УДК 513.33

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

МАКСИМАЛЬНЫЕ И γ-ДОСТАТОЧНЫЕ МНОЖЕСТВА. ПРИЛОЖЕНИЯ К ЦЕЛЫМ ФУНКЦИЯМ. I

§ 1. **Введение.** Пусть H — некоторый класс функций, определенных на множестве B, со значениями в линейном нормированном пространстве F с нормой $|\cdot|$ ($H \subset F^B$). Подмножество S множества B назовем H-максимальным, если $\forall y \in H$

$$\sup\{|y(\tau)| : \tau \in S\} = \sup\{|y(t)| : t \in B\}.$$

Приведем некоторые примеры максимальных множеств. Пусть H_ρ^α — класс всех функций, голоморфных в угле D раствора $\frac{\pi}{\alpha}$, имеющих порядок роста ρ в угле и непрерывных на границе Γ угла. Согласно теореме Фрагмена — Линделефа (см., например, [1], стр. 69), Γ — H_ρ^α — максимальное множество при $\rho < \alpha$.

Известны также примеры и дискретных максимальных множеств. При этом под дискретным множеством понимается множество точек в C^p, $p \geqslant 1$, не имеющее предельных точек на конечном расстоянии. Пусть, как обычно, $[\rho, \sigma)$ — класс всех целых функций, у которых или порядок $< \rho$, или порядок равен ρ, но тип меньше, чем σ $(0 < \sigma \leqslant \infty)$. Пусть далее S — множество точек $\{\pm\lambda_n, \ \pm i\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $\lambda_n > 0$; $\mu_n > 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = D_1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\mu_n} = D_2$; $\inf\limits_n (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$; $\inf\limits_n (\mu_{n+1} - \mu_n) > 0$. Теорема Левинсона (см. [1], стр. 267) утверждает, что S является $[1, \pi\sqrt{D_1^2 + D_2^2}$-максимальным множеством.

В настоящей статье выделяются довольно общие классы максимальных множеств, образованных с помощью введенных в работе γ-достаточных множеств. Полученные общие результаты применяются к некоторым классам целых функций. Следует заметить, что γ-достаточные множества являются естественным обобщением слабо достаточных множеств, введенных Шнейдером [2] и довольно интенсивно исследуемых в последнее время (см., например, [3—7]).

В работе излагаются также результаты, относящиеся к следующей задаче. Пусть $\rho(r) \to \rho > 0$ — уточненный порядок по Валирону (см. [1], стр. 46); $[\rho(r), \infty)$ — класс всех целых функций $y(z)$ роста не выше, чем нормального типа относительно $\rho(r)$; $g(\theta)$ — ограниченная 2π-периодическая ρ-тригонометрически выпуклая функция (см. [1], стр. 72—76; класс всех таких функций будет в дальнейшем обозначаться символом T_ρ). Предположим, что $g \in T_\rho$, $y(z) \in [\rho(r), \infty)$ и что $g_y(\theta_j) < g(\theta_j)$, $j = 1, 2, \ldots p$, где $g_y(\theta)$ — индикатор $y(z)$ при порядке $\rho(r)$, а $\{\theta_j\}_{j=1}^{p}$ — некоторая совокупность p чисел из $[0, 2\pi)$.

Требуется указать дискретное множество S такое, что если $y(z)$ растет достаточно медленно на S, то отсюда следует, что неравенство $g_y(\theta)<g(\theta)$ справедливо уже для всех θ из $[0, 2\pi]$.

