УДК 517.946.225

Л. С. ПАНКРАТОВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ С «НАКОПИТЕЛЯМИ»

1. *Постановка задачи и формулировка основного результата.* Пусть Ω — произвольная ограниченная область в E_n ($n \geqslant 2$) с гладкой границей $\partial\Omega$, а $R^{(s)}$ — замкнутое сильно изрезанное множество в Ω. Будем предполагать, что $R^{(s)}$ зависит от параметра s так, что при каждом фиксированном s $R^{(s)}$ состоит из «пористых» блоков, разделенных тонкими «трещинами» (возможны соединения блоков между собой с помощью «перемычек» в трещинах, так что $R^{(s)}$ может быть и связным). При $s \to \infty$ размеры блоков и пор в них уменьшаются, а сеть трещин становится все более плотной в Ω. Рассмотрим область $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus R^{(s)}$. Учитывая структуру $R^{(s)}$, эту область можно представить в виде объединения непересекающихся областей $Q_i^{(s)}$, $i = 1 \div s$ (внутренние поры в блоках или «накопители»), $G^{(s)}$ (трещины) и связывающего их множества $W^{(s)}$ (граничные поры блоков):

$$\Omega^{(s)} = G^{(s)} \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{s} Q_i^{(s)}\Big) \cup W^{(s)}. \tag{1}$$

При каждом s рассмотрим в областях $\Omega^{(s)}$ вариационную задачу

$$J^{(s)}(u) = \int\limits_{\Omega^{(s)}} F(x, u, \nabla u)\, dx \to \min, \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \Phi(x). \tag{3}$$

Такие задачи возникают, например, в теории фильтрации. Целью настоящей работы является изучение асимптотического поведения $u^{(s)}$ — решений вариационной задачи (2), (3) при $s \to \infty$. Исследование аналогичных вопросов для линейных эллиптических и параболических уравнений проведено ранее [1]. В данной работе эти результаты переносятся на краевые задачи для квазилинейных эллиптических уравнений, являющихся уравнениями Эйлера функционалов типа (2). Будем предполагать, что функционал (2) удовлетворяет условиям:

I. $F(x, u, p)$ — дважды непрерывно дифференцируемая на множестве $\{(x, u, p): x \in \overline{\Omega},\ u \in (-\infty, \infty),\ p \in E_n\}$ выпуклая по аргументу p функция ($p \neq q$)

$$F(x, u, p) - F(x, u, q) - F_{p_i}(x, u, q)(p_i - q_i) \geqslant 0,$$

удовлетворяющая условиям ($A_1, A_2 \geqslant 0$):

$$|F(x, u, p) - F(x, v, q)| \leqslant A_1 (1 + |u| + |v| + |p| + \\ + |q|)^{m-1} (|u - v| + |p - q|),$$

$$|F_v(x, v_1, 0) - F_v(x, v_2, 0)| \leqslant A_2 (1 + |v_1| + |v_2|)^{m-2} |v_1 - v_2|.$$

II. Существует такая постоянная $A_3 \geqslant 0$, что

$$\hat{F}(x, u, p) = F(x, u, p) - F(x, u, 0) > A_3 |p|^m.$$

III. Функционал $J^{(s)}(u)$ ограничен снизу:

$$J^{(s)}(u) \geqslant \varphi\left(\|u\|^{(1)}_{m, \Omega^{(s)}}\right),$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция такая, что $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

IV. Интегрант $F(x, u, p)$ удовлетворяет условию

$$F(x, u, 0) \geqslant g_1(x) |u|^{m_1} + g_2(x),$$

где $m_1 < m$; $g_i(x) \leqslant 0$ $(i = 1, 2)$ и $g_2(x) \in L_1(\Omega)$;

$$g_1(x) \in L_{m_2}(\Omega); \; m_2 = \frac{m}{m - m_1}.$$

Введем необходимые для дальнейшего определения и предположения.

Определение 1. *Пусть* $\{B^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$, $\{\boldsymbol{D}^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ — *последовательности подобластей в* Ω, *причем* $B^{(s)} \subseteq \boldsymbol{D}^{(s)} \subseteq \Omega$ *(в частности,* $\boldsymbol{D}^{(s)}$ *может совпадать с* Ω*). Будем говорить, что области* $B^{(s)}$ *сильно связаны относительно областей* $\boldsymbol{D}^{(s)}$, *если для любой функции* $v^{(s)} \in W^1_m(B^{(s)})$ *существует продолжение* $\tilde{v}^{(s)}(x) = v^{(s)}(x)$, *когда* $x \in B^{(s)}$, *и справедливо неравенство*

$$\|\tilde{v}^{(s)}\|^{(1)}_{m, \mathbf{D}^{(s)}} \leqslant C \|v^{(s)}\|^{(1)}_{m, B^{(s)}}$$

с постоянной C, *не зависящей от* s, $B^{(s)}$, $\boldsymbol{D}^{(s)}$.

