УДК 517.986.7

А. И. МИЛОСЛАВСКИЙ

ОБ АБСТРАКТНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ. II

Данная статья является непосредственным продолжением работы [1]. Ссылки на формулы работы [1] имеют вид (1, n), $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 1. 1) *Решение* $\varphi(\lambda)$ *уравнения* (1.11) *продолжается до мероморфной в* Π *в.-ф., представимой в виде*

$$\varphi(\lambda) = \varphi_1(\lambda) + \varphi_{-1}(\lambda) = S_0(\lambda)\omega(\lambda), \tag{1}$$

где мероморфные в.-ф. $\varphi_{\pm 1}(\lambda)$ *представимы в виде* (1.54), *в.-ф.* $\psi_{\pm 1}(\lambda)$

мероморфны в П, *голоморфны и ограничены при* $\operatorname{Im}\lambda \to \pm\infty$.
2) *Справедливы соотношения*

$$\varphi(\lambda) = Q(\lambda)\,k_{-1}(\lambda)\,\varphi(\lambda - i) + Q(\lambda)\,\psi_1(\lambda); \tag{2}$$

$$\varphi(\lambda) = P(\lambda)\,k_1(\lambda)\,\varphi(\lambda + i) + P(\lambda)\,\psi_{-1}(\lambda). \tag{3}$$

3) *Полосы в.-ф.* $\varphi(\lambda)$ *могут находится лишь в точках* $\sigma_{nk} = \sigma_k + in$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$, *где* $0 \leqslant \operatorname{Im}\sigma_k < 1$, *последовательность* σ_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ *не имеет предельных точек в* П. *Кратность полюсов в точках* σ_{nk} *не превосходит* δ_k, *где* δ_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ — *некоторая последовательность натуральных чисел.*

4) *Вне дисков с центрами в точках* σ_{nk} радиуса r, *где* r *достаточно мало, для* $\varphi(\lambda)$ *справедливы соотношения*

$$\varphi(\lambda) = O(1), \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant \varepsilon > 0, \tag{4}$$

$$F^{-1}\varphi(\lambda) = O(|\lambda^{-1}|), \tag{5}$$

$$F^{-1}\varphi(\lambda) = O(b(\lambda)). \quad |\operatorname{Im}\lambda| \to \infty, \tag{6}$$

5) *Вычеты* $\varphi(\lambda)$ *в полюсах* σ_{nk} *убывают при* $|n| \to \infty$, *как* $\varkappa^{|n|}$, *где* $\varkappa$ — *сколь угодно мало* $(\varkappa > 0)$.
6) *Последовательности* $\{\sigma_{nk}\}$ и $\{\delta_k\}$ *не зависят от* $x_0 \in X$ и $f(t)$.

Доказательство первого утверждения вытекает из установленных в [1] свойств. в.-ф. ψ_{+1} (λ) и формул (1.22), (1.47)—(1.50)
2) Выведем формулу (2), соотношение (3) выводится аналогично. Пользуясь формулами (1.52)—(1.54), (1), имеем ($\operatorname{Re}\lambda > R$):

$$Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)\varphi(\lambda - i) = Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)S_0(\lambda - i)k_1(\lambda - i);$$
$$Q(\lambda)\psi_1(\lambda) + Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)S_0(\lambda - i)\psi_{-1}(\lambda - i). \tag{7}$$

Применяя к первому слагаемому формулу (1.38), а ко второму — (1.40), продолжаем равенство (7):

$$Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)\varphi(\lambda - i) = [S_0(\lambda) - Q(\lambda)]\psi_1(\lambda) + S_0(\lambda)k_1(\lambda);$$
$$P(\lambda - i)\psi_{-1}(\lambda - i) = S_0(\lambda)\psi_1(\lambda) - Q(\lambda)\psi_1(\lambda) \to \tilde{S}_0(\lambda)S_{-1}(\lambda)\psi_{-1}(\lambda - i).$$

Применяя к последнему слагаемому формулу (1.55) ($k_0 = 1$), получаем равенство

$$Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)\varphi(\lambda - i) = S_0(\lambda)\psi_1(\lambda) + S_0(\lambda)\psi_{-1}(\lambda) -$$
$$- S_0(\lambda)\omega(\lambda) - Q(\lambda)\psi_1(\lambda),$$

из которого с учетом (1) вытекает (2).
3) Третье утверждение выводится из формул (2), (3) так же, как аналогичное утверждение об о.-ф. $S_0(\lambda)$ в лемме 3 [1] выводилось из формул (1.38), (1.39). При этом получается ограниченность в-ф. $\varphi(\lambda)$. (4).
4) Для вывода формулы (6) понадобятся соотношения, вытекающие из (1.26), (1.28), (1.31), (1.33):

$$W(\lambda) = k_1(\lambda)\,W_1(\lambda) = k_1(\lambda)\,k_{-1}(\lambda + i) + k_1(\lambda)\,k_1(\lambda)\,k_1(\lambda + i)\,W_2(\lambda);$$
$$Q(\lambda) = I + W(\lambda)\,W_3(\lambda);\ F^{-1}Q(\lambda) = F^{-1} + O(b(\lambda)), \tag{8}$$