§ 2. γ-достаточные множества. Всюду далее $R^+=[0, +\infty)$; $(R^+)^B$ — множество всех отображений B в R^+. Пусть $h\in(R^+)^B$, $E_{(0)}$ — подпространство F^B. Положим

$$E_\alpha=\left\{y\in E_{(0)}\mid |y|_\alpha:=\sup_{t\in B}\frac{|y(t)|}{\exp\alpha h(t)}<\infty\right\}\quad(0\leqslant\alpha<\infty);$$
$$E^\beta(h)=\bigcup_{0\leqslant\alpha<\beta}E_\alpha\quad(0<\beta\leqslant\infty).$$

Определим на $E^\beta(h)$ топологию μ индуктивного предела семейства линейных нормированных пространств E_α:

$$E^\beta,\ \mu=\lim_{0\leqslant\alpha<\beta}\operatorname{ind}E_\alpha.$$

Пусть $0\leqslant\alpha_n\uparrow\beta$. Тогда, очевидно, $E^\beta(h),\ \mu=\lim\limits_n\operatorname{ind}E_{\alpha_n}$. Пользуясь тем, что топология μ мажорирует топологию d поточечной сходимости, легко получить, что каждый шар $I_\alpha=\{x\in E_\alpha:|x|_\alpha\leqslant 1\}$ замкнут в $E^\beta(h)$, μ (см., например, [6, 7]). Отсюда следует, что пространство $E^\beta(h)$, μ обладает свойством F_1 (см. [8], стр. 52) и потому $\lim\limits_n\operatorname{ind}E_{\alpha_n}$ — регулярный индуктивный предел (определение регулярного индуктивного предела см. в [9], стр. 406).

Пусть теперь S — произвольное подмножество B и $E_\alpha^S=\left\{y\in\right.$ $\left.\in E^\beta(h)\mid |y|_\alpha^S:=\sup\limits_{t\in S}\dfrac{|y(t)|}{\exp\alpha h(t)}<\infty\right\}$, $0\leqslant\alpha<\beta$. Пространства E_α^S полунормированные. Так как $E_\alpha\hookrightarrow E_\alpha^S\subseteq E^\beta(h)$, то $\bigcup\limits_{0\leqslant\alpha<\beta}E_\alpha^S=E^\beta(h)$. Положим $E_S^\gamma=\bigcup\limits_{0\leqslant\alpha<\gamma}E_\alpha^S$ $(0<\gamma\leqslant\beta)$;

$$E_S^\gamma,\ \mu_{S,\gamma}=\lim_{0\leqslant\alpha<\gamma}\operatorname{ind}E_\alpha^S.$$

Множество S назовем γ-достаточным для $E^\beta(h)$, если $E_S^\gamma,\ \mu_{S,\gamma}\hookrightarrow$ $\hookrightarrow E^\beta(h),\ \mu$. В частности, множество S β-достаточно для $E^\beta(h)$ тогда и только тогда, когда на $E^\beta(h)$ совпадают две индуктивные топологии $\lim\limits_{0\leqslant\alpha<\beta}\operatorname{ind}E_\alpha$ и $\lim\limits_{0\leqslant\alpha<\beta}\operatorname{ind}E_\alpha^S$. Следуя Шнейдеру [2], будем называть β-достаточное для $E^\beta(h)$ множество слабо достаточным (для $E^\beta(h)$).

Теорема 1. *Для того, чтобы множество S было γ-достаточным для $E^\beta(h)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\alpha\in[0,\ \gamma)\ \exists\,\delta\in[0,\ \beta):E_\alpha^S\hookrightarrow E_\delta. \tag{1}$$

Достаточность. Если условие (1) выполнено, то $\forall\alpha\in[0,\gamma)$ $E_\alpha^S\hookrightarrow$ $\hookrightarrow E_\delta\hookrightarrow E^\beta(h),\ \mu$; отсюда $E_S^\gamma,\ \mu_{S,\gamma}\hookrightarrow E^\beta(h),\ \mu$.

Необходимость легко следует из леммы 4 работы [4].

Теорема, которая будет сейчас доказана, является отправной для всех последующих результатов настоящего параграфа.

