УДК 517.432

С. А. КУЖЕЛЬ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВОЯКО J-НЕРАСТЯГИВАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

В статье устанавливается связь между устойчивостью ограниченного двояко J-нерастягивающего (д. J-н.) оператора и устойчивостью его канонической $\tilde{J}$-унитарной дилатации, что, с учетом известной теоремы Р. Филлипса об устойчивости J-унитарных операторов (см. [1—3]) дает возможность решать соответствующие вопросы и в случае д. J-н. операторов.

1. **Терминология.** В дальнейшем будем придерживаться общепринятой терминологии, относящейся к пространствам с индефинитной метрикой (J-метрика, J-унитарность, J-ортогональность и т. п. — см. [3—5]). При этом, как обычно, оператор J является самосопряженным и унитарным.

Гильбертово пространство X с индефинитной метрикой, порождаемой оператором J, будем называть J-пространством, или пространством $\langle X, J\rangle$.

В пространстве $\langle X, J\rangle$ рассмотрим ортопроекторы

$$P = \frac{1}{2}(I + J), \quad Q = \frac{1}{2}(I - J),$$

а также соответствующее разложение пространства X:

$$X = X_+[+]X_- \;\; (X_+ = PX, \;\; X_- = QX), \tag{1}$$

где $[+]$ — знак ортогональной суммы в $\langle X, J\rangle$.

Пусть M_- — максимальный равномерно отрицательный линеал. Тогда его угловой оператор $K_- = P(Q|_{M_-})^{-1}$ является строгим сжатием ($\|K_-\| < 1$), отображающим X_- в X_+. При этом (см [3])

$$M_- = \{x \mid x = x_- + K_- x_-, \;\; x_- \in X_-\}. \tag{2}$$

Аналогично угловой оператор $K_+ = Q(P|_{M_+})^{-1}$ максимального равномерно положительного линеала $M_+ = M_-^{[\perp]}$ является строгим сжатием, отображающим X_+ в X_-, причем $K_+ = K_-^*$.

Самосопряженный в X оператор

$$K = K_+P + K_-Q \tag{3}$$

будем называть оператором поворота от разложения (1) к разложению $X = M_+ [+] M_-$. С учетом свойств угловых операторов находим, что $\| K \| = \| K_+ \| = \| K_- \|$ и, таким образом, K есть строгое сжатие в X.

Использование оператора поворота дает возможность более компактно записать известное (см. [3, 6]) матричное представление произвольного J-унитарного оператора U, действующего в пространстве $\langle X, J \rangle$:

$$U = (I - K)^{-\frac{1}{2}} (I + K)^{\frac{1}{2}} W, \tag{4}$$

где K — оператор поворота от разложения (1) к разложению $X = UX_+[+]UX_-$, а W — некоторый унитарный оператор.

2. **Канонические $\tilde{J}$-унитарные дилатации.** Наряду с пространством $\langle X, J \rangle$ рассмотрим пространство $\langle \tilde{X}, \tilde{J} \rangle$, где

$$\tilde{X} = X \oplus X', \; \tilde{J} = J \oplus I', \tag{5}$$

а X' и I' — некоторое гильбертово пространство и единичный оператор, действующий в этом пространстве. Ортопроекторы $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ в $\tilde{X}$ определяются равенствами

$$\tilde{P} = P \oplus I', \; \tilde{Q} = Q \oplus O', \tag{6}$$

где O' — нулевой оператор в X'.

Следуя [7], оператор $\tilde{A} \in \mathscr{B}[\tilde{X}]$ будем называть дилатацией оператора $A \in \mathscr{B}[X]$, если

$$A^n = P_X \tilde{A}^n \qquad (n \in N), \tag{7}$$

где P_X — ортопроектор в $\tilde{X}$ на X.

$\tilde{J}$-унитарный оператор U, действующий в пространстве $\tilde{X}$ и являющийся дилатацией оператора A, будем называть канонической дилатацией оператора A.

Как известно [3], преобразование Потапова—Гинзбурга (в дальнейшем ПГ-преобразование) $F(A) = (PA + Q)(QA + P)^{-1}$ является биективным отображением множества ограниченных д. J-н. операторов* на множество сжатий в X и таких, что оператор $QT + P$, где $T = F(A)$, вполне обратим.

Рассматривая ПГ — преобразование в пространствах $\langle X, J \rangle$ и $\langle \tilde{X}, \tilde{J} \rangle$, нетрудно установить связь между канонической дилатацией д. J-н. оператора A и унитарной дилатацией сжатия $T = F(A)$.