где $W_k(\lambda) = Q(1)$ при $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ и оценка ($q = \text{const}$)

$$F^{-1}k_{\pm 1}(\lambda)\,k_{\pm 1}(\lambda + iq) = L^{-1}(\lambda)\,B_{\pm 1}\,L^{-1}(\lambda +$$
$$+ iq)\,B_{\pm 1}\,F^{-1} = O(b(\lambda)), \tag{9}$$

вытекающая из (1.32). Покажем, что

$$F^{-1}\psi_1(\lambda) = F^{-1}\omega(\lambda) + O(b(\lambda)),\ \operatorname{Im}\lambda \to \infty. \tag{10}$$

Записывая для этого $F^{-1}\psi_1(\lambda)$ в виде

$$F^{-1}\psi_1(\lambda) = F^{-1}\omega(\lambda) + F^{-1}k_1(\lambda)Q(\lambda+i)\omega(\lambda+i) + \\ + F^{-1}k_1(\lambda)Q(\lambda+i)k_1(\lambda+i)Q(\lambda+2i)\psi_1(\lambda+2i), \tag{11}$$

оцениваем $F^{-1}k_1(\lambda)Q(\lambda+i)\,k_1(\lambda+i)$:

$$F^{-1}k_1(\lambda)Q(\lambda+i)k_1(\lambda+i) = h^{-1}(\lambda)B_1F^{-1}Q(\lambda+i)k_1(\lambda+i) = \\ = L^{-1}(\lambda)B_1(F^{-1} + F^{-1}W(\lambda+i)\,W_3(\lambda))k_1(\lambda+i) = \\ = L^{-1}(\lambda)B_1L^{-1}(\lambda+i)B_1F^{-1} + L^{-1}(\lambda)B_1L^{-1}(\lambda+i)B_1F^{-1}; \\ W_1(\lambda+i)\,W_3(\lambda+i)\,k_1(\lambda+i) = O(b(\lambda)). \tag{12}$$

При выводе соотношения (12) использованы неравенства (8), (9). Оценивая аналогично (12) второе слагаемое в (11) и учитывая ограниченность о.-ф. $Q(\lambda)$, $\psi_1(\lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$, получаем (10). Интегрируя (2), имеем

$$F^{-1}\varphi(\lambda) = F^{-1}Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)Q(\lambda-i)k_{-1}(\lambda-i)\varphi(\lambda-2i) + \\ + F^{-1}Q(\lambda)k_1(\lambda)Q(\lambda-i)\Psi_1(\lambda-i) + Q(\lambda)\psi_1(\lambda).$$

Применяя к правой части этого равенства оценки (8), (10), (12), получаем (6) при $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$. Аналогично выводится (6) при $\operatorname{Im}\lambda \to -\infty$ и оценка (5).

5) Предположим для простоты, что $\delta_k = 1$. Тогда при больших n в силу (2) справедливы равенства

$$\varphi_{nk} = Q(\sigma_{nk})\,k_{-1}(\sigma_{nk})\,\varphi_{n-k,\,k}, \tag{13}$$

где φ_{nk} — вычет в.-ф. $\varphi(\lambda)$ в точке σ_{nk}. Переходя в (13) к оценкам по норме, получаем для последовательности $\|\varphi_{nk}\|$ $(n \geqslant N)$ мажоранту в виде геометрической прогрессии со знаменателем $\varkappa = \sup\|Q(\lambda)\times\times k_{-1}(\lambda)\|$ $(\operatorname{Im}\lambda > N)$, который в силу (1.12), (1.26), (1.37) может быть сделан сколь угодно малым за счет выбора N. Случаи $n \to -\infty$ и δ_k произвольно рассматриваются аналогично.

6) В случае $f(t) \equiv 0$ утверждение очевидно, поскольку $\varphi(\lambda)$ представимо в виде $\varphi(\lambda) = \Phi(\lambda)\,x_0$, где $\Phi(\lambda)$ — к.м. о.-ф., полосы которой имеют вид, указанный в 3). Для рассмотрения общего случая положим (1.11)

$$\omega(\lambda) = \omega_t(\lambda) = l(\lambda)\,e^{-\lambda t}y\ \ (y \in X,\ t \geqslant 0).$$

Решение $\varphi_t(\lambda)$ уравнение (1.11) представимо в виде (1.22):

$$\varphi_t(\lambda) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} S_r(\lambda)\,\omega_t(\lambda+ir) = e^{-\lambda t}\sum_{r=-\infty}^{\infty} S_r(\lambda)\,e^{-irt}l(\lambda+ir)\,y = \\ = e^{-\lambda t}\Phi(t,\lambda)\,y. \tag{14}$$

Покажем, что полюсы о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$ не зависят от t. Введем о.-ф.