Определение 2. *Будем называть области* $B^{(s)}$ *локально сильно связными в* Ω, *если для любых подобластей* $\boldsymbol{D} \Subset \Omega$ и $\tilde{\boldsymbol{D}} \Subset \boldsymbol{D}$ *(*$\Subset$ *— компактное вложение) и любой функции* $v^{(s)}(x) \in W^1_m(\boldsymbol{D} \cap B^{(s)})$ *существует функция* $\tilde{v}^{(s)}(x) \in W^1_m(\boldsymbol{D})$ *такая, что* $\tilde{v}^{(s)}(x) = v^{(s)}(x)$ *при* $x \in B^{(s)} \cap \tilde{\boldsymbol{D}}$ *и справедливо неравенство*

$$\|\tilde{v}^{(s)}\|^{(1)}_{m, \mathbf{D}} \leqslant C \|v^{(s)}\|^{(1)}_{m, \mathbf{D} \cap B^{(s)}}$$

с постоянной C, *не зависящей от* s, $\boldsymbol{D}$, $\tilde{\boldsymbol{D}}$.

Пусть $K^{\alpha}_{\delta} = K(x^{\alpha}, \delta)$ — куб с центром в точке $x^{\alpha} \in \Omega$ и ребрами длиной $\delta > 0$, ориентированными по координатным осям, $b = \{b_1, \ldots, b_n\}$ — вектор в E_n, а $t^{(s)} = \{t_1, \ldots, t_s\}$ — вектор в E_s. Рассмотрим функционалы:

$$C(x^{\alpha}, a, b, s, \delta) = \min_{u} \Big\{ \int\limits_{K^{\alpha}_{\delta} \cap G^{(s)}} \hat{F}(x, a, \nabla u)\, dx + \\ + \delta^{-m-\theta} \|u - (x - x^{\alpha}, b)\|^{m}_{m, K^{\alpha}_{\delta} \cap G^{(s)}} \Big\}; \qquad (4)$$

$$\Gamma(x^{\alpha}, t_0, t^{(s)}, s, \delta) = \min_{u} \Big\{ \int\limits_{K^{\alpha}_{\delta} \cap \Omega^{(s)}} [\acute{F}(x, u, \nabla u) + \\ + \delta^{-m-\theta} (|u - t_0|^m \chi^{(s)}_{G} + \sum_{j} |u - t_j|^m \chi^{(s)}_{j})]\, dx \Big\}, \qquad (5)$$

где $(x - x^\alpha, b)$ — скалярное произведение в E_n, $0 < \theta < 1$, $\chi_G^{(s)}$, $\chi_j^{(s)}$ — характеристические функции областей $G^{(s)}$ и $Q_j^{(s)}$ $(j = 1 \div s)$; минимум в (4) берется по множеству функций $u \in W_m^1(K_\delta^\alpha \cap G^{(s)})$, а в (5) — по множеству функций $u \in W_m^1(K_\delta^\alpha \cap \Omega^{(s)})$; суммирование по j распространяется на накопители, компактно вложенные в K_δ^α.

Числа $C(x^\alpha, a, b, s, \delta)$ являются локальной (т. е. в кубе K_δ^α) характеристикой «проводимости» трещин $G^{(s)}$. Числа $\Gamma(x^\alpha, t_0, t^{(s)}, s, \delta)$ характеризуют степень связи между накопителями и множеством $G^{(s)}$ (т. е. «пропускную способность» границы j-го блока) и между самими накопителями.

Предположим, что компоненты области $\Omega^{(s)}$ в разложении (1) удовлетворяют условиям:

1. $Q_j^{(s)}$ сильно связны относительно шаров $D_j^{(s)}$ минимального радиуса $r_j^{(s)}$, содержащих $Q_j^{(s)}$, и при $s \to \infty$, $r_j^{(s)} \to 0$.

2. $G^{(s)}$ локально сильно связны в Ω и расстояние от множества $R^{(s)}$ до $\partial\Omega$ положительно и не стремится к нулю при $s \to \infty$. Отсюда следует, что $G^{(s)}$ сильно связны относительно Ω.

3. $\lim\limits_{s \to \infty} \operatorname{mes} W^{(s)} = 0$.

4. $\lim\limits_{\delta \to 0} \lim\limits_{s \to \infty} \operatorname{mes} [G^{(s)} \cap K(x, \delta)]/\delta^n = r_1(x)$, $x \in \Omega$.

