УДК 517.55

А. Ю. РАШКОВСКИЙ, Л. И. РОНКИН

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В КОНУСЕ. I (ОБЩАЯ ТЕОРИЯ)

В данной работе, состоящей из трех частей, изучаются субгармонические функции в конусе. Здесь рассматривается ряд вопросов, обязанных своим происхождением исследованиям в области целых функций. Остановимся на этом несколько подробнее. В теории целых функций (одного и многих переменных) главными являются вопросы роста функций и распределения их корней. Эти же вопросы являются основными и при изучении классов функций, в некотором смысле родственных целым, а именно, — функций, голоморфных в конусе, в трубчатой области, в областях вида $G \times \boldsymbol{C}^k$ и др. В значительной степени интерес к указанным вопросам обусловлен и той большой ролью, которую они играют в приложениях теории функций к уравнениям в частных производных, к уравнениям свертки, к теории вероятности, к теории обобщенных функций. Одним из основных способов решения задач, относящихся к росту и распределению корней голоморфных функций, является сведение их к соответствующим задачам для более широкого класса субгармонических функций. При этом исходят из того, что $\ln|f(z)|$, где функция $f(z)$ голоморфна, является плюрисубгармонической и, следовательно, субгармонической функцией, а объем нулевого множества функции f в той или иной области G равен $\mu(G)$, где μ — мера, ассоциированная по Риссу (риссовская масса) функции $\ln|f(z)|$. Наиболее полно исследование роста субгармонических функций и распределения их риссовских масс проведено для класса функций конечного порядка в $\boldsymbol{R}^m$, (т. е. функций $u(x)$ таких, что $u(x) \leqslant a|x|^{\rho} + b$) и его подкласса — функций вполне регулярного роста.

В первоначальном своем определении (см. [1]), данном для целых функций одного переменного Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером в 1937—

1938 гг., функция вполне регулярного роста характеризовалась как функция, логарифм модуля которой вне достаточно редкого множества асимптотически близок позитивно однородной функции (точнее, своему индикатору). Основным фактом теории Левина — Пфлюгера является эквивалентность полной регулярности роста целой функции наличию определенной правильности распределения ее корней. Упомянутое определение и основные факты теории были в 1961—1962 гг. распространены В. С. Азариным на субгармонические функции в пространстве $\boldsymbol{R}^m$, $m \geqslant 2$. В дальнейшем был найден новый подход к изучению функций вполне регулярного роста. В работах П. З. Агранович и Л. И. Ронкина [2], В. С. Азарина [3] было показано, что полная регулярность роста субгармонической функции $u(x)$ эквивалентна сходимости в D' семейства функций $t^{-\rho}u(tx)$, $t \to \infty$[1]. Другое определение, также эквивалентное исходному, было дано Л. Груменом [4].

Ситуация значительно осложняется при рассмотрении функций не во всем пространстве $\boldsymbol{R}^m$, а в каком-нибудь его конусе. Уже для функций, голоморфных в полуплоскости, связь между ростом и распределением корней носит характер, отличный от целых функций, и требует введения новых понятий. Соответствующая теория, включая теорию функций вполне регулярного роста, была построена Н. В. Говоровым [5]. На субгармонические функции в полуплоскости она была распространена А. И. Хейфицем[2]. Отметим, что построения Н. В. Говорова основаны на тонких точечных оценках и их перенос на многомерный случай представляется нам маловероятным. Более того, оставаясь в рамках подхода к этим вопросам Н. В. Говорова, неясно и как формулировать соответствующие результаты в многомерном случае. Оказалось, однако, что, как и для целых функций или функций, субгармонических в $\boldsymbol{R}^m$, регулярность роста функции $u(x)$ в полуплоскости эквивалентна некоторой специальной сходимости функций $t^{-\rho}u(tx)$. Этот факт, а также некоторые другие новые факты о функциях вполне регулярного роста в полуплоскости были установлены одним из авторов ранее [6]. Изложенный там подход к построению теории функций в полуплоскости был нами распространен на функции, субгармонические в конусе. Полученные при этом результаты, а также предваряющие их результаты о произвольных субгармонических функциях конечного порядка в конусе анонсированы в [7]. Настоящая работа содержит расширенное изложение результатов, приведенных в [7] без доказательств и в более слабой форме. В ней рассматриваются функции $u(x)$, субгармонические в конусе пространства $\boldsymbol{R}^m$ и удовлетворяющие в нем условию $u(x) \leqslant a|x|^\rho + b$. Каждой такой функции ставятся в соответствие ее риссовская масса и вещественная мера

---

[1] Исследование слабой сходимости семейства $\{t^{-\rho}u(tx)\}$, $t \to \infty$ (и более общих семейств) в том случае, когда $u(x)$ — не субгармоническая, а обобщенная функция медленного роста с носителем в выпуклом остром конусе проводилось В. С. Владимировым, Ю. Н. Дрожжиновым, Б. И. Завьяловым. При этом постановки задач и характер полученных результатов существенно отличны от фигурирующих в теории функций вполне регулярного роста.

[2] *Хейфиц А. И.* О субгармонических функциях вполне регулярного роста в полуплоскости // Докл. АН СССР. 1978. **239**, № 2. С. 282—285.

(заряд) на границе конуса, являющаяся предельным значением функции $u(x)$ в смысле слабой сходимости. Первая часть работы посвящена интегральным оценкам функций и ассоциированных с ними мер. Для получения этих оценок предварительно обосновываются некоторые предельные переходы, устанавливаются интегральные формулы типа формулы Карлемана (для функций, голоморфных в полуплоскости) и Грина. Полученные результаты, представляющие, на наш взгляд, самостоятельный интерес, вместе с данным в [8] представлением субгармонических функций в конусе составляют основу для проводимого во второй части работы исследования функций вполне регулярного роста в конусе. Мы даем несколько критериев регулярности роста и, в том числе, эквивалентность вполне регулярности роста функции $u(x)$ специальной правильности распределения порождаемых ею мер — риссовской и граничной. Получены формулы, связывающие характеристики роста функции с характеристиками распределения ассоциированных с нею мер.

Параллельно нам ряд фактов о функциях регулярного роста в конусе установил Л. Грумен [4]. Отметим, что в своем определении таких функций Л. Грумен исходил не из традиционного упоминавшегося выше определения функции вполне регулярного роста в $\boldsymbol{C}$ или $\boldsymbol{R}^m$, как это сделано у нас, а из данного им ранее для функций в $\boldsymbol{R}^m$ определения луча регулярного роста. Можно показать, что оба определения эквивалентны. Результаты, однако, различны, поскольку различны рассматриваемые нами и Л. Груменом задачи.