$$\Psi_1(t, \lambda) = l(\lambda) + e^{-it}\tilde{S}_1(\lambda)\, l(\lambda + i) + \\ + e^{-2it}\tilde{S}_1(\lambda)\tilde{S}_1(\lambda + i)\, l(\lambda + 2i) + \ldots, \tag{15}$$

$$\Psi_{-1}(t, \lambda) = l(\lambda) + e^{it}\tilde{S}_{-1}(\lambda)\, l(\lambda - i) + \\ + e^{2it}\tilde{S}_{-1}(\lambda)\tilde{S}_1(\lambda - i)\, l(\lambda - 2i) + \ldots. \tag{16}$$

В силу оценок (1.51) при больших $\pm \operatorname{Im} \lambda$ независимо от t о.-ф. $\Psi_{\pm 1}(t, \lambda)$ голоморфны, ограничены и продолжаются как к. м. о.-ф. в полуплоскость П. О.-ф. $\Phi(t, \lambda)$, также к. м. в П, поскольку представима в виде

$$\Phi(t, \lambda) = S_0(\lambda)\,[\Psi_1(t, \lambda) + \Psi_{-1}(t, \lambda) - l(\lambda)]. \tag{17}$$

Для $\Phi(t, \lambda)$ аналогично (2), (3) выводятся формулы

$$\Phi(t, \lambda) = e^{it}Q(\lambda)\, k_{-1}(\lambda)\, \Phi(t, \lambda - i) + Q(\lambda)\, \Psi_1(t, \lambda); \tag{18}$$

$$\Phi(t, \lambda) = e^{-it}P(\lambda)\, k_1(\lambda)\, \Phi(t, \lambda + i) + P(\lambda)\, \Psi_{-1}(t, \lambda). \tag{19}$$

В любой конечной области $D \subset \Pi$ для о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$ справедливо представление

$$\Phi(t, \lambda) = \sum_{|r| < N-1} e^{-itr}B_r(\lambda) + e^{-itN}B_N(\lambda)\, \Psi_1(t, \lambda + iN) + \\ + e^{itN}B_{-N}(\lambda)\, \Psi_{-1}(t, \lambda - iN), \tag{20}$$

где о.-ф. $B_r(\lambda)$ к. м. в П, а о.-ф. $\Psi_{\pm 1}(t, \lambda \pm iN)$ голоморфны в D; следовательно, полюсы о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$ в области D могут находиться только среди полюсов о.-ф. $B_r(\lambda)$ ($|r| \leqslant N$) и не зависят от t. Из этого факта и из формулы (17), так же как при доказательстве леммы 3 [1], получаем независимость полюсов о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$ от t. Пусть $\lambda = \lambda_0$ — точка голоморфности о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$ при всех t. Эта точка может быть полюсом о.-ф. $B_r(\lambda)$ ($|r| \leqslant N$), где $N = N(\lambda_0)$. Предположим для простоты, что λ_0 — простой полюс. Тогда о.-ф. $B_r(\lambda)$ в окрестности точки λ_0 представимы в виде

$$B_r(\lambda) = B_r(\lambda - \lambda_0)^{-1} + \tilde{B}_r(\lambda), \quad |r| \leqslant N, \tag{21}$$

где о.-ф. $B_r(\lambda)$ голоморфны при $\lambda = \lambda_0$. Подставляя выражения (21) в (20), получаем

$$\sum_{|r| < N-1} e^{-itr}B_r + e^{-itN}B_N\Psi_1(t, \lambda_0 + iN) + e^{itN}B_{-N}\Psi_{-1}(t, \lambda_0 - iN) = 0. \tag{22}$$

Учитывая вид о.-ф. $\Psi_{\pm 1}(t, \lambda)$ (15), (16) в силу равенства (22), имеем $B_r = 0$ ($|r| \leqslant N$). Поскольку N в формуле (20) можно выбирать сколь угодно большим, все о.-ф. $B_r(\lambda)$ ($|r| < \infty$) голоморфны в точке $\lambda = \lambda_0$. В точке голоморфности о-ф. $\Phi(t, \lambda)$ (14) является гладкой 2π-периодической функцией t. Решение уравнения (1.11) с $f(t) \not\equiv 0$, $x_0 = 0$ может быть записано в виде

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi(t, \lambda)\, f(t)\, dt. \tag{23}$$

Из формулы (23) следует, что все точки голоморфности о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$ являюся точками голоморфности в.-ф. $\varphi(\lambda)$. Если $\lambda = \lambda_0$ — полюс в.-ф. $\varphi(\lambda)$, то $\lambda = \lambda_0$ — полюс о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$. Из формулы (20) и формулы типа (21) следует, что кратность полюса в.-ф. $\varphi(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_0$ не превосходит максимальной по t кратности полюса о-.ф. $\Phi(t, \lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$. Теорема доказана.

