* $L_2(\boldsymbol{R}^n)$ *и для него существует интеграл Дирихле* (47), *причем допустимо непрерывное стремление* $N \to \infty$ *в* (47), *а не только по последовательности* N_k, *и выполняется равенство* (48).

Замечание 4. Б. Гелльвиг [8] принадлежит следующая интересная теорема, которая оказывается важным частным случаем теоремы 11.

Теорема Б. Гелльвиг. *Оператор* L (43) *существенно самосопряжен в* $L_2(\boldsymbol{R}^n)$, *если выполнены следующие условия.*

Существуют такие функции $0 < \varphi(x) \in C^1(\boldsymbol{R}^n)$, $\nabla\varphi \neq 0$, $\varphi(x) \to \to 0$ *при* $|x| \to \infty$ *и* $0 < M(t) \in C^1(\boldsymbol{R})$, *что если положить*

$$\rho(t) = \sup_{\varphi(x)=t}(A(x)\nabla\varphi,\ \nabla\varphi); \tag{52}$$

$$P_0(t) = \int_t^{t_0} \{\rho(\tau)M(\tau)\}^{-1/2}\,d\tau, \tag{53}$$

то

$$\lim_{t\to+0} P_0(t) = \infty \tag{54}$$

и при некоторых $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $0 < \alpha < 2$, $t_0 > t_1 > 0$

$$M^{-1}(t) \leqslant C_1 P_0^2(t), \quad 0 < t < t_1 < t_0; \tag{55}$$

$$\frac{2}{\alpha}(A(x)\nabla\varphi,\nabla\varphi)\left[\frac{d}{dt}M^{-1/2}(\varphi(x))\right]^2 - \frac{q(x)}{M(\varphi(x))} \leqslant C_2 P_0^2(t)$$

при достаточно малых $t > 0$, $\varphi(x) = t$.

Легко видеть, что если положить в теореме 11

$$Q(x) = M(\varphi(x)),\ P(x) = P_0(\varphi(x)), \tag{57}$$

то ее условия удовлетворяются при условиях теоремы Б. Гелльвиг для достаточно больших $|x|$, например, при $|x| > N$ при некотором $N > 0$. Для существенной самосопряженности оператора L с гладкими, как в [8], коэффициентами и для сходимости интегралов энергетического типа*, отвечающих оператору L, но без оценок для них в норме графика и без неравенств типа Гординга этого достаточно, так как самосопряженность рассматриваемого оператора L обеспечивается его симметричностью на тех функциях из $D(L_{\max})$, носители которых лежат вне произвольно большого шара. Поясним, что условие (50) теоремы 11 следует из условия (55) теоремы Б. Гелльвиг, учитывая произвольность выбора множителя K в (46), условие (34′), а тем более и (23′), следует из (52) и (53) в силу (57), а (49) является прямым следствием условия (56), так как $2/\alpha = 1 + \varepsilon$. Выведем, например, (34′). Имеем

$$|Q^{1/2}A^{1/2}\nabla P| = |M^{1/2}A^{1/2}\{\rho(\varphi)M(\varphi)\}^{-1/2}\nabla\varphi| =$$
$$= |A^{1/2}\nabla\varphi|\cdot\{\sup(A\nabla\varphi,\ \nabla\varphi)\}^{-1/2} \leqslant 1.$$

* В [8] она не установлена, имеется лишь неравенство типа Замечание 3, но без вида $K_1[u]$.

Теорема 11 является более общей по ряду причин, в том числе вместо неравенства для коэффициентов (56) требуется лишь неравенство (49) для операторов в смысле форм на C_0^∞, не требуется функциональной зависимости между $Q(x)$ и $P(x)$, которая следует из (57), нет ограничительного требования $\nabla P \neq 0$, вытекающего из условия Б. Геллвиг $|\nabla\varphi| > 0$ в силу (57), (53). А именно допущение равенства $\nabla P = 0$ на множестве положительной меры позволяет из теорем установленного вида получить, как следствие, условия существенной самосопряженности, задающие ограничения на коэффициенты лишь на последовательности телесных слоев, как, например, в [2—4]. С другой стороны в [8] рассматривается L_2 с весом, а также оператор в конечных и бесконечных областях, однако наш метод легко распространяется и на эти случаи.

Список литературы: 1. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О неполуограниченных дифференциальных операторах // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1966. Вып. 2. С. 178—184. 2. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Условия самосопряженности оператора Шредингера // Мат. заметки. 1970. **8,** № 6. С. 741—751. 3. *Рофе-Бекетов Ф. С., Холькич А. М.* Условия самосопряженности операторов эллиптического типа второго порядка общего вида // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1973. Вып. 17. С. 41—51. 4. *Брусенцев А. Г., Рофе-Бекетов Ф. С.* Условия самосопряженности сильно эллиптических систем произвольного порядка // Мат. сб. 1974. **95,** № 1(9). С. 108—129. 5. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. К., 1965. 800 с. 6. *Березин Ф. А., Шубич М. А.* Уравнение Шредингера. М., 1983. 392 с. 7. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., 1963. 340 с. 8. *Hellwig B.* A criterion for self-adjiointness of singular elliptic differential operators // J. Math. anal. and appl. 1969. **26,** N 2. P. 279-291.

Поступила в редколлегию 30.12.88