1. Основные понятия. На сфере $S_1 = \{x \in \boldsymbol{R}^m : |x| = 1\}$ рассмотрим область Γ с дважды гладкой границей и в этой области Γ краевую задачу $\Delta^*\varphi + \lambda\varphi = 0$, $\varphi|_{\partial\Gamma} = 0$, где Δ^* — сферическая часть оператора Лапласа Δ, имеющего в сферических координатах следующий вид:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta^*.$$

Через $\lambda_j = \lambda_j(\Gamma)$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$ обозначим собственные числа этой краевой задачи. Будет предполагать область Γ таковой, что соответствующие числам λ_j собственные функции $\varphi_j = \varphi_j^\Gamma$ принадлежат классу $C^2(\overline{\Gamma})$ и $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} > 0$ на $\partial\Gamma$ (здесь и всюду далее $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по внутренней нормали).

Обозначим через $K = K^\Gamma$ конус $\left\{x \in \boldsymbol{R}^m : \frac{x}{|x|} \in \Gamma\right\}$. Элементы евклидова объема в $\boldsymbol{R}^m$ и индуцированного метрикой $\boldsymbol{R}^m$ $(m-1)$-мерного объема на ∂K обозначим соответственно через $d\omega$ и $d\sigma$, а элемент $(m-1)$-мерного объема сфера S_R — через dS_R. Все функции φ_j будем считать продолженными в конус K равенствами $\varphi_j(x) \overset{\text{def}}{=} \varphi_j\left(\frac{x}{|x|}\right)$ и нормированными условием $\int\limits_\Gamma |\varphi_j|^2\, dS_1 = 1$. Положим также $B_R =$

$=\{x\in \boldsymbol{R}^m : |x|<R\}$, $S_R=gB_R$, $K_R=K\cap B_R$, $K_{r,R}=K_R\setminus \overline{B_r}$, $\Gamma_R=K\cap S_R$, $\Gamma_{r,R}=\partial \overline{K}\cap \overline{K_{r,R}}$; $\theta_m=(m-2)\int\limits_{S_1} dS_1$ $(m>2)$, $\theta_2=2\pi$;

$$\varkappa_j^{\pm}=\frac{1}{2}\left[-m+2\pm\sqrt{(m-2)^2+4\lambda_j}\right].$$

Отметим, что функции $\varphi_j(x)|x|^{\varkappa_j^{\pm}}$ гармоничны в конусе K, принадлежат классу $C^2(\overline{K}\setminus\{0\})$ и обращаются в нуль на $\partial K\setminus\{0\}$. В дальнейшем функция φ_1 для краткости обозначается через φ, а числа $\varkappa_1^{\pm}$ — через $\varkappa^{\pm}$.

Множество функций, субгармонических в области $G\subset \boldsymbol{R}^m$, обозначим через $SH(G)$. Через $\mu=\mu_u$ будем обозначать меру, ассоциированную по Риссу, субгармонической функции $u(x)$. Иными словами, $\mu_u \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\theta_m}\Delta u$, причем оператор Лапласа Δ рассматривается как оператор в пространстве обобщенных функций D'. Известно, что первые частные производные функции $u\in SH(G)$ существуют почти всюду и являются локально суммируемыми функциями, задающими соответствующие производные в пространстве $D'(G)$. Нам понадобится дополнительная информация о производных субгармонических функций.

Лемма 1. *Пусть область $G\subset \boldsymbol{R}^m$ содержит множества $\overline{\Gamma}_r$, $a<r<b$. Пусть функция $u\in SH(G)$, а последовательность функций $u_j\in SH(G)\cap C^\infty(G)$, монотонно убывая, сходится при $j\to\infty$ к функции u.* Тогда при любом $r\in(a,b)$, *удовлетворяющем условию $\mu(\overline{\Gamma_r})=0$, и для любой функции $\eta\in C_0^1(\overline{\Gamma_r})=\{\psi\in C^1(S_r):\operatorname{supp}\psi\subset\overline{\Gamma_r}\}$ существует предел*

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{\Gamma_r}\frac{\partial u_j}{\partial r}\eta\, dS_r,$$

который не зависит от выбора последовательности u_j. Кроме того, для каждой функции $\eta\in D(K_{a,b})$ при почти всех $r\in(a,b)$ выполняется равенство

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{\Gamma_r}\frac{\partial u_j}{\partial r}\eta\, dS_r=\int\limits_{\Gamma_r}\frac{\partial u}{\partial r}\eta\, dS_r. \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим какую-нибудь область $\Omega\subset\subset G$ с кусочно-гладкой границей, удовлетворяющую условиям: 1) $\Gamma_r\subset\partial\Omega$ 2) $\mu(\partial\Omega)=0$. Обозначим через $Q(x)$ решение задачи Дирихле в области Ω с краевым условием $Q\big|_{\partial\Omega\setminus\overline{\Gamma}_r}=0$, $Q\big|_{\overline{\Gamma}_r}=\eta$. Согласно формула Грина имеем

$$\int\limits_{\partial\Omega}u_j\frac{\partial Q}{\partial n}ds-\int\limits_{\Gamma_r}\frac{\partial u_j}{\partial r}\eta\, dS_r=\int\limits_{\Omega}Q\,\Delta u_j d\omega.$$

Так как $u_j \searrow u$, $\lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{\partial\Omega} u_j \frac{\partial Q}{\partial n}\, ds = \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial Q}{\partial n}\, ds$ и последовательность Δu_j слабо сходится к мере $\theta_m\mu = \Delta u$. Из последнего с учетом $\mu(\partial\Omega) = 0$ заключаем, что

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Delta u_j\, Q d\omega = \theta_m \int\limits_{\Omega} Q d\mu. \tag{2}$$

Таким образом, существует

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Gamma_r} \eta \frac{\partial u_j}{\partial r}\, dS_r = -\theta_m \int\limits_{\Omega} Q d\mu + \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial Q}{\partial n}\, ds. \tag{3}$$

Заметим, что правая часть равенства (3) не зависит от выбора последовательности $\{u_j\}$, а левая — от выбора Ω.