Лемма 1. *Пусть A ограниченный д. J-н. оператор, действующий в пространстве $\langle X, J \rangle$; $T = F(A)$ — его ПГ-преобразование; $W = \begin{pmatrix} T & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$ — унитарная дилатация сжатия T, действую-*

---

*То есть операторов A, удовлетворяющих условиям $J - A^*JA \geqslant 0$, $J - AJA^* \geqslant 0$

щая в некотором пространстве $\tilde{X} = X \oplus X'$. *Тогда существует каноническая дилатация* U *оператора* A, *действующая в пространстве* $\langle \tilde{X}, \tilde{J} \rangle$ *и представимая относительно разложения* (5) *в виде*

$$U = \begin{pmatrix} A & -(AQ - P) W_{12} \\ W_{21}(QA + P) & W_{22} - W_{21} QAQ W_{12} \end{pmatrix}.$$

Верно и обратное — из существования в некотором пространстве $\langle \tilde{X}, \tilde{J} \rangle$ канонической дилатации $U = \begin{pmatrix} A & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$ д. J-н. оператора $A \in \mathscr{B}[X]$ следует существование в $\tilde{X}$ унитарной дилатации W сжатия $T = F(A)$, которая представима в виде

$$W = \begin{pmatrix} T & -(TQ - P) U_{12} \\ U_{21}(QT + P) & U_{22} - U_{21} QTQ U_{12} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, изучение канонической дилатации ограниченного д. J-н. оператора A сводится к изучению унитарной дилатации сжатия $T = F(A)$. Это дает возможность получить следующее утверждение, обобщающее известную теорему Б. Секефальви — Надя.

Теорема 1. *Для произвольного ограниченного д. J-н. оператора A, который действует в пространстве $\langle X, J \rangle$, существует в некотором пространстве $\langle \tilde{X}, \tilde{J} \rangle$ каноническая дилатация U, минимальная в том смысле, что* $\tilde{X} = \bigvee_{-\infty}^{\infty} U^n X$. *Такая минимальная $\tilde{J}$-унитарная дилатация оператора A определяется однозначно с точностью до изоморфизма.*

Отметим, что существование $\tilde{J}$-унитарной дилатации рассматриваемого вида было другими методами обоснованo Т. Я. Азизовым (см. [3]).

Предыдущие рассуждения дают возможность построить конкретную реализацию канонической дилатации д. J-н. оператора.

Пусть A — д. J-н. оператор и $T = F(A)$ — его ПГ-преобразование. Рассмотрим, как и в [8], дефектные операторы сжатия T: $D_T = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$, $D_{T^*} = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$, а также соответствующие дефектные подпространства $\mathscr{D}_T = \overline{D_T X}$, $\mathscr{D}_{T^*} = \overline{D_{T^*} X}$. Образуем гильбертово пространство $\tilde{X}$ из векторов

$$h = (\ldots, h_{-2}, h_{-1}, \boxed{h_0}, h_1, h_2, \ldots), \tag{8}$$

где $h_0 \in X$, $h_{-n} \in \mathscr{D}_{T^*}$, $h_n \in \mathscr{D}_T$ $(n \in \boldsymbol{N})$ и

$$\| h \|_{\tilde{X}}^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \| h_i \|^2 < \infty. \tag{9}$$

Вложим X в $\tilde{X}$, отождествив вектор h_0 из X с вектором $h = (\ldots, 0, 0, \boxed{h_0}, 0, 0, \ldots)$.

Определим на $\tilde{X}$ оператор $\tilde{J}$ в соответствии с (5) равенством

$$\tilde{J} h = (\ldots, h_{-2}, h_{-1}, \underline{|Jh_0|}, h_1, h_2, \ldots), \tag{10}$$

и зададим в $\tilde{X}$ индефинитную метрику

$$[h, g]_{\tilde{X}} = (\tilde{J}h, g)_{\tilde{X}} = (Jh_0, g_0) + \sum_{i \neq 0} (h_i, g_i), \tag{11}$$

где $g = (\ldots, g_{-2}, g_{-1}, \underline{|g_0|}, g_1, g_2, \ldots) \in \tilde{X}$. В результате получим пространство $\langle \tilde{X}, \tilde{J} \rangle$.

Как известно [7, 8], оператор W, определенный в $\tilde{X}$ равенством

$$Wh = (\ldots, h_{-3}, h_{-2}, \underline{|Th_0 + D_{T^*}h_{-1}|}, D_T h_0 - T^* h_{-1}, h_1, \ldots),$$

является минимальной унитарной дилатацией сжатия T. Воспользовавшись теперь леммой 1 убеждаемся, что оператор U, определяемый в $\tilde{X}$ равенством

$$Uh = (\ldots, h_{-3}, h_{-2}, \underline{|Ah_0 - Mh_{-1}|}, Nh_0 - Fh_{-1}, h_1, h_2, \ldots), \tag{12}$$

где $M = (AQ - P) D_{T^*}$, $N = D_T (QA + P)$, $F = T^* + D_T QAQD_{T^*}$, является минимальной канонической дилатацией оператора A.