Теорема 2. *Пусть F — регулярная банахова алгебра; $E_{(0)}$ — алгебра относительно поточечногоо умножения в B; $\gamma \in (0, \beta]$ и S — γ-достаточное множество для $E^{\beta}(h)$. Пусть, далее, $y \in E^{\beta}(h)$ и $\exists n_k \uparrow \infty : y^{n_k} \in E^{\beta}(h)$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда*

$$\sup_{t \in S} |y(t)| = \sup_{t \in B} |y(t)|. \tag{2}$$

Перед доказательством напомним, что банахова алгебра F с нормой $|\cdot|$ называется регулярной, если $|f^2| = |f|^2$, $\forall f \in F$.

Положим $C_1 = \sup_{t \in S} |y(t)|$; $C_2 = \sup_{t \in B} |y(t)|$. Всегда $C_2 \geqslant C_1$. Если $C_1 = \infty$, то подавно $C_2 = \infty$. Пусть теперь $C_1 = 0$. Зафиксируем $\alpha \in [0, \gamma)$ и выберем $\delta \in [0, \beta)$ так, чтобы выполнялось соотношение (1). Тогда $\exists d < \infty : |f|_\delta \leqslant d |f|_\alpha^S$, $\forall f \in E_\alpha^S$. Так как $y \in E_\alpha^S$, $\forall \alpha \in [0, \beta)$, то $|y|_\delta = 0$ и $C_2 = C_1 = 0$. Пусть, наконец, $0 < C_1 < \infty$. Положим $v = y/C_1$. Ясно, что $v \in E^{\beta}(h)$, причем $|v(t)| \leqslant 1$, $\forall t \in S$. Тогда $\forall k \geqslant 1$

$$\sup_{t \in B} \frac{|v^{n_k}(t)|}{\exp \delta h(t)} \leqslant d \sup_{t \in S} \frac{|v^{n_k}(t)|}{\exp \alpha h(t)} \leqslant d \sup_{t \in S} \frac{|v(t)|}{\exp \alpha h(t)} \leqslant d.$$

Следовательно, $\forall t \in B$, $\forall k \geqslant 1$ $|v(t)| \leqslant d^{1/n_k} \exp \frac{\delta h(t)}{n_k}$. Устремляя k бесконечности, получим, что $|v(t)| \leqslant 1$, $\forall t \in B$, т. е. $|y(t)| \leqslant C_1$, $\forall t \in B$, и $C_2 \leqslant C_1$.

Следствие 1. *Пусть F и $E_{(0)}$ — те же, что в теореме 2, и пусть $E^{\beta}(h)$ — алгебра, $\gamma \in (0, \beta]$ и S — γ-достаточное множество для $E^{\beta}(h)$. Тогда S является $E^{\beta}(h)$-максимальным множеством.*

Следствие 2. *Пусть F — регулярная банахова алгебра; $E_{(0)}$ — алгебра (относительно поточечного умножения на B); $0 < \gamma \leqslant \infty$ и S — γ-достаточное множество для $E_0(h)$. Тогда S является $E^{\infty}(h)$-максимальным множеством.*

Применим следствие 2 к одной конкретной ситуации. Пусть $F = B = \boldsymbol{C}$; $E_0 = H(\boldsymbol{C})$ — пространство всех целых функций;

$$E_\alpha = \{y(z) \in H(\boldsymbol{C}) : \sup_{z \in C} |y(z)| \exp[-\alpha |z|^\rho] < \infty\};$$

$$0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n \leqslant 2\pi; \quad \varphi_{k+1} - \varphi_k < \frac{\pi}{\rho}, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi; \quad W = \{re^{i\varphi_k} : 0 < r < \infty; \quad k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

В работах [10, 11] доказано, что если $\Lambda \subset \boldsymbol{C}$; $d(z, \Lambda) = \inf\{|z - t| : t \in \Lambda\}$ и $\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in W}} d(z, \Lambda) |z|^{\rho-1} = 0$, то Λ — слабо достаточное множество для $[\rho, \infty)$. По следствию 2 Λ — $[\rho, \infty)$-максимальное множество. Заметим, что этот результат точен: для любого как угодно малого положительного числа τ можно построить множество Λ такое, что

$$\overline{\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in W}}} d(z, \Lambda) |z|^{\rho-1} < \tau,$$

но Λ — не $[\rho, \infty)$-максимальное множество и даже не множество единственности для $[\rho, \infty)$.

