УДК 517.521.8

А. П. КОХАНОВСКИЙ

СВЯЗЬ МЕЖДУ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ МЕТОДАМИ АБЕЛЯ И ВОРОНОГО СУММИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

В настоящей статье результаты работы [1] переносятся на соответствующие интегральные методы суммирования функций.

Пусть функции $p(t) \geqslant 0$ и $s(t)$ таковы, что для любого $y > 0$ существуют интегралы

$$\dot{J}(y) = \frac{1}{y}\int_0^\infty e^{-t/y} s(t)\,dt; \tag{1}$$

$$W(y) = \frac{1}{P(y)}\int_0^y p(y-t)\,s(t)\,dt, \tag{2}$$

где $P(y) = \int_0^y p(t)\,dt$.

Если $\lim\limits_{y\to\infty} \dot{j}(y) = s \left(\lim\limits_{y\to\infty} W(y) = s\right)$, то функция $s(t)$ называетвя суммируемой к числу s методом Абеля (методом Вороного).

Далее будем рассматривать только такие методы Вороного, определяющая функция $p(t)$ которых удовлетворяет в интервале $(0; \infty)$ условиям

$$p(t) = \exp h(t);\ h'(t) > 0;\ h''(t) < 0;\ \lim_{t\to\infty} h'(t) = 0; \tag{3}$$

функция $th'(t)$ монотонно стремится к бесконечности. Этим условиям удовлетворяют, например, функции $h(t) = t^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$; $h(t) = \ln^\lambda(t+a)$, $\lambda > 1$.

Каждому, достаточно большому числу y поставим в соответствие число m_y такое, что $h'(m_y) = \frac{1}{y}$. Так как m_y является обратной функцией к функции $h'(t)\left(m_y = h'^{-1}\left(\frac{1}{y}\right)\right)$, то m_y — непрерывна и, следовательно, принимает все достаточно большие действительные значения. Заметим, что $\frac{m_y}{y} = m_y h'(m_y) \to \infty$ $(y \to \infty)$.

Теорема. *Для любой интегрируемой функции* $s(t) = o(th'(t))$ *справедливо соотношение*

$$\dot{J}(y) - W(m_y) = o(1)\ (y\to\infty). \tag{4}$$

Таким образом, если функция $s(t)$ *суммируется к какому-либо числу одним методом, то она суммируется к тому же числу и другим методом.*

С л е д с т в и е. *Если* $s(t)$ *удовлетворяет условию теоремы, то ядра преобразований* $\dot{J}(y)$ *и* $W(y)$ *совпадают.*

Это утверждение следует из (4) и теоремы 6.3 II [3]. Определение ядра см. в [2, с. 77].

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Для $h(t)$ справедливы свойства:

$$\text{а) } \frac{h'(x)}{h'(y)} \to 1 \text{ при } \frac{x}{y} \to 1;$$

$$\text{в) } -h''(t) \leqslant h'(t)/t\ (t > 0).$$

Действительно, если $x > y$, то имеем

$$1 > \frac{h'(x)}{h'(y)} = \frac{xh'(x)}{yh'(y)} \cdot \frac{y}{x} \geqslant \frac{y}{x}.$$

Аналогичное соотношение получаем и для случая $x < y$. Этим доказано свойство а). Свойство в) следует из условия монотонного возрастания функции $th'(t)$.

Для всех достаточно больших y справедливы неравенства

$$\frac{p(y)}{h'(y)}\left(1 - \frac{\alpha_y}{yh'(y)}\right) \leqslant P(y) \leqslant \frac{p(y)}{h'(y)} (\alpha_y \to 2,\ y \to \infty). \tag{5}$$

Действительно, используя разложение $h(t)$ по формуле Тейлора

$$h(y-t) = h(y) - h'(y)t + \frac{1}{2}h''(\xi)t^2 (y - t < \xi < y), \tag{6}$$

имеем

$$P(y) = \int_0^y p(y-t)\,dt \leqslant p(y)\int_0^\infty e^{-th'(y)}\,dt = \frac{p(y)}{h'(y)}.$$

