УДК 517.982

В. М. КАДЕЦ

СКОЛЬКО ТОЧЕК МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОБЛАСТЬ СУММ РЯДА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ?

Как известно из курса математического анализа, сумма ряда может изменяться при перестановке слагаемых. Пусть Σx_i — ряд в банаховом пространстве X. Следуя терминологии работ [1, 2], будем говорить, что точка x принадлежит области сумм ряда Σx_i, если существует перестановка $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которой $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)} = x$. Область сумм ряда Σx_i будем обозначать ОС (Σx_i). Согласно теореме Штейница, ОС любого ряда в конечномерном пространстве — линейное множество, т. е. вместе с любыми двумя своими несовпадающими точками содержит и всю соединяющую их прямую. В бесконечномерном пространстве [1 — 3] это не так.

Во всех известных примерах, за исключением тривиальных случаев пустой ОС и ОС, состоящей из одной точки, область сумм имеет мощность континуума. К. Возьняковским и М. И. Кадецом [4] был построен ряд, ОС которого состоит ровно из двух точек. В настоящей работе, опираясь на конструкцию [4], покажем, что ОС может быть счетным множеством или состоять из любого конечного числа точек.

Напомним основные свойства конструкции ряда из работы [4]. Это ряд Σu_i функций $u_i(t)$ из $L_2(T)$, где T — некоторое вероятное пространство. Функции $u_i(t)$ принимают только целые значения: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = 0$ (сходимость везде в смысле $L_2(T)$), для некоторой перестановки π ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_{\pi(i)}$ сходится к тождественной единице, и никаких сумм, кроме 0 и 1, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_{\sigma(i)}$ не может иметь ни при какой перестановке σ. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n(\varepsilon)$, что $\sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} u_k = 0$ и $\| \sum_{k=n}^{n+m} u_k \| \leqslant \varepsilon$ при $n > n(\varepsilon)$. Понятно, что ОС $(\sum_{k=n(\varepsilon)+1}^{\infty} u_k)$ также состоит из двух точек: 0 и 1. Ниже обозначения u_k, T, $n(\varepsilon)$ мы будем использовать только в указанном смысле.

Теорема 1. *В бесконечномерном гильбертовом пространстве существует ряд со счетной областью сумм.*

Доказательство. Рассмотрим множество $u = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$, где T_k — непересекающиеся копии вероятностного пространства T. Зададим меру на U естественным образом. Требуемый ряд будем строить в $L_2(U)$. В качестве членов ряда возьмем функции $v_{n,k}(t)$, $n, k \in \mathbb{N}$, задаваемые следующим образом: при $n \leqslant n(4^{1-k})$ положим $U_{n,k} = 0$; при $n > n(4^{1-k})$ функция $v_{n,k}(t)$ равна $u_n(t)$ на множестве T_k, а на остальных множествах T_i функция $v_{n,k}(t)$ — тождественный нуль. Другими словами, множество $\{v_{n,1}\}_{n>n(1)}$ — это члены ряда $\sum_{n>n(1)} u_n$, взятые с носителями на T_1, $\{v_{n,2}\}_{n>n(1/4)}$ — члены ряда $\sum_{n>n(1/4)} u_n$, взятые с носителями на T_2, и т.д. Понятно, что при любом упорядочении слагаемых ряд $\sum_{n,k} v_{n,k}$ может на каждом из T_k сходится либо к тождественному нулю, либо к тождественной единице. Так как сумма ряда — элемент $L_2(U)$, мера множества, на котором эта сумма равна единице, — конечна. В то же время для любого конечного множества индексов $A \subset \mathbb{N}$ нетрудно построить упорядочение слагаемых, при котором ряд $\sum v_{n,k}$ сходится к единице на $\bigcup_{i \in A} T_i$ и сходится к нулю на остальных T_i. Итак, область сумм построенного ряда — счетное множество.

Лемма 1. *Пусть V — некоторое вероятностное пространство, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ — ряд в $L_2(V)$, состоящий из функций, принимающих только целые значения; $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — стремящаяся к нулю последовательность чисел. Тогда для сходимости в $L_2(U)$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + a_k)$ необходимо и достаточно, чтобы сходились оба ряда: Σx_k и Σa_k.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + a_k)$ сходится. Для каждого $\varepsilon \in]0; 1/4[$ выберем такой номер $m(\varepsilon)$, что

$$\| \sum_{k=m_1}^{m_2} (x_k + a_k) \| < \varepsilon \tag{1}$$

для любых $m_2 \geqslant m_1 > m(\varepsilon)$ и $|a_k| < \varepsilon$ для всех $k > m(\varepsilon)$. Докажем индукцией по m_2, что для $m_2 \geqslant m_1 > m(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\Big|\sum_{k=m_1}^{m_2} a_k\Big| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Это будет означать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и соответственно ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} x_k$.