Следствие 3. *Пусть* $0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_n < 2\pi$; $\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi$; $\gamma = \max\limits_{1 < k < n} \{\varphi_{k+1} - \varphi_k\}$. *Пусть, далее,* Λ — *произвольное множество на плоскости такое, что* $\overline{\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ z \in W}}} \frac{\ln d(z, \Lambda)}{\ln |z|} \leqslant 1 - \frac{\pi}{\gamma}$. Тогда Λ — $\left[\frac{\pi}{\gamma}, 0\right)$*-максимальное множество.*

Следствие 1 в случае, когда $F = \boldsymbol{C}$; $B = \boldsymbol{C}^p$; $p \geqslant 1$; $E_{(0)} = H(\boldsymbol{C}^p)$, получено ранее [2].

Введем важную характеристику любого элемента y из $E_{(0)}$. Именно, положим $H(y) = \inf\{\alpha > 0 : y \in E_\alpha\}$ и $H(y) = +\infty$, если $y \notin E_\alpha$, $\forall \alpha \in (0, +\infty)$. Очевидно, что $y \in E^\beta(h) \leftrightarrow H(y) < \beta$. Обозначим еще символом E_b^S множество всех функций $x(t)$ из $E^\beta(h)$, ограниченных на $S: \sup\limits_{t \in S} |x(t)| < +\infty$. Ясно, что $E_b^S \subseteq \bigcap\limits_{0 < \alpha < \beta} E_\alpha^S$. Всюду далее до конца параграфа предполагается, что $\beta < +\infty$.

Теорема 3. *Пусть* F, $E_{(0)}$ *и* S — *те же, что и в теореме 2. Пусть, далее,* $H(y) < \beta/2$, $\forall y \in E_b^S$. *Тогда* S — $E^\beta(h)$*-максимальное множество.*

Перед доказательством для краткости полагаем всюду далее $E = E^\beta(h)$. Пусть $y \in H$. Если $y \notin E_b^S$, то $\sup\limits_{t \in S} |y(t)| = +\infty$ и подавно $\sup\limits_{t \in B} |y(t)| = +\infty$. Пусть теперь $y \in E_b^S$. Тогда $H(y) < \beta | 2$ и $\exists \eta < \beta | 2 : y \in E_\eta$. Отсюда $y^2 \in E_{2\eta} \subseteq E$. При этом $y^2 \in E_b^S$ и потому $H(y^2) < \beta/2$. Продолжая рассуждения, найдем, что $y^4 \in E$ и т. д. Остается применить теорему 2.

Следствие 1. *Пусть* F, $E_{(0)}$, γ *и* S — *те же, что в теореме 2, и пусть* $E_b^S \subseteq E_\alpha$ *при некотором* $\alpha < \beta/2$. *Тогда* S — E — *максимальное множество.*

Введем одну характеристику множества S. *Пусть* $0 \leqslant \alpha < \beta$. Положим $\lambda(\alpha) = \inf\{\delta \in [0, \beta) : E_\alpha^S \hookrightarrow E_\delta\}$ и $\lambda(\alpha) = \beta$, если множество таких δ пусто. Пусть, далее, $\psi(\lambda) = \max\{\lambda(\alpha), \alpha\}$. Функция $\psi(\lambda)$ не убывает на $[0, \beta)$. Положим $\psi_0 = \lim\limits_{\alpha \to +0} \psi(\alpha)$. Из теоремы 1 следует, что S — γ-достаточное множество для $E \leftrightarrow \lambda(\alpha) < \beta$, $\forall \alpha < \gamma$.