Для доказательства справедливости равенства (1) достаточно показать, что для любой функции $\nu(t) \in D((a, b))$ имеет место равенство

$$\int\limits_a^b \nu(r) \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Gamma_r} \eta \frac{\partial u_j}{\partial r}\, dS_r dr = \int\limits_{K_{a,b}} \nu(|x|)\, \eta \frac{\partial u}{\partial r}\, d\omega.$$

Учитывая определение обобщенной функции $\frac{\partial u}{\partial r}$, получаем, что

$$\int\limits_{K_{a,b}} \nu(|x|)\, \eta \frac{\partial u}{\partial r}\, d\omega = -\sum_{i=1}^{m} \lim_{j\to\infty} \int\limits_{K_{a,b}} u_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\nu(|x|)\, \eta(x) \frac{\partial x_i}{\partial r}\right] d\omega =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int\limits_{K_{a,b}} \nu(|x|)\, \eta(x) \frac{\partial u_j}{\partial r}\, d\omega =$$

$$= \int\limits_a^b \nu(r) \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Gamma_r} \eta \frac{\partial u_j}{\partial r}\, dS_r dr.$$

Лемма доказана.

Замечание. Из изложенного видно, что в том случае, когда r таково, что равенства (1) нет, но $\mu(\overline{\Gamma}_r) = 0$ и, значит, предел $\lim\limits_{j\to\infty}$ $\int\limits_{\Gamma_r} \frac{\partial u_j}{\partial r} \eta\, dS_r$ существует, естественно этот предел обозначить через $\int\limits_{\Gamma_r} \frac{\partial u}{\partial r} \eta\, dS_r$.

При таком обозначении, используемом и в дальнейшем, равенство (3) принимает удобную форму

$$\int\limits_{\Gamma_r} \eta \frac{\partial u}{\partial r}\, dS_r = -\theta_m \int\limits_{\Omega} Q d\mu + \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial Q}{\partial n}\, ds.$$

2. Формула Карлемана (предварительная). Следующая ниже лемма 2 содержит равенство типа формулы Карлемана, относящейся к функциям, голоморфным в полуплоскости (см., например, [1]). Для того чтобы ее сформулировать, определим при $R > 0$ функцию $\psi_R(x) = \gamma_R(|x|)\varphi(x)$, где $\gamma_R(t) = t^{\varkappa^-} - R^{\varkappa^- - \varkappa^+} t^{\varkappa^+}$. Заметим, что функция ψ_R гармонична в $K_{r,R}$ при любом $r \in (0, R)$ и обращается в нуль на $\Gamma_R \cup \Gamma_{r,R}$.

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ — функция, субгармоническая в некоторой окрестности G множества $K_{r,R}$. Тогда, если $\mu(\overline{\Gamma}_r) = 0$, то*

$$\theta_m \int_{K_{r,R}} \psi_R d\mu = -\gamma_R(r) \int_{\Gamma_r} \varphi \frac{\partial u}{\partial n} dS_r + \gamma_R'(r) \int_{\Gamma_r} u\varphi\, dS_r -$$

$$- \gamma_R'(R) \int_{\Gamma_R} u\varphi\, dS_R + \int_{\Gamma_{r,R}} u\gamma_R(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma. \tag{4}$$

Доказательство. Вначале докажем (4) в случае, когда $u \in C^2(G)$. Для этого используем формулу Грина, примененную к области $K_{r,R}$ и функциям $u(x)$ и $\Psi_R(x)$. Получаем тогда

$$\theta_m \int_{K_{r,R}} \psi_R\, d\mu = - \int_{\Gamma_R} \left(\psi_R \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \psi_R}{\partial n} \right) dS_R -$$

$$- \int_{\Gamma_r} \left(\psi_R \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \psi_R}{\partial n} \right) dS_r - \int_{\Gamma_{r,R}} \left(\psi_R \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \psi_R}{\partial n} \right) d\sigma =$$

$$= - \gamma_R'(R) \int_{\Gamma_r} u\varphi\, dS_R - \gamma_R(r) \int_{\Gamma_r} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi\, dS_r +$$

$$+ \gamma_R'(r) \int_{\Gamma_R} u\varphi\, dS_r + \int_{\Gamma_{r,R}} u\gamma_R(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma.$$

Таким образом, в предположении, что $u \in C^2(G)$, равенство (4) доказано.

Пусть теперь $u(x)$ — произвольная субгармоническая функция в области $G \supset \overline{K}_{r,R}$. В каждой области G' такой, что $\overline{K}_{r,R} \subset G' \subset\subset G$, существует монотонно убывающая к $u(x)$ последовательность функций $u_j \in C^\infty(G') \cap SH(G')$. Для функций u_j, как было только что доказано, равенство (4) справедливо. Далее, очевидно, при $j \to \infty$

$$\int_{\Gamma_r} u_j \varphi\, dS_r \to \int_{\Gamma_r} u\varphi\, dS_r;$$

$$\int_{\Gamma_R} u_j \varphi\, dS_R \to \int_{\Gamma_R} u\varphi\, dS_R;$$

$$\int_{\Gamma_{r,R}} u_j \gamma_R(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \to \int_{\Gamma_{r,R}} u\gamma_R(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma.$$

Из леммы 1 в силу сделанного в условии доказываемой леммы предположения $\mu(\overline{\Gamma}_r) = 0$ заключаем

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\Gamma_r} \frac{\partial u_j}{\partial n} \varphi\, dS_r = \int_{\Gamma_r} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi\, dS_r .$$

Наконец, равенство

$$\lim_{j\to\infty} \int_{K_{r,\,R}} \psi_R \Delta\, u_j d\,\omega = \int_{K_{r,\,R}} \varphi_R \Delta\, u d\omega$$

имеет место по тем же соображениям, что и равенство (2). Таким образом, в равенстве (4), справедливом, как было отмечено, для функций u_j, при $j \to \infty$ возможен переход к пределу, совершая который убеждаемся в наличии равенства (4) для функции $u(x)$. Лемма доказана.

3. Интегральные оценки. Прежде, чем сформулировать лемму 3, в которой будут даны важные для наших целей оценки субгармонических функций, условимся в дальнейшем через $D_j(\ldots, \ldots, \ldots)$, $j = 1, 2, \ldots$, обозначать функции, зависящие при данном конусе K только от указанных в них параметров, и локально ограниченные при рассматриваемых значениях этих параметров.