Замечание. Уточним, что под ограниченностью в-ф. $\psi_{\pm 1}(\lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$ понимается оценка

$$\| \Psi_{\pm 1}(\lambda) \| \leqslant C(\| x_0 \| + \| f \|_0), \tag{24}$$

где $\| f \|_0 = \int\limits_0^\infty \| f(t) \| \, dt$. Это неравенство получается из соответствующей оценки для в.-ф. $\omega(\lambda)$ (1.9). Всюду ниже под ограниченностью в.-ф. понимается неравенство вида (24), а под выражением $\psi(\lambda) = O(b(\lambda))$ — оценка

$$\| \psi(\lambda) \| \leqslant C b(\lambda) (\| x_0 \| + \| f \|_0).$$

Последовательность $\{\sigma_k\}$, *введенную в формулировке теоремы* 1 $(0 \leqslant \operatorname{Im}\sigma_k < 1, \operatorname{Re}\sigma_1 \geqslant \operatorname{Re}\sigma_2 \geqslant \ldots > 0)$, *назовем последовательностью показателей Флоке—Ляпунова для задачи Коши* (1.1), (1.2). *Из ее определения следует, что* $\forall k \exists t \exists n$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ *такие, что число* $\sigma_{nk} = \sigma_k + in$ *является полюсом о.-ф.* $\Phi(t, \lambda)$, *причем максимальная по n и t кратность полюсов о.-ф.* $\Phi(t, \lambda)$ *в точках* σ_{nk} $(k = 1, 2, \ldots, n = 0, \pm 1, \ldots)$ *равна* δ_k.

Лемма 4. *Положим*

$$z(t) = \int L^{-1}(\lambda)(x_0 + \hat{f}(\lambda)) e^{\lambda t} d\lambda. \tag{25}$$

Интегрирование в (25) *ведется по контуру* $\Gamma = \{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda = \varepsilon, \ |\operatorname{Im}\lambda| > N\}$, *не содержащему полюсов о.-ф.* $L^{-1}(\lambda)$. *Справедлива оценка*

$$\| z(t) \| \leqslant C(\varepsilon, N) \exp(\varepsilon t) (\| x_0 \| + \| f \|_0), \ t \geqslant 0. \tag{26}$$

Доказательство. Согласно предположению V [1] о.-ф. $|\lambda|^{-1} T(\lambda)$ (1.15) интегрируема по лучам $\{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda = \varepsilon, \ |\operatorname{Im}\lambda| > R = R(\varepsilon)\}$. Представляя при больших $\operatorname{Im}\lambda$ о.-ф. $L^{-1}(\lambda)$ в виде

$$L^{-1}(\lambda) = (F + \lambda I)^{-1} + (F + \lambda I)^{-1} T(\lambda) (I - T(\lambda))^{-1},$$

пользуясь ограниченностью при больших $\operatorname{Im}\lambda$ о.-ф. $(I - T(\lambda))^{-1}$, оценкой (1.3), заключаем, что для вывода оценки (26) достаточно получить неравенство

$$\left\| \int\limits_\Gamma (F + \lambda I)^{-1} (x_0 + \hat{f}(\lambda)) e^{\lambda t} d\lambda \right\| \leqslant C(\varepsilon) e^{\varepsilon t} (\| x_0 \| + \| f \|_0). \tag{27}$$

В силу предположения I [1] можно подобрать $c > 0$ настолько большим, что для оператора $F_c = F + cI$ выполняется неравенство

$$\| (F_c + \lambda I)^{-1} \| \leqslant C(1 + |\lambda|)^{-1} \tag{28}$$

для всех λ, $|\arg \lambda| \leqslant \pi/2 + \varkappa_1$, где $\varkappa_1 > 0$. Известно (см., например, [2, с. 93]), что оператор $-F_c$, удовлетворяющий (28), порождает аналитическую полугруппу операторов $\exp(-tF_c)$, причем $\|\exp(-tF_c)\| \leqslant M < \infty$ $(t \geqslant 0)$. Решение уравнения $\dot{y} + F_c y = f(t)$, $y(0) = x_0$ дается формулой

$$y(t) = \exp(-tF_c)\, x_0 + \int_0^t \exp(-(t-\tau) F_c) f(\tau)\, d\tau. \tag{29}$$

Так как в.-ф. $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, в.-ф. $y(t)$ (29) [2, с. 169] непрерывно дифференцируема при $t \geqslant 0$. Оценивая $y(t)$ по норме, получаем

$$\|y(t)\| \leqslant \|\exp(-tF_c)\|\,\|x_0\| + \int_0^t \|\exp(-(t-\tau)F_c)\|\,\|f(\tau)\|\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant M(\|x_0\| + \|f\|_0). \tag{30}$$

Пользуясь формулой обращения преобразования Лапласа

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\lambda=\varepsilon} (F_c + \lambda I)^{-1} (x_0 + \hat{f}(\lambda))\, e^{\lambda t} d\lambda,$$

неравенством (30) и соотношением

$$(F + \lambda I)^{-1} = (F_c + \lambda I)^{-1} + c(F + \lambda I)^{-1}(F_c + \lambda I)^{-1} =$$
$$= (F_c + \lambda I)^{-1} + O(|\lambda|^{-2}),$$