Следствие 2. *Пусть* F, E_0, γ *и* S — *те же, что и в теореме 2, и пусть* $\psi_0 < \beta/2$. *Тогда* S *является* E*-максимальным множеством.*

Укажем теперь несколько иное достаточное условие максимальности множества S. Назовем функцию $v_\delta(t)$ из E функцией правильного δ-роста, если $H(v_\delta) \leqslant \delta$ и если из соотношений $y \in E$, $y \cdot v_\delta \in E$, $H(v_\delta y) \leqslant \alpha$, где $\alpha \in [\delta, \beta)$, всегда следует, что $H(y) \leqslant \beta - \delta$.

Положим еще для любого y из E $H_S(y) = \inf\{\alpha \in [0, \beta) : y \in E_\alpha^S\}$. Всегда $0 \leqslant H_S(y) \leqslant H(y) < \beta$.

Теорема 4. *Пусть F, E_0, γ и S — те же, что в теореме 2, и пусть для любого δ из $[0, \gamma)$ в E имеется функция v_δ правильного δ-роста. Тогда* $\forall y \in E$

$$H(y) \leqslant H_S(y) + \beta - \gamma. \tag{3}$$

Доказательство. Допустим, что в E найдется функция y, для которой $H(y) > H_S(y) + \beta - \gamma$. Очевидно, что тогда $H_S(y) < H(y)$. Зафиксируем любое ε из интервала $\left(0, \frac{\beta - H(y)}{3}\right)$ и положим $\eta = \beta - H(y) - \varepsilon$. Пусть $v_\eta(t)$ — функция правильного η-роста. Тогда $v_\eta y \in E$, причем $v_\eta y \in E^S_\delta$, $\forall \delta > \eta + H_S(y)$. В частности, $v_\eta y \in E^S_{\eta + H_S(y) + \frac{\varepsilon}{2}}$. При этом $\eta + H_S(y) + \frac{\varepsilon}{2} < \gamma - \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $H(v_\eta y) \leqslant \psi \times \left(\eta + H_S(y) + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Но тогда

$$H(y) \leqslant \psi\left(\eta + H_S(y) + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \eta = H(y) - \beta + \varepsilon + \psi\left(\eta + \frac{\varepsilon}{2} + H_S(y)\right).$$

Отсюда $\beta \leqslant \varepsilon + \psi\left(\eta + \frac{\varepsilon}{2} + H_S(y)\right) = \varepsilon + \psi(\eta + \varepsilon + H_S(y)) = \varepsilon + \psi \times (\beta - H(y) + H_S(y))$. Так как $\varepsilon > 0$ можно взять как угодно малым, то $\beta \leqslant \psi(\beta - H(y) + H_S(y))$, и мы пришли к противоречию.

Следствие 1. *Пусть F — регулярная банахова алгебра; E_0 — алгебра; $\frac{\beta}{2} < \gamma < \beta$; S — γ-достаточное множество. Пусть, далее, для любого δ из $(0, \gamma)$ в E имеется функция v_δ правильного δ-роста. Тогда S является E-максимальным множеством.*

Действительно, $\forall y \in E^S_b$ $H_S(y) = 0$. Из неравенства (3) следует, что $H(y) \leqslant \beta - \gamma < \frac{\beta}{2}$, $\forall y \in E^S_b$, и остается сослаться на теорему 3.