Лемма 3. *Пусть $u(x)$ — функция, субгармоническая в окрестности G множества $\overline{K}_{\lambda,\infty}$, и при этом $\mu(\overline{\Gamma}_\lambda) = 0$. Пусть, далее, при некотором $\rho > \varkappa^+$ и некоторых положительных a, b, c и d выполняются неравенства*

$$u(x) \leqslant a|x|^\rho + b,\ \forall\, x \in K_{\lambda,\,\infty}; \tag{5}$$

$$\left| \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi\, dS_\lambda \right| \leqslant c; \tag{6}$$

$$\int_{\Gamma_\lambda} |u\varphi|\, dS_\lambda \leqslant d. \tag{7}$$

Тогда при любых r и R, $\lambda \leqslant r < R$, справедливы неравенства

$$\int_{\Gamma_R} |u(x)|\, \varphi(x)\, dS_R \leqslant D_1 R^{\rho+m-1}; \tag{8}$$

$$\int_{K_{r,R}} |u(x)| \cdot |x|^\beta \varphi(x)\, d\,\omega \leqslant D_1 R^{\rho+m-1+\beta} \cdot (R - r),\quad r > \lambda; \tag{9}$$

$$\int_{\Gamma_{\lambda,R}} |u(x)| \cdot |x|^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\,\sigma \leqslant D_2 R^{\rho+m-2+\alpha}; \tag{10}$$

$$\int_{\Delta^\delta_{\lambda,\,R}} |u(x)| \cdot |x|^{-2}\, d\,\omega \leqslant \delta\, D_3 R^{\rho+m-2}, \tag{11}$$

где $D_j = D_j\ (a,\ b,\ c,\ d,\ \rho,\ \lambda)$, $j = 1,\ 2,\ 3$, $\Delta^{\delta}_{\lambda,R} = \{x \in K_{\lambda,R} : \varphi(x) < \delta\}$, *а на числа* α, β, δ *наложены условия:* $\beta \geqslant -\rho - m + 1$, $\alpha \geqslant \varkappa^-$, $\delta < \delta_1$, *где* δ_1 — *некоторое достаточно малое положительное число.*

Доказательство. Неравенство (8) получается из равенства (4) следующим образом:

$$\int\limits_{\Gamma_R} |u|\,\varphi\, dS_R = \int\limits_{\Gamma_R} (2u^+ - u)\,\varphi\, dS_R = 2\int\limits_{\Gamma_R} u^+\varphi\, dS_R +$$

$$+ \frac{\theta_m}{\gamma_R'(R)} \int\limits_{K_{\lambda,R}} \Psi_R\, d\mu + \frac{\gamma_R(\lambda)}{\gamma_R'(R)} \int\limits_{\Gamma_\lambda} \varphi \frac{\partial u}{\partial n} dS_\lambda -$$

$$- \frac{\gamma_R'(\gamma)}{\gamma_R'(R)} \int\limits_{\Gamma_\lambda} u\,\varphi\, dS_\lambda - \frac{1}{\gamma_R'(R)} \int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} u\,\gamma_R(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{\Gamma_R} (aR^\rho + b)\, dS_R + e\frac{\gamma_R(\lambda)}{|(\gamma_R'(R)|} + d\left|\frac{\gamma_R'(\lambda)}{\gamma_R'(R)}\right| +$$

$$+ \frac{1}{|\gamma_R'(R)|} \int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} (a|x|^\rho + b)\,\gamma_R(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \leqslant D_1 R^{\rho+m-1}.$$

Неравенство (9) получается посредством перехода в правой его части к повторному интегралу с последующей оценкой внутреннего интеграла с помощью уже доказанного неравенства (8).

Для того чтобы получить соотношение (10), оценим предварительно

$$\int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} |u(x)|\,\gamma_R(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma.$$

Используя, как и ранее, равенство (4), имеем

$$\int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} |u|\,\gamma_R(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} (2u^+ - u)\,\gamma_R(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} u^+\gamma_R(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma - \gamma_R(\lambda) \int\limits_{\Gamma_\lambda} u \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS_\lambda +$$

$$+ \gamma_R'(\lambda) \int\limits_{\Gamma_\lambda} u\,\varphi\, dS_\lambda - \gamma_R'(R) \int\limits_{\Gamma_R} u\,\varphi\, dS_R \leqslant D_4 R^{\rho+m-2+\varkappa^-}, \qquad (12)$$

где $D_4 = D_4\ (a,\ b,\ c,\ d,\ \rho,\ \lambda,)$. Учитывая далее неравенство

$$\gamma_{2R}(|x|) \geqslant R^{\varkappa^-}(1 - 2^{\varkappa^- - \varkappa^+}),\ \ \forall\, x \in B_R,$$

получаем

$$\int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} |u|\,|x|^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} |u|\,|x|^{\alpha-\varkappa^-}(|x|^{\varkappa^-} - |x|^{\varkappa^+} R^{\varkappa^- - \varkappa^+}) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} |u|\,|x|^{\alpha+\varkappa^+-\varkappa^-} R^{\varkappa^- - \varkappa^+} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \leqslant D_4 R^{\alpha+\rho+m-2} +$$

$$R^{\alpha}\int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}}|u|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma\leqslant D_4R^{\alpha+\rho+m-2}+$$

$$+\frac{R^{\alpha-\varkappa^-}}{1-2^{\varkappa^--\varkappa^+}}D_4\cdot(2R)^{\rho+m-2+\varkappa^-}\leqslant D_2R^{\rho+m-2+\alpha}.$$

Тем самым доказано неравенство (10).

Для получения соотношения (11) заметим, прежде всего, что хотя функции D_1, D_2 зависят от выбора конуса K или, что то же самое, от множества Γ, однако, как показывает простой анализ, при проведении оценок в конусах $K^{(l)}=K^{\Gamma^{(l)}}$, где $\Gamma^{(l)}=\{x\in\Gamma:\varphi(x)<l\}$, их можно выбрать не зависящими от $l\in[0,\delta_0]$ где δ_0 таково, что $\varkappa^+(\Gamma^{(\delta_0)})<\rho$. Кроме того, поскольку мы предполагаем, что граница Γ дважды гладкая, соответствующие областям (на S_1) $\Gamma^{(l)}$ собственные функции $\varphi^{(l)}$, как известно, удовлетворяют при некотором достаточно малом $\delta_1<\delta_0$ условию:

$$\inf_{\partial\Gamma^{(l)}}\frac{\partial\varphi^{(l)}}{\partial n}=c>0,$$

$$0\leqslant l\leqslant\delta_1.$$

Учитывая это и обозначая через $d\sigma^{(l)}$ элемент объема гиперповерхности $\Gamma^{(l)}_{0,\infty}$, получаем, что

$$\int\limits_{\Delta^{\delta}_{r,R}}|u(x)|\,|x|^{-2}\,d\omega=\int\limits_0^{\delta}dl\int\limits_{\Gamma^{(l)}_{r,R}}|u(x)|\,|x|^{-2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^{-1}d\sigma^{(l)}\leqslant$$

$$\leqslant c^{-2}\int\limits_0^{\delta}dl\int\limits_{\Gamma^{(l)}_{r,R}}|u(x)|\frac{\partial\varphi^{(l)}}{\partial n}\,d\sigma^{(l)}\leqslant\delta c^{-2}D_2R^{\rho+m-2}.$$

Лемма доказана.