5. $\lim\limits_{\delta \to 0} \lim\limits_{s \to \infty} \operatorname{mes} [Q^{(s)} \cap K(x, \delta)]/\delta^n = r_2(x)$, $x \in \Omega$. Здесь r_1, r_2 — непрерывные функции, причем $r_1(x) > 0$.

6. $\lim\limits_{\delta \to 0} \lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{C(x, a, b, s, \delta)}{\delta^n} = \lim\limits_{\delta \to \infty} \overline{\lim\limits_{s \to \infty}} \dfrac{C(x, a, b, s, \delta)}{\delta^n} = T(x, a, b)$, $x \in \Omega$.

7. Существует такая дважды непрерывно дифференцируемая по переменным x, u, V функция $c(x, u, V)$, что равномерно по $t^{(s)}$ выполняется равенство:

$$\lim_{\delta \to 0} \underline{\lim_{s \to \infty}} \frac{\Gamma(x, t_0, t^{(s)}, s, \delta)}{\sum\limits_j \operatorname{mes} Q_j^{(s)} c(x, t_0, t_j)} = \lim_{\delta \to 0} \overline{\lim_{s \to \infty}} \frac{\Gamma(x, t_0, t^{(s)}, s, \delta)}{\sum\limits_j \operatorname{mes} Q_j^{(s)} c(x, t_0, t_j)} = 1$$

для любой точки $x \in \Omega$, а суммирование по j распространяется на $Q_j^{(s)}$, компактно вложенные в куб $K(x, \delta)$.

Функция $c(x, u, V)$ удовлетворяет условию

$$|c_V(x, u_1, V_1) - c_V(x, u_2, V_2)| \leq A_4(1 + |u_1| +$$
$$+ |V_1| + |u_2| + |V_2|)^{m-2}(|u_1 - u_2| + |V_1 - V_2|).$$

8. Функция $f(x, u, V) = F(x, V, 0) + c(x, u, V)$ такова, что $|c_{Vu}(x, u, V)| \leq A_5 |f_{VV}(x, u, V)|$, $f_{xV}(x, u, V)| \leq A_6 |f_{VV}(x, u, V)|$, x $|V|$, а уравнение $f_V(x, u, V) = 0$ имеет единственное решение $V = V(x, u)$, удовлетворяющее оценке

$$|V(x, u)| \leq A_7 + A_8 |u(x)|^{m-\gamma},$$

где A_7, $A_8 > 0$, $0 < \gamma < 1$.

Определение 3. *Будем говорить, что последовательность* $v^{(s)}(x) \in L_m(B^{(s)})$ *сходится к функции* $v(x) \in L_m(\Omega)$ *по норме* $L_m(B^{(s)})$, *если при* $s \to \infty$ $\| v^{(s)} - v \|_{m, B^{(s)}} \to 0$.

Основным результатом данной работы является теорема.

Теорема. *Пусть при* $s \to \infty$ *выполняются условия 1—8, а функционал* (2) *удовлетворяет условиям* I—V, *тогда из любой последовательности* $\{u^{(s)}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ *решений задачи* (2), (3) *можно выделить подпоследовательность* $\{u^{(s_k)}(x), k = 0, 1, 2, \ldots\}$, *сходящуюся по норме* $L_m(G^{(s)})$ *к функции* $u(x)$, *доставляющей минимум функционалу*

$$J(u, V) = \int_{\Omega} \{T(x, u, \nabla u) + F(x, u, 0) r_1(x) +$$

$$+ F(x, V, 0) r_2(x) + c(x, u, V) r_2(x)\} \, dx, \tag{6}$$

где функция $V(x, u)$ *есть решение уравнения*

$$F_V(x, V, 0) + C_V(x, u, V) = 0 \tag{7}$$

в классе функций, удовлетворяющих граничному условию

$$u|_{\partial\Omega} = \Phi(x). \tag{8}$$

II. *Вспомогательные предложения.*

Лемма 1. *Пусть при каждом* $\delta > 0$ *задан куб* K_δ^α *с центром в точке* $x^\alpha \in \Omega$, *а в нем последовательности множеств* $\{B_\delta^{\alpha(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ *таких, что* $(K_\delta^\alpha \setminus K_{\delta'}^\alpha) \cap \Omega^{(s)} \subset B_\delta^{\alpha(s)}$ *и при* $\delta \to 0$

$$\lim_{s \to \infty} \operatorname{mes} B_\delta^{\alpha(s)} = o(\delta^n), \quad \delta \to 0. \tag{9}$$