Рассмотрим более конкретную ситуацию, когда B — область в $\boldsymbol{C}^p$, $p \geqslant 1$, а функция $h(z)$ удовлетворяет условию: для любого компакта T области $(T \in k(B))$

$$\inf_{z \in T} h(z) > 0; \quad \sup_{z \in T} h(z) < +\infty. \tag{4}$$

Из условий (3) следует, что если $y \in E$, то $\forall T \in k(B)$ $\sup_{z \in T} |y(z)| < \infty$ (по-прежнему $|\cdot|$ — норма в нормированном пространстве F). Положим $\forall y \in E$

$$h_0(y) = \overline{\lim_{\substack{z \to \partial B \\ z \in B}}} \frac{\ln |y(z)|}{h(z)}; \quad h_0^S(y) = \overline{\lim_{\substack{z \to \partial B \\ z \in S}}} \frac{\ln |y(z)|}{h(z)}.$$

Будем предполагать еще, что

$$\lim_{\substack{z \to \partial B \\ z \in B}} h(z) = +\infty. \tag{5}$$

Тогда, как легко проверить, $\forall y \in E$:

$$H(y) = h_0(y); \qquad H_S(y) = h_0^S(y).$$

Из теоремы 4 получаем

Следствие 2. *Пусть имеют место предположения теоремы* **4** *и пусть выполнены условия* (4), (5). *Тогда* $Ay \in E$:

$$\varlimsup_{\substack{z\to\partial B\\ z\in S}} \frac{\ln|y(z)|}{h(z)} \leqslant \varlimsup_{\substack{z\to\partial B\\ z\in B}} \frac{\ln|y(z)|}{h(z)} \leqslant \varlimsup_{\substack{z\to\partial B\\ z\in S}} \frac{\ln|y(z)|}{h(z)} + \beta - \gamma. \qquad (6)$$

§ 3. Маркированные пространства целых функций. В этом параграфе рассматривается, пожалуй, самый важный модельный случай, когда $B = \boldsymbol{C}^p$, $p \geqslant 1$; $F = \boldsymbol{C}$; E — подалгебра алгебры $H(C^p)$, где $H(\boldsymbol{C}^p)$ — пространство всех целых функций, определенных на $\boldsymbol{C}^p$. Положим $\forall z \in \boldsymbol{C}^p \; |z|_p = [\sum_{k=1}^{p} |z_k|^2]^{1/2}$. Укажем вначале условия, при которых в E имеются функции правильного β-роста. Назовем совокупность шаров $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $K_n = \{z \in \boldsymbol{C}^p : |z - a_n|_p < b_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ стандартной, если $\lim_{n\to\infty} |a_n|_p = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{|a_n|_p} = 0$. Далее, будем говорить, что функция $b(z)$, действующая из $\boldsymbol{C}^p$ в $\boldsymbol{R}$, является функцией относительно медленного роста, если для любого компакта D из $\boldsymbol{C}^p$ $0 < \inf_{z\in D} b(z) \leqslant \sup_{z\in D} b(z) < \infty$ и если для любой стандартной системы $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ шаров $\lim_{\substack{z_1, z_2 \in K_n\\ n\to\infty}} \frac{b(z_1)}{b(z_2)} = 1$, причем стремление к единице равномерно относительно z_1, z_2 из K_n (при $n \to \infty$). Наконец, назовем функцию $g_\alpha(z)$ из $E_{(0)}$ $(0 \leqslant \alpha < \infty)$ α-маркировочной, если $g_\alpha(z) \in E_\delta$, $\forall \delta \in (\alpha, +\infty)$ и если имеется множество $\mathscr{E}_\alpha$ шаров $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $P_n = \{z \in \boldsymbol{C}^p : |z - \gamma_n|_p < c_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — нулевой линейной плотности такое, что $\lim_{n\to\infty} |\gamma_n|_p = \infty$ и $\forall \varepsilon > 0 \; \exists A_\varepsilon > 0$: $|g_\alpha(z)| > A_\varepsilon \exp(\alpha - \varepsilon) h(z)$, $\forall z \in \boldsymbol{C}^p \diagdown \mathscr{E}_\alpha$.