Отметим, что операторы M и N удовлетворяют соотношениям

$$I - A^+ A = JN^* N, \; I - AA^+ = MM^* J \tag{13}$$

и, таким образом, их можно рассматривать как некоторые аналоги дефектных операторов д. $\tilde{J}$-н. оператора A.

3. **Устойчивость д. $\tilde{J}$-н. операторов.** Оператор B, действующий в банаховом пространстве X, будем называть устойчивым вправо (или кратко: устойчивым), если существует такое число $c > 0$, что

$$\| B^n \| \leqslant c \qquad (\forall n \in \mathbf{N}).$$

Теорема 2. *Ограниченный д. J-н. оператор A устойчив тогда и только тогда, когда устойчива его каноническая дилатация.*

□ Пусть U — каноническая дилатация в $\tilde{X}$ д. J-н. оператора A. Как следует из (7) (с заменой $\tilde{A}$ на U), устойчивость оператора U влечет за собой устойчивость оператора A.

Предполагая теперь оператор A устойчивым, докажем устойчивость его канонической дилатации. Для этого, прежде всего, отметим, что относительно разложения $\tilde{X} = \tilde{X}_1 \oplus \tilde{X}_1^{\perp}$, где

$$\tilde{X}_1 = \bigvee_{-\infty}^{\infty} U^n X \supset X, \tag{14}$$

оператор U представим в виде

$$U = U_{\min} \oplus U', \tag{15}$$

где $U_{\min}$ — минимальная каноническая дилатация оператора A, а оператор U' с учетом (5) и (14) является унитарным в $\tilde{X}_1^{\perp} \subset X'$ (если $\tilde{X}_1 \neq \tilde{X}$).

Таким образом, для доказательства устойчивости канонической дилатации с учетом разложения (15) и теоремы 1 достаточно обосновать устойчивость минимальной канонической дилатации U, определяемой равенством (12), в пространстве $\langle \tilde{X}, \tilde{J} \rangle$, которое описывается соотношениями (8)—(11).

Для произвольного натурального n оператор $U^n \tilde{J}$ — унитарен в $\tilde{X}$ и согласно представлению (4)

$$U^n = (I - K_n)^{-\frac{1}{2}} (I + K_n)^{\frac{1}{2}} W_n, \tag{16}$$

где W_n — унитарный в $\tilde{X}$ оператор, а K_n — оператор поворота от разложения

$$\tilde{X} = \tilde{X}_+ [+] \tilde{X}_- \quad (\tilde{X}_+ = \tilde{P}\tilde{X},\ \tilde{X}_- = \tilde{Q}\tilde{X}),$$

к разложению $\tilde{X} = U^n \tilde{X}_+ [+] U^n \tilde{X}_-$.

В соответствии с определением оператора поворота $K_n = K_n^+ \tilde{P} + K_n^- \tilde{Q}$, где K_n^+ и K_n^- — угловые операторы максимальных равномерно дефинитных линеалов $U^n \tilde{X}_+$ и $U^n \tilde{X}_-$ соответственно. При этом на основании (2)

$$U^n \tilde{X}_- = U^n \tilde{Q} \tilde{X} = \{y \mid y = (I + K_n^-) \tilde{Q} U^n \tilde{Q} h,\ h \in \tilde{X}\}$$

где

$$K_n^- \tilde{Q} U^n \tilde{Q} h = \tilde{P} U^n \tilde{Q} h. \tag{17}$$

По индукции с учетом (6), (8), (10), и (12) находим, что

$$\tilde{Q} U^n \tilde{Q} h = (\ldots, 0, 0, \boxed{QA^n Qh_0}, 0, 0, \ldots); \tag{18}$$

$$\tilde{P} U^n \tilde{Q} h = (\ldots, 0, 0, \boxed{PA^n Qh_0}, NA^{n-1} Qh_0, \ldots, NQh_0, 0 \ldots). \tag{19}$$

После этого на основании (17) с учетом (13), (18) и (19)

$$\| K_n^- \tilde{Q} U^n \tilde{Q} h \|_{\tilde{X}}^2 = \| PA^n Qh_0 \|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \| NA^k Qh_0 \|^2 =$$

$$= \| PA^n Qh_0 \|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} ([A^k Qh_0, A^k Qh_0] - [A^{k+1} Qh_0, A^{k+1} Qh_0]) =$$

$$= \| PA^n Qh_0 \|^2 + a, \tag{20}$$

где

$$a = [Qh_0, Qh_0] - [A^n Qh_0, A^n Qh_0] = - \| Qh_0 \|^2 - ((P - Q) A^n Qh_0, A^n Qh_0) = - \| Qh_0 \|^2 - \| PA^n Qh_0 \|^2 + \| QA^n Qh_0 \|^2. \tag{21}$$