Пусть выполняются условия 2, 4, 6 теоремы, тогда существуют последовательности множеств $\{\hat{B}_\delta^{\alpha(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ *и функций* $\{\hat{v}_\delta^{\alpha(s)}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ *таких, что*

$$B_\delta^{\alpha(s)} \subset \hat{B}_\delta^{\alpha(s)}, \ \overline{\lim_{s \to \infty}} \operatorname{mes} \hat{B}_\delta^{\alpha(s)} = o(\delta^n), \ (\delta \to 0); \tag{10}$$

$$\hat{v}_\delta^{\alpha(s)}(x) \in W_m^1(K_\delta^\alpha), \ \max_{x \in K_\delta^\alpha} |\hat{v}_\delta^{\alpha(s)}| \leqslant C\delta; \tag{10а}$$

$$\overline{\lim_{s \to \infty}} \int_{\hat{B}_\delta^{\alpha(s)}} |\nabla \hat{v}_\delta^{\alpha(s)}|^m \, dx = o(\delta^n); \tag{10б}$$

$$\overline{\lim_{s \to \infty}} \int_{K_\delta^\alpha \cap \Omega^{(s)}} F(x, a, \nabla \hat{v}_\delta^{\alpha(s)}) \, dx \leqslant T(x, a, b) \delta^n + o(\delta^n). \tag{10в}$$

Лемма 2. *Пусть* t_0^α, t_1^α *— некоторые числа, тогда если выполняются условия 3, 5, 7 теоремы, то в любом кубе* K_δ^α *существуют последовательности множеств* $\{H_\delta^{\alpha(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ *и функций* $\{\psi_\delta^{\alpha(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ *такие, что* $\hat{\psi}_\delta^{\alpha(s)}(x) \in W_m^1(K_\delta^\alpha \cap \Omega^{(s)})$, $W^{(s)} \cap K_\delta^\alpha \subset \hat{H}_\delta^{\alpha(s)}$ *и, кроме того,*

$$\tau_2^\alpha \leqslant \hat{\psi}_\delta^{\alpha(s)} \leqslant \tau_1^\alpha, \ \text{где} \ \tau_2^\alpha = \min\{t_0^\alpha, t_1^\alpha\}, \ \tau_1^\alpha = \max\{t_0^\alpha, t_1^\alpha\},$$

$$\hat{\psi}_\delta^{\alpha(s)}(x) = t_0^\alpha, \ \text{при} \ x \in [(G^{(s)} \cap K_\delta^\alpha) \cup (Q^{(s)} \cap (K_\delta^\alpha \setminus K_{\delta'}^\alpha))] \setminus \hat{H}_\delta^{\alpha(s)},$$

$$\hat{\psi}_\delta^{\alpha(s)}(x) = t_1^\alpha, \ \text{при} \ x \in (\tilde{Q}^{(s)} \cap K_{\delta'}^\alpha) \setminus \hat{H}_\delta^{\alpha(s)}, \ \tilde{Q}^{(s)} = \bigcup_i Q_i^{(s)},$$

где $\delta' = \delta - 2\rho$, *а суммирование по* j *распространяется на* $Q_j^{(s)}$, *компактно вложенные в* $K_{\delta'}^{\alpha}$ *и при* $\delta \to 0$ *и* $\rho = o(\delta)$ *справедливы оценки:*

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \operatorname{mes}\{\hat{H}_\delta^{\alpha(s)}\} = O\left(\delta^{n+\frac{\theta}{m+1}}\right); \tag{11}$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int\limits_{(K_\delta^\alpha \setminus K_{\delta'}^\alpha)\cap\Omega^{(s)}} |\nabla\hat{\psi}_\delta^{\alpha(s)}|^m\, dx = o(\delta^n); \tag{11а}$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int\limits_{(K_\delta^\alpha \setminus K_{\delta'}^\alpha)\cap\Omega^{(s)}} |\hat{\psi}_\delta^{\alpha(s)} - t_0^\alpha|^m\, dx = o\left(\delta^{n+m+\frac{\theta}{2}}\right); \tag{11б}$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int\limits_{K_\delta \cap\Omega^{(s)}} \hat{F}(x, \hat{\psi}_\delta^{\alpha(s)}, \nabla\hat{\psi}_\delta^{\alpha(s)})\, dx \leqslant C(x^\alpha, t_0^\alpha, t_1^\alpha)\, r_2(x^\alpha) + o(\delta^n). \tag{11в}$$

Доказательство лемм 1, 2 аналогично доказательству соответствующих лемм из [2].