Теорема 5. *Пусть* $h(z)$ — *функция относительно медленного роста,* $\alpha \in [0, +\infty)$, *и пусть* $g_\alpha(z)$ — α-*маркировочная функция. Тогда* $g_\alpha(z)$ — *функция правильного* α-*роста.*

Доказательство. Из определения α-маркировочной функции следует, что $H(g_\alpha) \leqslant \alpha$. Пусть теперь $y \in E^\beta(h)$; $yg_\alpha \in E^\beta(h)$; $\delta \in (\alpha, \beta)$ и $H(yg_\alpha) \leqslant \delta$. Тогда $\forall \gamma \in (\delta, \beta)$

$$\sup_{z\in \boldsymbol{C}^p} |y(z)|\,|g_\alpha(z)| \exp[-\gamma h(z)] = D_\gamma < \infty.$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall z \in \boldsymbol{C}^p \diagdown \mathscr{E}_\alpha$

$$A_\varepsilon |y(z)| \leqslant D_\gamma \exp(\gamma - \alpha + \varepsilon) h(z).$$

Как показано, в [12, стр. 537—539], множество $\mathscr{E}_\alpha$ можно «погрузить» в множество T_α попарно не пересекающихся шаров нулевой линейной плотности, причем множество центров этих шаров дискретно. Используя принцип максимума модуля и относительно медленный рост $h(z)$, получим, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, B_\varepsilon < \infty$:

$$\forall z \in \boldsymbol{C}^p \;\; |y(z)| \leqslant B_\varepsilon \exp(\gamma - \alpha + 2\varepsilon) h(z).$$

Отсюда следует, что $\forall \varepsilon > 0$ $y \in E_{\gamma-\alpha+2\varepsilon}$, и потому $H(y) \leqslant \gamma - \alpha$. Так как число $\gamma > \delta$ можно взять как угодно близким к δ, то $H(y) \leqslant \delta - \alpha$.

Назовем пространство $E^{\beta}(h)$ маркированным, если для любого α из $[0, \beta)$ в $E^{\beta}(h)$ найдется α-маркировочная функция.

Из теоремы 5 и следствий 1, 2 теоремы 4 получаем.

Следствие 1. *Пусть $p \geqslant 1$, $E_{(0)}$ — подалгебра $H(\boldsymbol{C}^p)$; $h(z)$ — функция относительно медленного роста; пространство $E^{\beta}(h)$ маркировано и S — γ-достаточное множество, причем $\frac{\beta}{2} < \gamma \leqslant \beta$. Тогда S — максимальное множество для $E^{\beta}(h)$.*

Пусть еще $\gamma \in (0, \beta]$ $\left(\text{не обязательно } \gamma > \frac{\beta}{2}\right)$, а функция $h(z)$ такова, что

$$\lim_{|z|_p \to \infty} h(z) = +\infty. \tag{7}$$

Тогда $\forall y \in E^{\beta}(h)$:

$$\varlimsup_{|z|_p \to \infty} \frac{\ln|y(z)|}{h(z)} \leqslant \varlimsup_{\substack{z \in S \\ |z|_p \to \infty}} \frac{\ln|y(z)|}{h(z)} + \beta - \gamma. \tag{8}$$

Приведем примеры маркированных пространств.

1. Пусть $u(z)$ — неотрицательная субгармоническая функция конечного порядка ρ. Тогда при любом $\gamma > 0$ такой же будет и функция $\gamma u(z)$. Согласно теореме 5 работы [13] найдется целая функция $f_{\gamma}(z)$ такая, что $|\gamma u(z) - \ln|f(z)|| < C_1 \ln|z|$, $z \notin E_{\rho}$; при этом исключительное множество E_{ρ} можно покрыть кружками $K_j = \{z : |z - z_j| < t_j\}$ так, чтобы $\sum_{j=1}^{\infty} t_j < \infty$.