имеем $(\lambda = \varepsilon + i\eta)$:

$$\left\| \int\limits_\Gamma (F + \lambda I)^{-1} (x_0 + \hat{f}(\lambda))\, e^{\lambda t} d\lambda \right\| \leqslant \int\limits_\Gamma (F_c + \lambda I)^{-1}(x_0 + \hat{f}(\lambda))\, e^{\lambda t} d\lambda \Big\| +$$
$$+ c \int\limits_{\mathrm{Re}\lambda=\varepsilon} e^{\varepsilon t} |\lambda|^{-2}\, d\eta\, (\|x_0\| + \|f\|_0) \leqslant 2\pi \|y(t)\| +$$
$$+ \int\limits_{\varepsilon - iR}^{\varepsilon + iR} \|(F_c + \lambda I)^{-1}\|\, e^{\varepsilon t} d\eta\, (\|x_0\| + \|f\|_0) + C_1(\varepsilon)(\|x_0\| + \|f\|_0) \leqslant$$
$$\leqslant C_2(\varepsilon)\, e^{\varepsilon t} (\|x_0\| + \|f\|_0).$$

Неравенство (27) доказано, а вместе с ним и лемма 4.

Доказательство теоремы 2 [1]. Пользуясь формулой обращения преобразования Лапласа, представляем $x(t)$ в виде

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{R_0 - i\infty}^{R_0 + i\infty} F^{-1} \varphi(\lambda)\, e^{\lambda t} d\lambda, \tag{31}$$

где $\lambda = R_0 + i\eta$, R_0 — достаточно велико. Согласно теореме 1 в полосе $\{\lambda \mid \varepsilon \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant R_0\}$ полюсы в.-ф. $\varphi(\lambda)$ имеют вид $\sigma_{nk} = \sigma_k + in$ $(k = 1, \ldots N(\varepsilon),\ n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots)$, причем

$$R_0 > \mathrm{Re}\,\sigma_1 \geqslant \mathrm{Re}\,\sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \mathrm{Re}\,\sigma_N > \varepsilon > 0.$$

(Если на прямой $\mathrm{Re}\lambda = \varepsilon$ находятся полюсы в.-ф. $\varphi(\lambda)$, то ε следует несколько уменьшить). По теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\pi(\varepsilon,\, R_{0,1})} F^{-1}\varphi(\lambda)\, e^{\lambda t} d\lambda = \sum_{\sigma_{nk} \in \pi(\varepsilon,\, R_{0,1})} \operatorname{res} F^{-1}(\lambda)\, e^{\lambda t}. \tag{32}$$

Интегрирование в формуле (32) ведется по границе $\pi(\varepsilon, R_{0,1})$ прямоугольника $\{\lambda \mid \varepsilon \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant R_0, \ |\mathrm{Im}\lambda| \leqslant R_1\}$. Числа ε и $R_{0,1}$ удовлетворяют требованию: граница прямоугольника не пересекается с полюсами в.-ф. $\varphi(\lambda)$. В силу оценки (5) интеграл по горизонтальным сторонам $\pi(\varepsilon, R_{0,1})$ стремится к нулю при $R_1 \to \infty$. Положим

$$x_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\lambda = \varepsilon} F^{-1}\varphi(\lambda)\, e^{\lambda t} d\lambda. \tag{33}$$

Каждой паре $(n, k)\,(k = 1, \ldots N(\varepsilon),\ n = 0, \mp 1, \ldots)$ сопоставим главную часть в.-ф. $\varphi(\lambda)$ в полюсе σ_{nk}:

$$\varphi(\lambda) \sim \sum_{j=1}^{\delta_k} \frac{\varphi_n^{k,\,j}}{(\lambda - \sigma_k - in)^j}. \tag{34}$$

Согласно утверждению 5) теоремы 1 и замечанию, следующему за теоремой 1, для лорановских коэффициентов φ_n^{kj} справедлива оценка

$$\| \varphi_n^{k,\,j} \| \leqslant C(k,\ j)\, \varkappa^{|n|} (\| x_0 \| + \| f \|_0) \tag{35}$$

с произвольно малым $\varkappa > 0$ и некоторыми положительными постоянными $C(k, j) = C(k, j, \varkappa)$. Переходя к пределу в формуле (32) при $R_1 \to \infty$, с учетом (33)—(35) получаем соотношение (1.5), где

$$A_{k,\,j}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F^{-1}\varphi_n^{k,\,j} e^{int}.$$

В силу оценки (35) $A_{k,j}(t)$ — целые 2π-периодические в.-ф., допускающие первую из оценок (1.6). Доказательство теоремы свелось к выводу второй из оценок (1.6), которая непосредственно следует из формулы (6) и леммы 4. Последнее утвержение теоремы 2 вытекает из теоремы 1, 6). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 [1]. Покажем, что если $\sigma + in \notin \sum \cup \sum_0$ $(n = 0, \pm 1, \mp 2, \ldots)$, то уравнение

$$S(\sigma)\, g = f \tag{36}$$

$\forall f \in L_2(X)$ имеет решение $g \in D(S)$, причем

$$\| g \|_2 \leqslant C(\sigma)\, \| f \|_2. \tag{37}$$

Разлагая $f \in L_2(X)$ в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_k e^{ikt} \quad \left(\| f \|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \| f_k \|^2\right), \tag{38}$$