Лемма 3. *Пусть в области* Ω *задана функция* $v(x) \in C^1(\Omega)$, *а в областях* $\Omega^{(s)}$ — *функции* $v^{(s)}(x) \in W_m^1(\Omega^{(s)})$ *такие, что*

$$\| v^{(s)}(x) \|_{m,\Omega^{(s)}}^{(1)} \leqslant C, \tag{12}$$

где постоянная C *не зависит от* s, *а при* $s \to \infty$ *последовательность* $\{v^{(s)}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ *сходится к* $v(x)$ *по норме* $L_m(G^{(s)})$. *Тогда, если выполняются условия 1—3, 5, 7 теоремы, существуют последовательности* $\{\hat{v}^{(s)}(x) \in W_m^1(\Omega)\}_{s=1}^{\infty}$ *функций и открытых множеств* $\{\hat{B}^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ *таких, что* $W^{(s)} \subset \hat{B}^{(s)} \subset \Omega^{(s)}$, $\hat{v}^{(s)}(x) = v^{(s)}(x)$ *при* $x \in G^{(s)} \setminus \hat{B}^{(s)}$ *и при* $s \to \infty$

1) $\operatorname{mes}\hat{B}^{(s)} \to 0$;

2) $\| \hat{v}^{(s)} \|_{m,\hat{B}^{(s)}}^{(1)} \to 0$;

3) $$\int\limits_{Q^{(s)}\cup\hat{B}^{(s)}} \hat{F}(x, v^{(s)}, \nabla v^{(s)})\, dx \geqslant \sum_{j=1}^{s} c(x_j, v(x_j), M_j(v^{(s)})) \operatorname{mes} Q_j^{(s)} + o(1),$$

где $x_j \in Q_j^{(s)}$ — *среднее значение функции* $v^{(s)}$ *в области* $Q_j^{(s)}$.

Доказательство. Утверждения 1, 2 леммы 3 доказываются аналогично соответствующим утверждениям леммы 5 из [2]. Покажем, что выполняется утверждение 3.

Пусть пространство E_n разбито на непересекающиеся во внутренних точках кубы K_δ^α с центрами в точках x^α и ребрами длины $\delta > 0$. Рассмотрим множество

$$\hat{B}(\bar{\varepsilon}, s, \delta) = \{x \in K_\delta^\alpha \cap \Omega^{(s)} : |v^{(s)} - v(x^\alpha)| > \bar{\varepsilon}\}, \tag{13}$$

где $\bar{\varepsilon}$ — некоторое малое положительное число. Пользуясь определением (13), можно показать, что $\widehat{B}(\bar{\varepsilon}, s, \delta) \subset (Q^{(s)} \cup \widehat{B}^{(s)}) \cap K_\delta^\alpha$. Рассмотрим функцию

$$\hat{v}_\delta^{(s)} = \begin{cases} v(x^\alpha), & x \in (G^{(s)} \setminus \widehat{B}(\bar{\varepsilon}, s, \delta)) \cap K_\delta^\alpha; \\ v^{(s)} \pm \bar{\varepsilon}, & x \in \widehat{B}(\bar{\varepsilon}, s, \delta). \end{cases} \tag{14}$$

Пользуясь (13), (14) и записывая в каждом кубе K_δ^α оценку снизу для интеграла от $\widehat{F}(x, v^{(s)}, \nabla v^{(s)})$ по множеству $(\widehat{B}^{(s)} \cup Q^{(s)}) \cap K_\delta^\alpha$ в силу определения функционала (5) $L_m(G^{(s)})$-сходимости последовательности $\{v^{(s)}(x)\}_{s=1}^\infty$ к $v(x)$ и неравенства Пуанкаре в пределе при $\delta \to 0$ и $\bar{\varepsilon} \to 0$, получим требуемое утверждение 3.

Лемма доказана.

III. *Доказательство теоремы*. Из [3] следует, что при выполнении условий теоремы при каждом s существует, по крайней мере, одна функция $u^{(s)}$, доставляющая минимум функционалу (2). Из условия III теоремы получим

$$\| u^{(s)} \|_{m, \Omega^{(s)}}^{(1)} \leqslant C, \tag{15}$$

где постоянная C не зависит от s. Обозначим через $W_\Phi(\Omega^{(s)})$ (соответственно $W_\Phi(\Omega)$) класс функций из $W_m^1(\Omega^{(s)})$ (соответственно $W_m^1(\Omega)$), равных $\Phi(x)$ на $\partial\Omega$. Учитывая, что области $G^{(s)}$ сильно связны относительно Ω и $\partial\Omega \subset \partial G^{(s)}$, заключаем, что существуют функции $\tilde{u}^{(s)}(x) \in \in W_\Phi(\Omega)$, равные $u^{(s)}(x)$ на $G^{(s)}$ и удовлетворяющие неравенству:

$$\| \tilde{u}^{(s)} \|_{m, \Omega}^{(1)} \leqslant C_1, \tag{16}$$

где постоянная C_1 не зависит от s. В силу (16) можно выделить последовательность $\{\tilde{u}^{(s_k)}\}_{k=1}^\infty$, сходящуюся слабо в $W_m^1(\Omega)$ и сильно в $L_m(\Omega)$ к некоторой функции $u(x) \in W_\Phi(\Omega)$. Покажем, что $u(x) \in W_\Phi(\Omega)$ является решением задачи (6) — (8). Пусть $w(x)$, $v(x)$ — произвольные, непрерывно дифференцируемые в Ω функции, причем $w(x) \in W_\Phi(\Omega)$. Покроем область Ω кубами $K_\delta^\alpha = K(x^\alpha, \delta)$ с ребрами длины $\delta > 0$ и центрами x^α, находящимися в узлах пространственной кубической решетки периода $\delta - \rho$. По этому покрытию построим разбиение единицы $\{\varphi_\alpha(x)\}_{s=1}^\infty$, т. е. набор дважды непрерывно дифференцируемых и финитных функций таких, что $0 \leqslant \varphi_\alpha \leqslant 1$; $\varphi_\alpha(x) = 0$ при $x \notin K_\delta^\alpha$; $\varphi_\alpha(x) = 1$ при $x \in K_\delta^\alpha \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_\alpha^\beta$; $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1$ при $x \in \Omega$; $|\nabla\varphi_\alpha| < < C_3\rho^{-1}$. Пусть $\{\hat{\psi}_\delta^{\alpha(s)}\}_{s=1}^\infty$ и $\{\widehat{H}_\delta^{\alpha(s)}\}_{s=1}^\infty$ — функции и множества, определенные в лемме 2, $\{\hat{v}_\delta^{\alpha(s)}\}_{s=1}^\infty$ и $\{\widehat{B}_\delta^{\alpha(s)}\}_{s=1}^\infty$ — функции и множества, определенные в лемме 1 для

$$B_\delta^{\alpha(s)} = [\textstyle\bigcup_\beta{}' (\widehat{H}_\delta^{\beta(s)} \cap K_\delta^\alpha)] \cup [\bigcup_\beta{}'' (\widehat{H}_{10}^{\beta(s)} \cap K_\delta^\alpha)] \cup$$
$$\cup [(K_\delta^\alpha \setminus K_{\delta'}^\alpha) \cap \Omega^{(s)}],$$

где $\bigcup_\beta{}'$, $\bigcup_\beta{}''$ отвечают разбиению кубов на те, в которых выполняется неравенство $|w(x)-v(x)|>\varepsilon$ для всех точек куба, и все остальные, причем для последних множество $\widehat{H}_{10}^{\alpha(s)}$ строится вместе с функцией $\widehat{\psi}_{10}^{\alpha(s)}$ для значений $t_0^\alpha=1$, $t_1^\alpha=0$. Ясно, что $\operatorname{mes} B_\delta^{\alpha(s)}=o(\delta^n)$. Пользуясь указанным разбиением, определяем функцию

$$w^{(s)}(x)=\sum_\alpha{}' \left\{[w(x)+\widehat{v}_\delta^{\alpha(s)}-(x-x^\alpha,\ b^\alpha)]\frac{\widehat{\psi}_\delta^{\alpha(s)}-t_1^\alpha}{t_0^\alpha-t_1^\alpha}+\right.$$

$$\left.+v(x^\alpha)\frac{\widehat{\psi}_\delta^{\alpha(s)}-t_0^\alpha}{t_1^\alpha-t_0^\alpha}\right\}\varphi_\alpha(x)+\sum_\alpha{}'' \{[w(x)+\widehat{v}_\delta^{\alpha(s)}-$$

$$-(x-x^\alpha,\ b^\alpha)]\,\widehat{\psi}_{10}^{\alpha(s)}+v(x^\alpha)(1-\widehat{\psi}_{10}^{\alpha(s)})\}\,\varphi_\alpha(x), \tag{17}$$

где $t_0^\alpha=w(x^\alpha)$, $t_1^\alpha=v(x^\alpha)$, $b^\alpha=\nabla w(x^\alpha)$. Поскольку функция указанного вида принадлежит классу $W_\Phi(\Omega^{(s)})$, имеем

$$J^{(s)}(u^{(s)})\leqslant J^{(s)}(w^{(s)}). \tag{18}$$

Представляя функционал в правой части (18) в виде суммы интегралов по кубам со стороной $\delta'=\delta-2\rho$ и всевозможными пересечениями кубов K_δ^α и K_δ^β, оцениваем указанный функционал так, как это сделано в работе [2].