Предположим, что функция $u(z)$ удовлетворяет такому условию:

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\ln|z|}{u(z)} = 0. \tag{9}$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists R_{\varepsilon} < \infty : \forall R > R_{\varepsilon}$, $|z| = R$, $z \notin E_{\rho}$

$$\exp(\gamma - \varepsilon) u(z) < |f_{\gamma}(z)| < \exp(\gamma + \varepsilon) u(z).$$

Пусть $u(z)$ — функция относительно медленного роста. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists c_{\varepsilon}$, $d_{\varepsilon} \in (0, +\infty)$:

$$|f_{\gamma}(z)| \leqslant d_{\varepsilon} \exp(\gamma + \varepsilon) u(z), \quad z \in \boldsymbol{C};$$

$$|f_{\gamma}(z)| > c_{\varepsilon} \exp(\gamma - \varepsilon) u(z), \quad z \notin E_{\rho}.$$

Таким образом, $f_{\gamma}(z)$ — γ-маркировочная функция, и справедливо

Следствие 2. *Пусть $E_{(0)}$ — подалгебра $H(\boldsymbol{C})$; $u(z)$ — неотрицательная субгармоническая функция относительно медленного роста, удовлетворяющая условию (9); $\gamma \in (0, \beta]$ и S — γ-достаточное множество для $E^{\beta}(h)$.*

Тогда

$$\text{А) } \forall y \in E^{\beta}(h) \ \overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{\ln|y(z)|}{u(z)} \leqslant \overline{\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in S}}} \frac{\ln|y(z)|}{u(z)} + \beta - \gamma;$$

$$\text{Б) } \textit{если } \gamma > \frac{\beta}{2}, \textit{ то } \forall y \in E^{\beta}(h) \ \sup_{z\in C}|y(z)| = \sup_{z\in S}|y(z)|.$$

2. Пусть $h(z) = |z|^{(\rho|z|)} g(\arg z)$, где $g(\varphi)$ — положительная функция из класса T_ρ, а $\rho(r)$ — уточненный порядок:

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho; \quad \lim_{r\to\infty} \rho'(r)\, r \ln r = 0.$$

Легко проверить, что $h(z)$ — функция относительно медленного роста, условие (9) выполняется для $u = h$, а $E^1(h) = [\rho(r), g(\theta))$ — класс всех целых функций роста не выше, чем нормального типа при порядке $\rho(r)$, индикатор которых строго меньше, чем $g(\theta)$.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с. 2. *Schneider D. M.* Sufficient sets for some spaces of entire functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. **197**. P. 161—180. 3. *Напалков В. В.* О сравнении топологий в некоторых пространствах целых функций // Докл. АН СССР. 1982. **264**, № 4. С. 827—830. 4. *Bierstedt K. D., Meise R., Summers N. H.* A projective Description of Weighted Inductive Limits // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. **272**, N 1. P. 107—161. 5. *Коробейник Ю. Ф.* Индуктивные и проективные топологии. Достаточные множества и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. **50**, № 3. С. 639—665. 6. *Абанин А. В.* О некоторых признаках слабой достаточности // Мат. заметки. 1986. **40**, № 4. С. 442—454. 7. *Коробейник Ю. Ф.* Проективные топологии в индуктивный пределах функциональных пространств. Достаточные множества. М., 1986. 96 с. Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 27.08.85, 1Б911ДЕП. 8. *Макаров Б. М.* Индуктивные пределы нормированных пространств // Вестн. ЛГУ. 1965. **20**, № 13. С. 50—58. 9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959. 684 с. 10. *Шрайфель И. С.* Построение целых функций с положительным индикатором и приложения к представляющим системам и достаточным множествам// М., 1984. 43 с. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 29.02.84, 6Б189 ДЕП. 11. *Рахимкулов Н. И.* Достаточные множества для пространств целых функций; представление фунций рядами экспонент: Дис. .... канд. физ-мат. наук. Уфа, 1984. 106 с. 12. *Красичков-Терновский* И. Ф. Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона // Мат. заметки. 1978. **24**, № 4. С. 531—546. 13. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций // Analysis Mathematica. 1985. **11**, N 3. P. 257—282.

Поступила в редколлегию 27.01.88