разыщем решение уравнения (36) в виде ряда Фурье

$$g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_k e^{ikt}. \tag{39}$$

Подставляя выражения (38), (39) в уравнение (36), имеем

$$\begin{gathered}(\lambda_k I + F - \hat{G}(\lambda_k))\, g_k = f_k + B_1 g_{k+1} + B_{-1} g_{k-1}, \\ \lambda_k = \sigma + ik, \ k = 0, \ \pm 1, \ \ldots .\end{gathered} \tag{40}$$

Полагая

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} f(t)\, e^{\sigma t}, & 0 < t < 2\pi \\ 0 & t > 2\pi, \end{cases}$$

находим

$$\begin{gathered}\hat{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \tilde{f}(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-t(\lambda - \sigma)} dt; \\ f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt} dt = \hat{f}(\lambda_k), \ k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots .\end{gathered} \tag{41}$$

Рассмотрим уравнение

$$(\lambda I + F - \hat{G}(\lambda))\, \tilde{g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda) + B_1 \tilde{g}(\lambda + i) + B_{-1} \tilde{g}(\lambda - i). \tag{42}$$

Если существует решение $\tilde{g}(\lambda)$ уравнения (42), определенное в точках λ_k $(k = 0, \ \pm 1, \ \ldots)$, то последовательность $g_k = \tilde{g}(\lambda_k)$ $(k = 0, \ \pm 1, \ \ldots)$ определяет решение системы (40). Обращая оператор $L(\lambda)$ в левой части (42), действуя на обе части (42) оператором F, полагая $\varphi(\lambda) = F\tilde{g}(\lambda)$, получаем частный случай уравнения (1.11) $(x_0 = 0)$. Согласно теореме 1 существует единственное решение $\varphi(\lambda)$ уравнения (1.11), мероморфное в Π. По предположению $\varphi(\lambda)$ и $l(\lambda)$ голоморфны в точках λ_k $(k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots)$. Обращая оператор $l(\lambda)$, получаем решение $\tilde{g}(\lambda) = F^{-1}\varphi(\lambda)$ уравнения (42). Покажем, что $g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F^{-1}(\lambda_k)\, e^{ikt} \in D(S)$, и выведем оценку (37).

Из голоморфности о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$ в точках λ_k $(k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots)$, как при доказательстве теоремы 2, получаем голоморфность о.-ф. $B_r(\lambda)$ $(|r| < \infty)$. При достаточно большом натуральном $N_0 = N_0(k)$ в силу (1.51) справедливы неравенства

$$\| \tilde{S}_{\pm 1}(\lambda_k \pm iN) \| \leqslant \varkappa < 1 \ (N \geqslant N_0).$$

Учитывая оценку

$$\| l(\lambda_k) \| \leqslant M < \infty \ (k = 0, \ \pm 1, \ \ldots),$$

получаем неравенство

$$\begin{gathered}\| \psi_1(\lambda_{k+N}) \| \leqslant M \| f_{k+N} \| + M\varkappa \| f_{k+N+1} \| + M\varkappa^2 \| f_{k+N+2} \| + \\ + \ \ldots \leqslant M \Big(\sum_{r=0}^{\infty} \varkappa^{2r} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{j=k+N}^{\infty} \| f_j \|^2 \Big)^{1/2} \leqslant M_1 \| f \|_2\end{gathered} \tag{43}$$

и аналогичное ему неравенство

$$\| \psi_{-1} (\lambda_{k-N}) \| \leqslant M_1 \| f \|_2. \tag{44}$$

Представляя $\varphi(\lambda_k)$ в виде

$$\varphi(\lambda_k) = \sum_{|r| < N-1} B_r(\lambda_k) \hat{f}(\lambda_{k+r}) + B_N(\lambda_k) \psi_1(\lambda_{k+N}) + B_{-N}(\lambda_k) \psi_{-1}(\lambda_{k-N}),$$

где $N = N_0 = N_0(k)$, пользуясь неравенствами (43), (44) и голоморфностью о.-ф. $B_r(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_k$ ($|r| < \infty$), получаем оценку

$$\| F g_k \| = \| \varphi(\lambda_k) \| \leqslant M(k) \| f \|_2. \tag{45}$$

Полагая $\lambda = \lambda_k$ ($k = N, N+1, \ldots$) в соотношении (2), переписываем равенства

$$\varphi(\lambda_k) = Q(\lambda_k) k_{-1}(\lambda_k) \varphi(\lambda_{k-1}) + Q(\lambda_k) \psi_1(\lambda_k)$$