Для оценки $P(y)$ снизу, воспользуемся функцией $n_y = \frac{1}{h'(y)} \ln yh'(y)$. Так как $\frac{n_y}{y} \Rightarrow 0$ $(y \to \infty)$, то для всех достаточно больших y получим

$$P(y) = \int_0^y p(y-t)\,dt \geqslant \int_0^{n_y} p(y-t)\,dt =$$

$$= p(y)\int_0^{n_y} e^{-th'(y)} \cdot e^{\frac{1}{2}h''(\xi)t^2}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant p(y)\int_0^{n_y} e^{-th'(y)}\left(1 + \frac{1}{2}h''(\xi)t^2\right)dt \geqslant$$

$$\geqslant p(y)\int_0^{n_y} e^{-th'(y)}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{h'(\xi)}{\xi}\cdot t^2\right)dt \geqslant$$

$$\geqslant p(y)\int_0^{n_y} e^{-th'(y)}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h'(y-n_y)}{y-n_y}\cdot t^2\right)dt =$$

$$= p(y)\int_0^{n_y} e^{-th'(y)}\left(1 - \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_y\frac{h'(y)}{y}t^2\right)dt \geqslant$$

$$\geqslant p(y)\left(\int_0^{n_y} e^{-th'(y)}dt - \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_y\frac{h'(y)}{y}\int_0^\infty e^{-th'(y)}t^2dt\right) =$$

$$= p(y)\left(-\frac{1}{yh'^2(y)} + \frac{1}{h'(y)} - \frac{1}{2}\tilde{\alpha}\cdot\frac{h'(y)}{y}\frac{2}{h'^3(y)}\right) = \frac{p(y)}{h'(y)}\left(1 - \frac{\alpha_y}{yh'(y)}\right).$$

В этих выкладках $\tilde{\alpha}_y = \frac{h'(y-n_y)}{h'(y)} \cdot \frac{y}{y-n_y} \to 1 \ (y \to \infty)$, $\alpha_y = 1 + \tilde{\alpha}$, $y - t < \xi < y$.

Итак, неравенства (5) доказаны.

Введем обозначения:

$$J^*(y) = \frac{1}{y} \int_0^{m_y} s(t) e^{-t/y} dt, \quad R(y) = \frac{1}{y} \int_{m_y}^{\infty} s(t) e^{-t/y} dt;$$

$$W^*(y) = \frac{h'(y)}{p(y)} \int_0^y p(y-t) s(t) dt.$$

Если $s(t)$ удовлетворяет условию теоремы, то справедливы такие соотношения:

$$R(y) = o(1); \quad J^*(y) - W^*(m_y) = o(1); \quad W(y) - W^*(y) = o(1). \qquad (7)$$

Первое из соотношений (7) доказывается просто. Действительно, введя обозначение $\tau_y = \sup\limits_{m_y < t < \infty} \frac{|s(t)|}{th'(t)}$ $(\lim\limits_{y \to \infty} \tau_y = 0)$, будем иметь

$$|R(y)| \leqslant \frac{1}{y} \int_{m_y}^{\infty} |s(t)| e^{-t/y} dt \leqslant \frac{\tau_y}{y} \int_{m_y}^{\infty} th'(t) e^{-t/y} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tau_y h'(m_y)}{y} \int_0^{\infty} te^{-t/y} dt = \tau_y = o(1) \quad (y \to \infty).$$

Далее нам понадобится функция i_y такая, что $i_y \to \infty$ и $i_y h'(y) \to 0$ $(y \to \infty)$. Поскольку $\frac{i_y}{y} = \frac{i_y h'(y)}{yh'(y)} \to 0$ $(y \to \infty)$, то можно считать, что для всех достаточно больших y справедливы неравенства $i_y < y < m_y$.

Воспользовавшись равенством (6) и свойствами функции $h(t)$, получим

$$0 \leqslant \psi(t;\ y) = e^{-t/y} - \frac{p(m_y - t)}{p(m_y)} = e^{-t/y}\left(1 - e^{\frac{1}{2} h''(\xi) t^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant e^{-t/y}\left(-\frac{1}{2} h''(\xi) t^2\right) \leqslant \frac{1}{2} e^{-t/y} \frac{h'(\xi)}{\xi} t^2$$

$$(m_y - t < \xi < m_y).$$

Перейдем к доказательству второго из соотношений (7):

$$J^*(y) - W^*(m_y) = \frac{1}{y} \int_0^{m_y} s(t) \left(e^{-t/y} - \frac{p(m_y - t)}{p(m_y)}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{y}\left(\int_0^{i_y} + \int_{i_y}^{m_y}\right) \psi(t;\ y) s(t) dt = A(y) + B(y).$$