Далее, вплоть до п. 6, мы предполагаем, что конус K «сдвигаем» в себя, т. е. существует такая точка $x^0\in S_1$, что при всех $h>0$ имеет место включение $\{\overline{K+hx^0}\}\subset K$. Отметим, что, в частности, все выпуклые конусы «сдвигаемы». В п.6 это требование на конус K будет снято и все полученные результаты будут распространены на общий случай.

Лемма 4. *Пусть функция $u\in SH(K)$ при некоторых $a>0$, $b>0$ и $\rho>\varkappa^+$ удовлетворяет условию $u(x)\leqslant a|x|^{\rho}+b$, $\forall x\in K$. Тогда для любого $\lambda>0$ существуют такие константы $C_j=C_j(\lambda,u)$, $j=1,2,3$, что при $0<\lambda<R$ выполняются неравенства*

$$\int\limits_{K_{r,R}}|u(x)|\,|x|^{-2}\varphi(x)\,d\omega\leqslant C_1R^{\rho+m-3}(R-r);\tag{13}$$

$$\int_{\Delta^{\delta}_{\lambda, R}} |u(x)|\,|x|^{-2}\,d\omega \leqslant \delta C_2 R^{\rho+m-2}; \tag{14}$$

$$\int_{K_{r, R}} \varphi(x)\,d\mu \leqslant C_3 R^{\rho+m-2}\,[1]. \tag{15}$$

Доказательство. В области $K_{4\lambda}$ функция $u(x)$, поскольку она ограничена сверху, допускает представление

$$u(x) = -\int_{K_{4\lambda}} G(x, y)\,d\mu(y) + H(x),$$

где $G(x, y)$ — функция Грина области $K_{4\lambda}$, а $H(x)$ — наименьшая гармоническая мажоранта функции $u(x)$ в той же области. По функции $H(x)$ построим функцию $H_1(x)$, гармоническую в шаре $B_{3\lambda}$, совпадающую с $H(x)$ на $\Gamma_{3\lambda}$ и мажорирующую $H(x)$ на $K_{3\lambda}$. Нетрудно видеть, что это возможно. Далее введем в рассмотрение функцию

$$V(x) = \begin{cases} u(x), & x \in K \setminus B_{4\lambda}, \\ H(x), & x \in K_{4\lambda} \setminus B_{3\lambda}, \\ H_1(x), & x \in B_{3\lambda}. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $V \in SH(K \cup B_{3\lambda})$ и при некотором $b_1 > 0$ удовлетворяет в конусе K оценке $V(x) \leqslant a|x|^{\rho} + b$. Обозначим $V_h(x) = V(x + hx^0)$, $h > 0$. При всех $h \in (0, \lambda)$ функции $V_h(x)$ субгармоничны в окрестности $\overline{K}$, гармоничны в $B_{2\lambda}$ и в конусе K удовлетворяют неравенству $V_h(x) \leqslant a_2|x|^{\rho} + b_2$, где a_2 и b_2 не зависят от h. Кроме того, поскольку гармонические в $B_{2\lambda}$ функции V_h при $h \to 0$ сходятся к функции V, выполняются также неравенства

$$\int_{\Gamma_{\lambda}} \left|\frac{\partial V_h}{\partial n}\right| \varphi\,dS_{\lambda} \leqslant c;$$

$$\int_{\Gamma_{\lambda}} |V_h|\,\varphi\,dS_{\lambda} \leqslant d$$

с некоторыми константами c и d, не зависящими от h. Следовательно, мы находимся в условиях применения леммы 3, согласно которой заключаем, что

$$\int_{K_{r, R}} |V_h|\,|x|^{-2}\varphi\,d\omega \leqslant D_1 R^{\rho+m-3}(R - r); \tag{16}$$

$$\int_{\Gamma_{r, R}} |V_h|\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma \leqslant D_2 R^{\rho+m-2}; \tag{17}$$

$$\int_{\Delta^{\delta}_{r, R}} |V_h|\,|x|^{-2}\,d\omega \leqslant D_3 R^{\rho+m-2}, \tag{18}$$

[1] Отметим, что в [9] получена оценка величины $\mu(K'_{\lambda, R})$, когда $K' = K^{\Gamma'}$, $\Gamma' \subset\subset \Gamma$.

где $D_j = D_j(a_2, b_2, c, d, \rho, \lambda)$, $j = 1, 2, 3$; $0 < 4\lambda < r < R$. Переходя в (16) и (18) к пределу при $h \to 0$ и замечая при этом, что функции V_h в $D'(K_{4\lambda,\infty})$ сходятся к функции u, получаем оценки (13) и (14). Чтобы получить (15), воспользуемся равенством (4) для области $K_{\lambda,2R}$ и функции $V_h(x)$. Имеем

$$\theta_m \int\limits_{K_{\lambda,\,2R}} \gamma_{2R}(|x|)\,\varphi\,d\mu_h = -\gamma_{2R}(\lambda)\int\limits_{\Gamma_\lambda} \varphi\,\frac{\partial V_h}{\partial n}\,dS_\lambda + $$

$$+ \gamma'_{2R}(\lambda)\int\limits_{\Gamma_\lambda} V_h\varphi\,dS_\lambda - \gamma'_{2R}(2R)\int\limits_{\Gamma_{2R}} V_h\varphi\,dS_{2R} +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_{\lambda,\,2R}} V_h\gamma_{2R}(|x|)\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma$$