в виде одного уравнения

$$\psi = Q(KV\varphi + \psi_0 + Sf) \tag{46}$$

в пространстве $l_2(X)$, где

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_N \\ \varphi_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \varphi_0 = \begin{pmatrix} \varphi_{N-1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_N \\ f_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

оператор S имеет вид

$$S = I + S_1 U + (S_1 U)^2 + \ldots,$$

операторы U, V действуют по правилам

$$Uz = \begin{pmatrix} z_{N+1} \\ z_{N+2} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad Vz = \begin{pmatrix} 0 \\ z_N \\ z_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad z \in l_2(X), \quad z = \begin{pmatrix} r_N \\ z_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

операторы Q, K, S_1 — диагональные:

$$Q = \operatorname{diag}\{Q(\lambda_N),\ Q(\lambda_{N+1}),\ \ldots\};$$
$$K = \operatorname{diag}\{k_{-1}(\lambda_N),\ k_{-1}(\lambda_{N+1}),\ \ldots\};$$
$$S_1 = \operatorname{diag}\{\tilde{S}_1(\lambda_N),\ \tilde{S}_1(\lambda_{N+1}),\ \ldots\}.$$

Переходя к оценкам по норме в (46) с учетом равенств $\| U \| = \| V \| = 1$, имеем

$$\| \varphi \|_2 \leqslant \| Q \| (\| K \| \| \varphi \|_2 + \| \varphi_0 \|_2 + (1 - \| S_1 \|)^{-1} \| f_2 \|).$$

Натуральное N выбирается так, что $\| K \| = \sup \| k(\lambda_k) \| \leqslant \varkappa < 1$, $\| S_1 \| = \sup \| \tilde{S}_1(\lambda_k) \| \leqslant \varkappa < 1$, к $\geqslant N$. Из неравенства (45), (47) получаем

$$\Big(\sum_{k \geqslant N} \| F g_k \|^2\Big)^{1/2} = \| \varphi \|_2 \leqslant M(N) [\| f \|_2 + \| F g_{N-1} \|] \leqslant M'(N) \| f \|_2.$$

Аналогично выводится неравенство

$$\Big(\sum_{k<-N} \| Fg_k \|^2\Big)^{1/2} \leqslant M''(N) \| f \|_2.$$

Последние два неравенства вместе с (45) приводят к оценке

$$\| Fg \|_2 \leqslant C(\sigma) \| f \|_2,$$

означающей, что $Fg \in L_2(X)$, и влекущей неравенство (37). Близкими рассуждениями выводится соотношение $\dot{g} \in L_2(X)$.

Пусть σ_{nk} является полюсом о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$ при некотором t и некотором целом $n = n_0$ Предположим для простоты, что $\delta_k = 1$. Положим $\omega_t(\lambda) = \exp(-\lambda t)\, l(\lambda)\, y$. В силу теоремы 1 вычеты φ_n в полюсах σ_{nk} $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ убывают при $|n| \to \infty$ как геометрическая прогрессия, поэтому в.-ф. $\varphi_t(\lambda)$ можно представить в виде

$$\varphi_t(\lambda) = e^{-\lambda t}\Phi(t, \lambda)\, y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_n}{\lambda - \sigma_{nk}} + \psi_k(\lambda),$$

где в.-ф. $\psi_t(\lambda)$ голоморфна в точках σ_{nk} $(n = 0, \pm 1, \ldots)$, при этом

$$\varphi_n = \lim_{\lambda \to \sigma_{nk}} (\lambda - \sigma_{nk})\, \varphi_t(\lambda).$$

Умножая уравнение

$$\varphi_t(\lambda) = \omega_t(\lambda) + k_1(\lambda)\, \varphi_t(\lambda + i) + k_{-1}(\lambda)\, \varphi_t(\lambda - i)$$

на $\lambda - \sigma_{nk}$ и устремляя $\lambda \to \sigma_{nk}$, после обращения оператора $l(\sigma_{nk})$ получаем соотношения $(n = 0, \pm 1, \ldots)$:

$$(\sigma_{nk} I + F - \hat{G}(\sigma_{nk}))\, g_n = B_1 g_{n+1} + B_{-1} g_{n-1},$$

где $g_n = F^{-1}\varphi_n$. Вектор $y \in X$ выбирается так, что $g_{n_0} = F^{-1}\varphi_{n_0} \neq 0$, поэтому $g(t) = \sum g_k e^{ikt} (\not\equiv 0)$ является решением уравнения $S(\sigma_{n_0 k}) \times \times g(t) = 0$. Делая замену $g(t) \mapsto g(t)\exp(-iNt)$, $\sigma_{n_0 k} \mapsto \sigma_{n_0 + N,\, k}$ (N — целое), убеждаемся, что вся последовательность σ_{nk} $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ принадлежит спектру оператора $S(\sigma)$.