Покажем, что $A(y)=o(1)$ и $B(y)=o(1)$ при $y\to\infty$.

$$|A(y)|\leqslant\frac{1}{y}\int\limits_0^{i_y}|s(t)|\left(\frac{1}{2}e^{-t/y}\frac{h'(\xi)}{\xi}t^2\right)dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2y}\frac{h'(m_y-i_y)}{m_y-i_y}\int\limits_0^{i_y}|s(t)|t^2dt=o(1)\frac{h'(m_y)}{ym_y}\int\limits_0^{i_y}th'(t)\cdot t^2dt=$$

$$=o(1)\frac{h'(m_y)\cdot m_yh'(m_y)\cdot i_y^3}{ym_y}=o(1)\left(\frac{i_y}{y}\right)^3=o(1)\ (y\to\infty).$$

Введем обозначение $\varepsilon_y=\sup\limits_{\alpha_y<t<m_y}\frac{|s(t)|}{th'(t)}(\varepsilon_y\to 0,\ y\to\infty)$. Используя неравенства (5), будем иметь

$$|B(y)|\leqslant\frac{\varepsilon_y}{y}\int\limits_{i_y}^{m_y}th'(t)\,\psi(t;\ y)\,dt\leqslant\frac{\varepsilon_ym_yh'(m_y)}{y}\int\limits_0^{m_y}\psi(t;\ y)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon_y\cdot m_y}{y^2}\left(\int\limits_0^{\infty}e^{-t/y}\,dt-\int\limits_0^{m_y}\frac{p(m_y-t)}{p(m_y)}\,dt\right)=\frac{\varepsilon_ym_y}{y^2}\left(y-\frac{P(m_y)}{p(m_y)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon_ym_y}{y^2}\left(y-\frac{1}{h'(m_y)}\left(1-\frac{\alpha_{m_y}}{m_yh'(m_y)}\right)\right)=\frac{\varepsilon_ym_y}{y^2}\cdot\frac{y\alpha_{m_y}}{m_yh'(m_y)}=\varepsilon_y=o(1)\,(y\to\infty).$$

Второе из соотношений (7) доказано. Аналогично доказывается и третье соотношение. Так, воспользовавшись неравенством (5), получим

$$0\leqslant\frac{1}{P(y)}-\frac{h'(y)}{p(y)}\leqslant\frac{h'(y)}{p(y)}\left(\frac{1}{1-\frac{\alpha_y}{yh'(y)}}-1\right)=\frac{\varphi(y)}{yp(y)},$$

где через $\varphi(y)$ обозначено выражение в скобках.
Поэтому

$$|W(y)-W^*(y)|\leqslant\left(\frac{1}{P(y)}-\frac{h'(y)}{p(y)}\right)\int\limits_0^y p(y-t)\,|s(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varphi(y)}{py(y)}\left(\int\limits_0^{i_y}+\int\limits_{i_y}^{y}\right)p(y-t)\,|s(t)|\,dt=C(y)+D(y);$$

$$C(y)=O(1)\frac{1}{y}\int\limits_0^{i_y}|s(t)|\,dt=o(1)\frac{1}{y}\int\limits_0^{i_y}th'(t)\,dt=$$

$$=o(1)\frac{yh'(y)\,i_y}{y}=o(1)\ (y\to\infty);$$

$$O(y)=\frac{o(1)}{yp(y)}\int\limits_{i_y}^{y}th'(t)\,p(y-t)\,dt=o(1)\frac{yh'(y)\,P(y)}{yp(y)}\,o(1)\ (y\to\infty).$$

Соотношения (7) доказаны. Из них легко следует утверждение теоремы. Действительно,

$$|J(y) - W(m_y)| \sum |J^*(y) - W^*(m_y)| + |W^*(m_y) - W(m_y)| +$$
$$+ |R(y)| = o(1) \ (y \to \infty).$$

Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Кохановский А. П.* Связь метода Абеля с некоторым подклассом методов суммирования рядов Вороного // Укр. мат. журн. 1984. **36**, № 6. С. 771—774. 2. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М., 1951. 504 с. 3. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., 1960. 471 с.

Поступила в редколлегию 05.11.88