$\left(\text{здесь } \mu_h = \mu_{V_h} = \frac{1}{\theta_m}\Delta V_h\right)$. Отсюда, используя (8) и (12), заключаем, что

$$\int\limits_{K_{\lambda,\,2R}} \gamma_{2R}(|x|)\,\varphi\,d\mu_h \leqslant c\,[\lambda^{\varkappa^-} - \lambda^{\varkappa^+}(2R)^{\varkappa^- - \varkappa^+}] - d\,[\varkappa^-\lambda^{\varkappa^- - 1} -$$

$$- \varkappa^+\lambda^{\varkappa^+ - 1}(2R)^{\varkappa^- - \varkappa^+}] + D_4(2R)^{\rho+m-2+\varkappa^-} +$$

$$+ D_1\frac{R^{\varkappa^- - 1}}{\varkappa^+ - \varkappa^-}R^{\rho+m-1}2^{\rho+m-2+\varkappa^-} \leqslant D_5R^{\rho+m-2+\varkappa^-}.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{K_{\lambda,\,R}} \gamma_{2R}(|x|)\,\varphi\,d\mu_h \geqslant \min_{t\in[\lambda,\,R]} \gamma_{2R}(t)\int\limits_{K_{\lambda,\,R}} \varphi\,d\mu_h \geqslant$$

$$\geqslant R^{\varkappa^-}(1 - 2^{\varkappa^- - \varkappa^+})\int\limits_{K_{4\lambda,\,R}} \varphi\,d\mu_h.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{K_{4\lambda,\,R}} \varphi\,d\mu_h \leqslant \frac{R^{-\varkappa^-}}{1 - 2^{\varkappa^- - \varkappa^+}}\int\limits_{K_{\lambda,\,2R}} \gamma_{2R}(|x|)\,\varphi\,d\mu_h \leqslant C_3R^{\rho+m-2},$$

где C_3 не зависит от h. Отсюда, поскольку при $h \to 0$ меры μ_h сходятся в $D'(K_{4\lambda,\,\infty})$ к мере μ, немедленно следует, что

$$\int\limits_{K_{4\lambda,\,R}} \varphi\,d\mu \leqslant C_3R^{\rho+m-2}.$$

Лемма доказана.

4. Предельные переходы, граничная мера. В лемме 5 дается обоснование ряда используемых в дальнейшем предельных переходов. При этом по функции $u \in SH(K)$ на границе конуса вводится мера, являющаяся в некотором смысле предельным значением функции u на ∂K.

Лемма 5. *Пусть функция $u \in SH(K)$ ограничена сверху на каждом ограниченном подмножестве конуса K и пусть $u_h(x) = u(x + hx^0)$, $h > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

$$a)\ \lim_{h\to 0}\int\limits_{K_{\lambda,\,R}} u_hQ\,d\omega = \int\limits_{K_{\lambda,\,R}} uQ\,d\omega,\ \forall Q \in C(\overline{K}_{\lambda,\,R}),\ 0 < \lambda < R;$$

б) для любых $\lambda > 0$ *и* $R > \lambda$, *не принадлежащих множеству* $\Lambda_u^1 = \{t : \mu(\Gamma_t) > 0\}$, *выполняется равенство*

$$\lim_{h \to 0} \int_{K_{\lambda, R}} Q\varphi \, d\mu_h = \int_{K_{\lambda, R}} Q\varphi \, d\mu, \quad \forall Q \in C^1(\overline{K_{\lambda, R}}) \, (\mu_h = \mu_{u_h});$$

в) функции u_h, *рассматриваемые как функционалы на пространстве функций из* $C(\partial K)$ *с ограниченными носителями в* $\partial K \setminus \{0\}$, *при* $h \to 0$ *слабо сходятся к некоторой мере* $\nu = \nu_u$ *(на* ∂K*);*

г) функции $u_h\varphi$, *рассматриваемые как функционалы на пространстве* $C(\overline{\Gamma}_r)$ *для всех* r, *исключая счетное множество* $\Lambda_u^2 = \{r : |\nu| \times \times (\partial\Gamma_r) > 0\}$, *при* $h \to 0$ *слабо сходятся к некоторой мере* $\nu^{(r)} = \nu_u^{(r)}$;

д) если $r \notin \tilde{\Lambda}_u = \Lambda_u^1 \cup \Lambda_u^2$ *и* $h \to 0$, *не принимая значений, в которых* $\mu_h(\overline{\Gamma}_r) \neq 0$, *то для любой функции* $\eta \in C^2(\overline{\Gamma}_r)$ *существует предел*

$$\lim_{h \to +0} \int_{\Gamma_r} \varphi\eta \frac{\partial u_h}{\partial r} \, dS_r \stackrel{\text{def}}{=} Q(\eta, r, u);$$

е) если дополнительно функция и удовлетворяет в конусе K *неравенству* $u(x) \leqslant a|x|^\rho + b$, *то при любом* $R > r$

$$\int_{\Gamma_{r, R}} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d|\nu| \leqslant CR^{\rho+m-2}, \quad C = C(u, r). \tag{19}$$

Доказательство. Обозначим $G = K_{\lambda, R}$, $G_1^h = G + hx^0$, $G_2^h = G \cap \cap G_1^h$, $G_3^h = G_1^h \setminus G$, $G_4^h = G \setminus \{K + hx^0\}$, $G_5^h = G \setminus \{G_2^h \cup G_4^h\}$, $\varphi_h(x) = = \varphi(x + hx^0)$, $Q_h(x) = Q(x + hx^0)$. Тогда

$$\int_{K_{\lambda, R}} u_h Q \, d\omega - \int_{K_{\lambda, R}} uQ \, d\omega = \int_{G_1^h} uQ_{-h} \, d\omega - \int_G uQ \, d\omega =$$

$$= \int_{G_3^h} uQ_{-h} \, d\omega + \int_{G_2^h} u[Q_{-h} - Q] \, d\omega - \int_{G_4^h} uQ \, d\omega - \int_{G_5^h} uQ \, d\omega.$$

Функция $u(x)$ в области $K_{\lambda/2, R}$ ограничена сверху. Поэтому (см. оценки (13) и (14) леммы 4[1])

$$\int_G |u(x)| \, d\omega < \infty; \tag{20}$$

$$\int_{\Delta_{\lambda, R}^\delta} |u(x)| \, d\omega = O(\delta). \tag{21}$$

---

[1] Формально в лемме 4 предполагается, что функция $u(x)$ удовлетворяет неравенству $u(x) \leqslant a|x|^\rho + b$. Ясно, однако, что соответствующие оценки имеют место и тогда, когда она только ограничена сверху в областях $K_{\lambda, R}$.

Отсюда следует, что при $h \to 0$

$$\int\limits_{G_i^h} |u|\, d\omega \to 0, \ i = 3, 4, 5,$$

и, значит,

$$\lim_{h \to 0} \int\limits_{G_i^h} uQ\, d\omega = 0, \ i = 4{,}5; \ \int\limits_{G_3^h} uQ_{-h}\, d\omega \to 0.$$

Учитывая непрерывность функции Q, имеем также

$$\lim_{h \to 0} \int\limits_{G_2^h} u\, [Q_{-h} - Q]\, d\omega = 0.$$

Тем самым утверждение а) доказано.