Выбирая $\rho=\rho(\delta)$ в виде

$$\rho=\max\{\delta^{1+\frac{\theta}{2m}},\ \delta^{\frac{1}{n+m+1}}\Delta_\delta^{\frac{1}{n+m+1}}\}, \tag{19}$$

где

$$\Delta_\delta=\int\limits_{\widehat{B}_\delta^{\alpha(s)}}|\widehat{v}_\delta^{\alpha(s)}-(x-x^\alpha,\ b^\alpha)|^m dx,$$

приходим к оценке

$$\varlimsup_{s\to\infty} J^{(s)}(u^{(s)})\leqslant J(w,\ v), \tag{20}$$

где $J(w,\ v)$ определяется равенством (6).

Это неравенство получено в предположении $w(x)\in C^1(\Omega)\cap W_\Phi(\Omega)$, $v(x)\in C^1(\Omega)$, а так как $C^1(\Omega)$ и $C^1(\Omega)\cap W_\Phi(\Omega)$ плотны соответственно в $W_m^1(\Omega)$ и $W_\Phi(\Omega)$, с помощью теоремы вложения легко заключить, что оно верно для любых функций $w(x)\in W_\Phi(\Omega)$ и $v(x)\in W_m^1(\Omega)$.

Покажем теперь, что если $u(x)\in W_\Phi(\Omega)$ является пределом по норме $L_m(G^{(s)})$ решений $u^{(s)}$ задачи (2), (3) (по некоторой последовательности $s=s_k\to\infty$), а $v(x)$ удовлетворяет уравнению

$$f_v(x,\ u,\ v)=0, \tag{21}$$

то справедливо и обратное неравенство:

$$\varliminf_{s=s_k\to\infty} J^{(s)}(u^{(s)})\geqslant J(u,\ v). \tag{22}$$

Аппроксимируем $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируемой функцией $u_\varepsilon(x)$ такой, что

$$\| u_\varepsilon - u \|^{(1)}_{m,\,\Omega} \leqslant \varepsilon \quad (\varepsilon > 0). \tag{23}$$

Ясно, что функции $u^{(s)}_\varepsilon(x) = u^{(s)}(x) + u_\varepsilon(x) - u(x)$ при $s = s_k \to \infty$ сходятся в $L_m(G^{(s)})$ к u_ε и удовлетворяют неравенствам

$$\| u^{(s)}_\varepsilon - u^{(s)} \|^{(1)}_{m,\,\Omega^{(s)}} \leqslant \varepsilon, \quad \| u^{(s)}_\varepsilon \|^{(1)}_{m,\,\Omega^{(s)}} < C_4, \tag{24}$$

где постоянная C_4 в силу соответствующих оценок для $u^{(s)}(x)$ не зависит от s, ε.

Воспользуемся леммой 3 применительно к функциям $u^{(s)}_\varepsilon(x)$ $(s = s_k)$ и $u_\varepsilon(x)$. Так как множества $G^{(s)}$ сильно связны относительно Ω, согласно этой лемме существуют множества $\hat{B}^{(s)} \subset \Omega^{(s)}$ и функции $\hat{u}^{(s)}_\varepsilon(x) \in W^1_m(\Omega)$ $(s = s_k)$ такие, что $W^{(s)} \subset \hat{B}^{(s)}$, $\hat{u}^{(s)}_\varepsilon = u^{(s)}_\varepsilon$ при $x \in \Omega^{(s)} \setminus \hat{B}^{(s)}$, при $s = s_k \to \infty$ $\hat{u}^{(s)}_\varepsilon(x)$ сходится к $u_\varepsilon(x)$ в $L_m(\Omega)$ и

$$\operatorname{mes} \hat{B}^{(s)} \to 0, \quad \| \hat{u}^{(s)}_\varepsilon \|^{(1)}_{m,\,\hat{B}^{(s)}} \to 0. \tag{25}$$

В силу свойств функционала и (24) можно показать, что вместо (22) для завершения доказательства теоремы достаточно обосновать неравенство $(s = s_k)$

$$\varliminf_{s \to \infty} J^{(s)}(u^{(s)}_\varepsilon) \geqslant J(u_\varepsilon, v_\varepsilon), \tag{26}$$