При $m_2 = m_1$ неравенство (2) выполняется. Пусть существует такой номер $m_2 > m_1$, что $\Big|\sum\limits_{k=m_1}^{m_2-1} a_k\Big| \leqslant \varepsilon$, а $\Big|\sum\limits_{k=m_1}^{m_2} a_k\Big| > \varepsilon$. Тогда, так как $|a_{m_2}| < \varepsilon$, $\varepsilon < \Big|\sum\limits_{k=m_1}^{m_2} a_k\Big| < 2\varepsilon$. Ввиду того что функция $\sum\limits_{k=m_1}^{m_2} x_k$ принимает только целые значения, получаем

$$\Big\|\sum_{k=m_1}^{m_2} x_k + \sum_{k=m_1}^{m_2} a_k\Big\| > \varepsilon,$$

что противоречит неравенству (1). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть A — множество из 2^n вершин гиперкуба в n-мерном евклидовом пространстве E. Тогда для любого $m \in N$, $1 \leqslant m \leqslant 2^n$ найдется такое подпространство $F \subset F$, что ортогональная проекция множества A на подпространство F состоит ровно из m точек.*

Лемма 2 геометрически очевидна. Строгое доказательство можно провести индукцией по размерности.

Теорема 2. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ можно построить такой ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} x_i$ в гильбертовом пространстве, что ОС (Σx_i) состоит ровно из m точек.*

Доказательство. Выберем номер $n \in \mathbb{N}$, для которого $2^n \geqslant m$. Рассмотрим пространство $L_2(U)$, $U = \bigcup\limits_{k=1}^{n} T_k$, где T_k — непересекающиеся копии вероятностного пространства T. На каждом из T_i рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_{k,i}$ — копию ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, положив вне T_i функции $v_{k,i}(t)$ равными нулю. Построим в $L_2(U)$ ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$, взяв в качестве его членов все элементы $v_{k,i}$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Очевидно, что ОС (Σb_j) состоит из кусочно-постоянных функций, равных на каждом из T_i либо тождественному нулю, либо тождественной единице. Эти функции образуют в E — своей линейной оболочке — вершины гиперкуба. Количество этих функций равно 2^n, $\dim E = n$. Согласно лемме 2 можно выбрать подпространство $F \subset E$, ортогональная проекция на которое множества ОС (Σb_j) состоит из m точек. Обозначим через G ортогональное дополнение в $L_2(U)$ подпространства E, через H — прямую сумму $F \bigoplus G$, через P — ортогональный проектор пространства $L_2(U)$ на подпространство H. Ясно, что $P(\text{ОС}(\Sigma b_i))$ содержится в F и состоит из m точек. Рассмотрим ряд $\Sigma P(b_j)$. Так как $P(x) - x \in E$ для любого x, разность $P(b_j) - b_j$ на каждом из T_j является постояной величиной, $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{j \to \infty} a_{i,j} = 0$. Функции $b_j(t)$ принимают только целые значения. Воспользовавшись леммой 1 и непрерывностью оператора P, получим, что ряд $\Sigma P(b_j)$ сходится в $L_2(U)$ при тех и только тех упорядочениях слагаемых, при которых сходится ряд Σb_j, $\text{ОС}(\Sigma P(b_j)) = P(\text{ОС}(\Sigma b_j))$, и $\text{ОС}(\Sigma P(b_j))$ состоит ровно из m точек. Теорема доказана.

Замечание. Мощность ОС (Σx_i) не может превосходить мощности континуума, следовательно, в предположении гипотезы континуума теоремы 1 и 2 дают полный ответ на вопрос о возможном числе элементов области сумм условно сходящегося ряда в гильбертовом пространстве. Воспользовавшись техникой работ [1, 2], можно показать, что все упомянутые варианты реализуются в каждом бесконечномерном банаховом пространстве.

Вопрос. Любое ли конечное множество элементов бесконечномерного гильбертова пространства может служить областью сумм некоторого ряда? Тот же вопрос для бесконечных множеств.

Список литературы: 1. *Кадец В. М.* Об одной задаче С. Банаха (проблема 106 из «Шотландской книги») // Функцион. анализ и его приложения. 1986. **20**, № 4. С. 74—75. 2. *Кадец В. М.* Теорема Штейница и B-выпуклость // Изв. вузов. Сер. математика. 1986. № 12. С. 32—36. 3. *Никишин Е. М.* Перестановки функциональных рядов // Мат. сб. 1971. **85**, № 2. С. 272—286. 4. *Kadec M. I., Wozniakowski K.* On series whose permutations have only two sums // Bull. Pol. Acad. Sci.

Поступила в редколлегию 27.03.88