Для доказательства утверждения б) вместо соотношений (20) и (21) воспользуемся вытекающим из оценки (15) неравенством

$$\int\limits_{G} \varphi\, d\mu < \infty. \tag{22}$$

Из этого неравенства, как нетрудно видеть, следует

$$\int\limits_{G \setminus \Delta_{\lambda, R}^{\delta}} d\mu = \delta^{-1} o(1).$$

Заметим далее, что $G_2^h \subset G \setminus \Delta_{\lambda, R}^{\delta[h]}$, где $\delta[h] = \inf\limits_{x \in G_2^h} \varphi(x) \geqslant \inf\limits_{x \in G} \varphi(x + hx^0) \geqslant ch$, $c > 0$. Следовательно,

$$\int\limits_{G_2^h} d\mu \leqslant \int\limits_{G \setminus \Delta_{\lambda, R}^{\delta[h]}} d\mu \leqslant (\delta[h])^{-1} o(1) \leqslant \frac{o(1)}{ch}. \tag{23}$$

Далее, поскольку в пункте б) предполагается, что $Q \in C^1(\overline{G})$ и $\varphi \in C^1(\overline{G})$,

$$\max_{x \in G_2^h} |\varphi_{-h} Q_{-h} - \varphi Q| = hO(1).$$

Отсюда, а также из (23) заключаем

$$\lim_{h \to 0} \int\limits_{G_2^h} [\varphi_{-h} Q_{-h} - \varphi Q]\, d\mu = 0,$$

откуда, в свою очередь, следует

$$\lim_{h \to 0} \int\limits_{G_i^h} Q\varphi\, d\mu = 0, \ i = 3, 4, 5.$$

Теперь, чтобы получить утверждение б), достаточно заметить, что

$$\int_{K_{\lambda, R}} Q\varphi\, d\mu_h - \int_{K_{\lambda, R}} Q\varphi\, d\mu = \sum_{i=2}^{3} \int_{G_i^h} [\varphi_{-h} Q_{-h} - \varphi Q]\, d\mu -$$

$$- \sum_{i=4}^{5} \int_{G_i^h} \varphi Q\, d\mu + \int_{G_3^h} \varphi Q\, d\mu.$$

Для доказательства утверждений в) и г) рассмотрим на $\Gamma_{r, R}$ и $\overline{\Gamma_r}$ соответственно семейства мер $\{u_h\, d\sigma\}_h$ и $\{u_h \varphi\, dS_r\}_h$. Из оценок (17), (18) следует, что эти семейства ограничены по вариации при любых фиксированных r и R. Следовательно, они слабо компактны и из каждой последовательности $h_j \to 0$ можно выбрать такую подпоследовательность $h_{j'}$, что меры $\nu_{j'} = u_{h_{j'}}\, d\sigma$ будут при $j' \to \infty$ слабо сходиться на пространстве $C(\Gamma_{r, R})$ к некоторой мере $\nu^{(r, R)}$, а меры $\nu_{j'}^{(r)} = u_{h_{j'}} \varphi dS_r$ будут слабо сходиться на пространстве $C(\overline{\Gamma}_r)$ к мере $\nu^{(r)}$. Заметим, что для любых чисел r' и R', $0 < r' < r < R < R' < \infty$ определенная по некоторой подпоследовательности $h_{j''}$ последовательности $h_{j'}$ предельная мера $\nu^{(r', R')}$ является продолжением меры $\nu^{(r, R)}$ на $\Gamma_{r', R'}$ в следующем смысле:

$$\nu^{(r', R')}|_{\mathring{\Gamma}_{r, R}} = \nu^{(r, R)}|_{\mathring{\Gamma}_{r, R}},$$

где $\mathring{\Gamma}_{r, R} = \Gamma_{r, R} \setminus \partial\Gamma_{r, R}$. Это обстоятельство позволяет, отправляясь от последовательности $h_{j'}$ и прореживая ее на каждом шаге, определить на $\partial K \setminus \{0\}$ некоторую меру ν. Для завершения доказательства утверждений в) и г) теперь достаточно установить единственность мер ν и $\nu^{(r)}$ при r, не принадлежащих некоторому счетному множеству.

Пусть $0 < r < R$, функция $\psi \in D(\Gamma_{r, R})$, $\tilde{\psi}$ — какое-либо продолжение функции ψ в $\overline{K}$, принадлежащее классу $C^2(\overline{K})$ и такое, что $\tilde{\psi}(x) = 0$ при $x \in \overline{K} \setminus \overline{K}_{r, R}$. Обозначим через $u_h^j(x)$ построенную стандартным способом последовательность функций из $SH(\overline{K}) \cap C^\infty(\overline{K})$, монотонно убывающую на $\overline{K}$ к функции $u_h(x)$. Применим к функциям $u_h(x)$ и $\tilde{\psi}(x)\varphi(x)$ формулу Грина в области $K_{a, b}$, $a < r < R < b$, а затем, использовав лемму 1, перейдем к пределу при $j \to \infty$. Получим тогда

$$\int_{K_{a, b}} u_h \Delta(\tilde{\psi}\varphi)\, d\omega - \theta_m \int_{K_{a, b}} \tilde{\psi}\varphi\, d\mu_h = - \int_{\Gamma_{r, R}} u_h \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma.$$

Из этого равенства в силу уже доказанных утверждений а) и б) и согласно определению меры ν вытекает, что $\forall \psi \in D(\Gamma_{r,R})$ существует

$$\lim_{h \to 0} \int_{\Gamma_{r, R}} u_h \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = \int_{\Gamma_{r, R}} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\nu = - \int_{K_{a, b}} u \Delta(\tilde{\psi}\varphi)\, d\omega + \theta_m \int_{K_{a, b}} \tilde{\psi}\varphi\, d\mu. \tag{24}$$

Тем самым утверждение в) доказано.