Подставляя в (20) вместо a его значение из (21), получаем

$$\| K_n^- \tilde{Q} U^n \tilde{Q} h \|_{\tilde{X}}^2 = \| QA^n Qh_0 \|^2 - \| Qh_0 \|^2 \leqslant \| K_n^- \|^2 \| \tilde{Q} U^n \tilde{Q} h \|_{\tilde{X}}^2. \tag{22}$$

Или с учетом (18) и равенства $\| K_n^- \| = \| K_n \|$:

$$\| QA^n \varphi \|^2 - \| \varphi \|^2 \leqslant \| K_n \|^2 \| QA^n \varphi \|^2, \tag{23}$$

где $\varphi = Qh_0$. При этом, так как h_0 — произвольний элемент из X, то φ — произвольный элемент из X_-.

Пусть $B_n = QA^n|_{X_-}$. Тогда на основании (23)

$$\| B_n\varphi \|^2 \leqslant \frac{1}{1 - \| K_n \|^2} \| \varphi \|^2$$

и, таким образом,

$$\| B_n \|^2 \leqslant \frac{1}{1 - \| K_n \|^2}. \tag{24}$$

Покажем, что в действительности в (24) имеет место знак равенства. Для этого прежде всего заметим, что на основании (22) $\| B_n \| \geqslant 1$. Пусть

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\| B_n \|^2} \quad (0 \leqslant \alpha < 1). \tag{25}$$

Тогда в силу (24) и (25) $\frac{1}{1-\alpha} \leqslant \frac{1}{1 - \| K_n \|^2}$, т. е. $\alpha \leqslant \| K_n \|^2$. При этом $\| B_n\varphi \|^2 \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \| \varphi \|^2$, откуда

$$\| B_n\varphi \|^2 - \| \varphi \|^2 \leqslant \alpha \| B_n\varphi \|^2. \tag{26}$$

Следовательно, на основании (22), (26) и (18)

$$\| K_n^- \psi \|_{\tilde{X}}^2 \leqslant \alpha \| \psi \|_{\tilde{X}}^2 \quad (\psi = \tilde{Q}U^n\tilde{Q}h). \tag{27}$$

В силу теоремы 3.1 из [9] оператор $\tilde{Q}U^n\tilde{Q}$ вполне обратим в $\tilde{X}_-$. Следовательно, на основании (27) $\| K_n^- \|^2 = \| K_n \|^2 \leqslant \alpha$, что с учетом противоположного неравенства доказывает равенство

$$\| B_n \|^2 = \frac{1}{1 - \| K_n \|^2}.$$

При этом, так как $\| B_n \| \leqslant \| QA^n \| \leqslant c$, то

$$\frac{1}{1 - \| K_n \|^2} \leqslant c^2$$

и, таким образом,

$$\alpha = \| K_n \|^2 \leqslant 1 - \frac{1}{c^2} \quad (\forall n \in N). \tag{28}$$

В силу (16)

$$\| U^n \| \leqslant \| (I - K_n)^{-\frac{1}{2}} (I + K_n)^{\frac{1}{2}} \|. \tag{29}$$

Пусть $\{E_\lambda\}$ — разложение единицы оператора K_n. Тогда

$$\| (I - K_n)^{-\frac{1}{2}} (I + K_n)^{\frac{1}{2}} \| = \left\| \int_{-\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\, dE_\lambda \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|\lambda| \leqslant \sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \leqslant 2c,$$

откуда с учетом (29) следует устойчивость оператора U.

Список литературы: 1. *Phillips R. S.* The extension on dual subspaces invariant under an algebre // Proc. Interuat. Sumuos. Linear Spaces, Jerusalem, 1960. 1961. P. 366—398. 2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970. 534 с. 3. *Азизов Т.Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М., 1986. 352 с. 4. *Кужель С. А.* *J*-нерастягивающие операторы // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1986. Вып. 45. С. 63—68. 5. *Bognar J.* Indefinite inner product spaces. Berlin. 1974. P. 226. 6. *Крейн М. Г., Шмульян Ю. Л.* О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами // Мат. исследования. 1967. 2, вып. 3. С. 64—96. 7. *Секефальви-Надь, Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., 1970. 431 с. 8. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., 1979. 587 с. 9. *Крейн М. Г., Шмульян Ю. Л.* О плюс-операторах в пространстве с индефинитной метрикой // Мат. исследования. 1966. 1, вып. 1. С. 131—161.

Поступила в редколлегию 03.01.89