где функция $v_\varepsilon(x)$ удовлетворяет уравнению

$$f_{v_\varepsilon}(x, u_\varepsilon, v_\varepsilon) = 0. \tag{27}$$

Для обоснования (26), (27) разобьем функционал $J^{(s)}(u^{(s)}_\varepsilon)$ на два интеграла по множествам $\Omega^{(s)} \setminus (\hat{B}^{(s)} \cup Q^{(s)})$ и $\hat{B}^{(s)} \cup Q^{(s)}$. Тогда, пользуясь методом, предложенным в [2], получаем $(s = s_k)$:

$$\lim_{\delta \to 0} \varliminf_{s \to \infty} \int\limits_{\Omega^{(s)} \setminus (\hat{B}^{(s)} \cup Q^{(s)})} F(x, u^{(s)}_\varepsilon, \nabla u^{(s)}_\varepsilon)\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega} \{ T(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) + F(x, u_\varepsilon, 0)\, r_1(x) \}\, dx. \tag{28}$$

Рассмотрим интеграл по множеству $\hat{B}^{(s)} \cup Q^{(s)}$. Пользуясь условием IV и леммой 5, можно показать, что

$$\int\limits_{\hat{B}^{(s)} \cup Q^{(s)}} F(x, u^{(s)}_\varepsilon, \nabla u^{(s)}_\varepsilon)\, dx \geqslant \sum_{j=1}^{s} f(x_j, u_\varepsilon(x_j), \tag{29}$$

$$M_j(u^{(s)}_\varepsilon)) \operatorname{mes} Q^{(s)}_j + o(1) \quad \text{при} \quad s \to \infty,$$

где $M_j(u^{(s)}_\varepsilon)$ — среднее значение функции $u^{(s)}_\varepsilon$ по множеству $Q^{(s)}_j$. Ясно, что последнее неравенство только усилится, если в нем $M_j(u^{(s)}_\varepsilon)$ заменить числами λ_j^ε, являющимися точками минимума функций $f(x_j, u_\varepsilon(x_j), \lambda)$ и, значит, удовлетворяющими уравнениям $f_\lambda(x_j, u_\varepsilon(x_j), \lambda) = 0$. Положим $\lambda_j^\varepsilon = v_\varepsilon(x_j)$, где функция v_ε — решение уравнения $f_{v_\varepsilon}(x, u_\varepsilon, v_\varepsilon) = 0$. В силу условия 8 теоремы это уравнение имеет единственное решение $v_\varepsilon(x)$, причем, учитывая ограниченность нормы u_ε в $W_m^1(\Omega)$ с постоянной, не зависящей от ε, и оценок для $f(x, u, \lambda)$, можно показать, что $\| v_\varepsilon(x) \|_{m, \Omega}^{(1)} < C_5$, где C_5 не зависит от ε. Пользуясь условием 5 из (29), получаем

$$\lim_{\delta\to 0} \varlimsup_{s=s_k\to\infty} \int\limits_{\widehat{B}^{(s)} \bigcup Q^{(s)}} F(x, u_\varepsilon^{(s)}, \nabla u_\varepsilon^{(s)})\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega} f(x, u_\varepsilon, v_\varepsilon)\, r_2(x)\, dx. \tag{30}$$

Из (28), (30) следует требуемое неравенство (26). Учитывая, что при $\varepsilon \to 0$ $u_\varepsilon(x)$ сходится к $u(x)$ в пространстве $W_m^1(\Omega)$ в силу свойств 1 функционала (2) и условия 8, можно показать, что $v_\varepsilon(x)$ сходится в $L_m(\Omega)$ к функции $V(x)$, удовлетворяющей уравнению:

$$c_V(x, u, V) + F_V(x, V, 0) = 0. \tag{31}$$

Таким образом, согласно (20), (22) для любых $w(x) \in W_\Phi(\Omega)$ и $v(x) \in \in W_m^1(\Omega)$ выполняется неравенство $J(u, V) \leqslant J(w, v)$, где $u(x)$ — предел в смысле $L_m(G^{(s)})$ решений $u^{(s)}$ задачи (2), (3) по подпоследовательности $s = s_k \to \infty$, а $V(x)$ определяется уравнением (31). Таким образом, пара функций $\{u(x), V(x)\}$ минимизирует функционал (6), и, значит, $u(x)$ является решением вариационной задачи (6) — (8).

Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Хруслов Е. Я.* Усредненная модель нестационарной диффузии в трещиновато-пористых средах. Х., 1988. 34 с. (Препринт / АН УССР. ФТИНТ) 2. *Панкратов Л. С.* О сходимости решений вариационных задач в слабосвязанных областях. Х., 1988. 25 с. (Препринт / АН УССР. ФТИНТ). 3. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973. 576 с.

*Поступила в редколлегию **10.02.89***