Для установления единственности меры $\nu^{(r)}$ при $r \notin \Lambda_u^1 \cup \Lambda_u^2$ формула Грина применяется в области $K_{a,r}$ к функциям $u_h^j(x)$ и $\tilde{\eta}(x)\varphi(x)$, где $\tilde{\eta}(x) = \eta\left(\frac{rx}{|x|}\right)\gamma(|x|)$, $\eta(x)$ — произвольная функция из $C^2(\overline{\Gamma}_r)$, а функция $\gamma(t) \in C^\infty(\boldsymbol{R}_+)$, $\operatorname{supp}\gamma \subset (a, 2r)$, $\gamma(r) = 0$, $\gamma'(r) = 1$. Перейдя в этой формуле к пределу по $j \to \infty$, получим равенство

$$-\int\limits_{K_{a,r}} u_h \Delta(\tilde{\eta}\varphi)\, d\omega + \theta_m \int\limits_{K_{a,r}} \tilde{\eta}\varphi\, d\mu_h -$$
$$-\int\limits_{\Gamma_{a,r}} u_h \tilde{\eta} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma = \int\limits_{\Gamma_r} u_h \eta\varphi\, dS_r. \tag{25}$$

Левая часть равенства (25) при $r \notin \Lambda_u^1 \cup \Lambda_u^2$, как уже доказано, имеет предел при $h \to 0$. Значит, $\forall \eta \in C^2(\overline{\Gamma}_r)\ \exists \lim\limits_{h\to 0} \int\limits_{\Gamma_r} u_h \eta\varphi\, dS_r = \int\limits_{\Gamma_r} \eta\, d\nu^{(r)}$, что завершает доказательство утверждения г).

Утверждение д) доказывается рассуждением, приведшим к формуле (25), с заменой функции $\gamma(t)$ функцией $\gamma_1(t) \in C^\infty(\boldsymbol{R}_+)$ такой, что $\operatorname{supp}\gamma_1 \subset (a, 2r)$, $\gamma_1(r) = 1$, $\gamma_1'(r) = 0$. При этом получаем, что при $r \notin \Lambda_u^1 \cup \Lambda_u^2$

$$\exists \lim_{h\to 0} \int\limits_{\Gamma_r} \eta\varphi \frac{\partial u_h}{\partial r}\, dS_r = -\int\limits_{K_{a,r}} u\Delta(\tilde{\eta}\varphi)\, d\omega +$$
$$+\theta_m \int\limits_{K_{a,r}} \tilde{\eta}\varphi\, d\mu - \int\limits_{\Gamma_{a,r}} \tilde{\eta} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\nu. \tag{26}$$

Отметим, наконец, что соотношение (19) следует из оценки (10). Лемма доказана.

Замечание 1. Можно показать, что при $r, R \notin \Lambda_u^1 \cup \Lambda_u^2$ наименьшая гармоническая мажоранта $H^{(r,R)}$ функции u в области $K_{r,R}$ представится в виде

$$H^{(r,R)}(x) = \frac{1}{\theta_m} \int\limits_{\Gamma_{r,R}} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y}\, d\nu(y) +$$
$$+\frac{1}{\theta_m} \int\limits_{\overline{\Gamma}_r} g(x, y)\, d\nu^{(r)}(y) + \frac{1}{\theta_m} \int\limits_{\overline{\Gamma}_R} g(x, y)\, d\nu^{(R)}(y),$$

где $G(x, y)$ — функция Грина области $K_{r,R}$, а $g(x, y) = \lim\limits_{y'\to y,\ y' \notin \Gamma_r \cup \Gamma_R} \left. \frac{\partial G(x, y')}{\partial n_{y'}} \right/ \varphi(y')$, $x \in K_{r,R}$, $y \in \overline{\Gamma}_r \cup \overline{\Gamma}_R$.

Замечание 2. В том случае, когда какое-то подмножество F границы конуса, открытое в топологии ∂K, компактно вложено в область субгармоничности функции $u(x)$, граничная мера ν_u на F совпадает с мерой $u\, d\sigma$. Действительно, выберем для любой функции $\psi \in D(F)$ такое ее продолжение $\tilde{\psi}$ в $\overline{K}$, что $\tilde{\psi}(x) = 0$ вне достаточно малой окрестности (в R^m) Ω множества $\operatorname{supp} \psi$. Тогда для функций $u^j \in SH(\Omega) \cap \cap C^\infty(\Omega)$, $u^j \searrow u$ на Ω и функции $\tilde{\psi}\varphi$ можно записать формулу Грина в области $K_{a,b}$, $\Gamma_{a,b} \supset F$. Перейдя в ней к пределу по $j \to \infty$, получим

$$\int\limits_{K_{a,b}} u\Delta(\tilde{\psi}\varphi)\, d\omega - \theta_m \int\limits_{K_{a,b}} \tilde{\psi}\varphi\, d\mu = -\int\limits_F u\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma.$$

Сравнивая это равенство с соотношением (24) и учитывая единственность меры ν, приходим к искомому утверждению.

По этим же соображениям (используя соотношение (25) для функции $\eta \in D(\Gamma_r)$) предельная мера $\nu^{(r)}$ функции $u(x)$, субгармонической в K, совпадает для $r \notin \Lambda_u^1 \cup \Lambda_u^2$ с мерой $u\varphi\, dS_r$ на множествах, компактно вложенных в Γ_r, а значит, и на всем (открытом в топологии S_r) множестве Γ_r. Более того, как следует из утверждения а) леммы 5, равенство $d\nu^{(r)} = u\varphi\, dS_r$ справедливо и на множестве Γ_r для всех $r \in (0, \infty)$, не принадлежащих некоторому множеству Λ_u^3 нулевой лебеговой меры.

В дальнейшем множество $\Lambda_u^1 \cup \Lambda_u^2 \cup \Lambda_u^3$ всех «исключительных» значений будем обозначать через Λ_u.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с. 2. *Агранович П. З., Ронкич Л. И.* О функциях вполне регулярного роста многих переменных // Ann. Polon. Math. 1981. 39, № 2. С. 239—254. 3. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Мат. сб. 1979. **108 (150)**, № 2. С. 147—167. 4. *Gruman L.* Les zéros des fonctions entiéres d'o dre fini, de croissance réguliéve dans C^n // C. r. Acad. Sci. Paris. 1976. **282**. P. 5. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., 1986. 240 с. 6. *Ронкин Л. И.* Функции вполне регулярного роста в полуплоскости // Докл. АН УССР. Сер. А., 1985. № 3. С. 10—13. 7. *Рашковский А. Ю., Ронкин Л. И.* Субгармонические функции конечного порядка в конусе // Докл. АН СССР. 1987. **297**, № 2. С. 298—302. 8. *Рашковский А. Ю.* Интегральное представление субгармонических функций конечного порядка в конусе. // Сиб. мат. журн. 1989. 30, № 3. С. 109—123. 9. *Berenstein C. A.* An estimate for the number of zeros of analytic functions in *n*-dimensional cones // Adv. Compl. Funct. Theory. Lect. Notes Math., 1976. N 505. P. 1—16.

Поступила в редколлегию 12.01.89