Обратно, если $g(t)$ является решением уравнения $S(\sigma)g = 0$, то $x(t) = g(t)\exp(\sigma t)$ — решение уравнения (1.1) с

$$f(t) = \int_{-\infty}^{0} G(t - \tau)\, e^{\sigma\tau} g(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{\infty} G(t + S)\, x(-S)\, dS \in L_1[0, \infty).$$

Преобразование Лапласа в.-ф. $x(t)$ имеет вид $\hat{x}(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n}{\lambda - \sigma - in}$.

Поскольку $g(t) \not\equiv 0$, хотя бы одна из точек $\{\sigma + in\}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ является полюсом в.-ф. $\varphi(\lambda)$. В силу теоремы 1 имеем $\sigma + in_0 \in \sum$. Аналогично рассматривается случай кратных полюсов. Теорема 3 доказана.

Замечание. В работе рассматривался частный случай. Предполагалось, что $l=1$, $B_0=0$, $a=c=0$. Отметим дополнения, которые нужно внести в доказательства в общем случае.

Если $l>1$, $B_0\neq 0$, $c\neq 0$, то вместо уравнения (1.11) получим уравнение

$$\varphi(\lambda)=\omega(\lambda)+\sum_{|q|<l,\ q\neq 0} k_q(\lambda)\,\varphi(\lambda+iq), \tag{48}$$

где

$$\omega(\lambda)=l(\lambda)(x_0+\hat{f}(\lambda)),\ \ l(\lambda)=F_c(\lambda I+F-B_0-\hat{G}(\lambda))^{-1},$$
$$k_q(\lambda)=l(\lambda)\,B_qF_c^{-1}\ \ (0<|q|\leqslant l). \tag{49}$$

Для о.-ф. $l(\lambda)$, $k_g(\lambda)$ (49) и в.-ф. $\omega(\lambda)$ справедливы все утверждения леммы 1 [1]. Введем пространство X^{2l-1}, равное прямой сумме $2l-1$ экземпляров пространства X, и перепишем уравнение (48) в виде

$$\Phi(\lambda)=\Omega(\lambda)+K_1(\lambda)\,\Phi(\lambda+i)+K_{-1}(\lambda)\,\Phi(\lambda-i),$$

где $\Omega(\lambda),\ \Phi(\lambda)\in X^{2l-1}$,

$$\Phi(\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda+il-i)\\ \vdots\\ \varphi(\lambda+i)\\ \varphi(\lambda)\\ \varphi(\lambda-i)\\ \vdots\\ \varphi(\lambda-il+i)\end{pmatrix},\quad \Omega(\lambda)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \omega(\lambda)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

Операторные матрицы $K_{\pm 1}(\lambda)$ действуют в пространстве X^{2l-1} и имеют вид

$$K_1(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & I & 0\dots 0 & \\ 0 & 0 & I & \\ & & \ddots & 0\\ \vdots & & I & \\ k_l & k_{l-1} & \dots k_1 & 0\dots 0\\ & 0 & & 0\end{pmatrix},\ K_{-1}(\lambda)=\begin{pmatrix} & 0 & & 0 & \\ 0\dots 0 & k_{-1} & k_{-2} & \dots & k_{-l}\\ & I & 0 & \dots & 0\\ 0 & \vdots & \ddots & & \vdots\\ & & & & 0\\ & 0 & & I & 0\end{pmatrix}.$$

Для матриц $K_{\pm 1}(\lambda)$ справедливы следующие формулы:

$$K_1(\lambda_1)K_{-1}(\lambda_{-1})=o(1),\ K_{-1}(\lambda_{-1})K_1(\lambda_1)=o(1);$$
$$K_{\pm 1}(\lambda_{\pm 1}(\lambda_{\pm 2})\ \dots\ K_{\pm 1}(\lambda_{\pm l})=o(1), \tag{50}$$
$$F^{-1}K_{\pm 1}(\lambda_{\pm 1})K_{\pm 1}(\lambda_{\pm 2})\ \dots\ K_{\pm 1}(\lambda_{\pm l})=O(|\lambda|^{-1}),$$

где $\lambda_{\pm k}=\lambda\pm iq_k$ (q_k — целые фиксированные числа), $|\mathrm{Im}\lambda|\to\infty$. Соотношения (50) заменяют формулы (1.12), (1.13), имеется соответствующий аналог формулы (9) [3]. Доказательства теорем 1—3 существенно не изменяются.

Случай $a>0$ сводится к случаю $a=0$ заменой

$$x(t)\mapsto x(t)\exp(at),\ F\to F-aI,\ G(t)\mapsto G(t)\exp(at),$$
$$f(t)\mapsto f(t)\exp(at).$$

Список литературы: 1. *Милославский А. И.* Об абстрактном интегро-дифференциальном уравнении с периодическим коэффициентом. I. // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1990. Вып. 53. С. 100—108. 2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967. 464 с. 3. *Милославский А. И.* Аналог представления Флоке для решений абстрактного интегро-дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами / К., 1987. С. 1—52. Деп. в УкрНИИНТИ 13.04.87. № 1227 — Ук 87·

Поступила в редколлегию 05.09.88