УДК 517.54+517.98

А. Я. ХЕЙФЕЦ

ОБОБЩЕННАЯ БИКАСАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ШУРА — НЕВАНЛИННЫ — ПИКА И СВЯЗАННОЕ С НЕЙ РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ

Обобщенная бикасательная задача Шура — Неванлинны — Пика рассматривалась в работах [1, 2], где получено описание множества решений задачи и охарактеризована ее резольвентная матрица в случае полной неопределенности.

Рассмотрим общий случай и докажем равенство Парсеваля [3, 4] для обобщенной бикасательной задачи Шура — Неванлинны — Пика (точнее, докажем отсутствие дополнительных членов в нем).

Пусть E_1, $\tilde{E}_1$, E_2, $\tilde{E}_2$ — сепарабельные гильбертовы пространства; ϑ_1, ϑ_2 — голоморфные сжимающие оператор-функции в единичном круге $\boldsymbol{D}$ комплексной плоскости (ϑ_1: $E_1 \to \tilde{E}_2$, $\vartheta_2 : \tilde{E}_2 \to E_2$), являющиеся односторонне внутренними в следующем смысле: $\vartheta_1\vartheta_1^* = 1_{\tilde{E}_1}$, $\vartheta_2^*\vartheta_2 = 1_{\tilde{E}_2}$ при почти всех t, $|t| = 1$.

Обозначим через K_{ϑ_1}, K_{ϑ_2} пространства

$$K_{\vartheta_1} = H^2_-(E_1) \ominus \vartheta_1^* H^2_-(\tilde{E}_1);\ \ K_{\vartheta_2} = H^2_+(E_2) \ominus \vartheta_2 H^2_+(\tilde{E}_2),$$

где $H^2_\pm$ — стандартные пространства Харди в единичном круге $\boldsymbol{D}$ комплексной плоскости (в скобках указаны пространства коэффициентов).

Кроме того, рассмотрим пространства

$$K_1 = K_{\vartheta_1} \oplus H^2_+(E_1) = L^2(E_1) \ominus \vartheta_1^* H^2_-(\tilde{E}_1);$$

$$K_2 = H^2_-(E_2) \oplus K_{\vartheta_2} = L^2(E_2) \ominus \vartheta_2 H^2_+(\tilde{E}_2).$$

Пространство K_1 инвариантно относительно оператора умножения на независимую переменную t (так как его ортогональное дополнение в $L^2(E_1)$ инвариантно относительно умножения на $\bar{t}$), K_2 —инвариантно относительно умножения на $\bar{t}$.

Обозначим $T_1 = t\,|K_1$, $T_2^* = \bar{t}\ |K_2$.

Блочные разложения этих операторов в соответствии с ортогональными разложениями K_1 и K_2, приведенными выше, имеют вид

$$T_1 = \begin{bmatrix} T_{\vartheta_1} & 0 \\ U_1 & V_1 \end{bmatrix},\ T_2^* = \begin{bmatrix} V_2^* & U_2^* \\ 0 & T_{\vartheta_2}^* \end{bmatrix},$$

где

$$T_{\vartheta_1} = P_{\vartheta_1} t\,|\,K_{\vartheta_1} = P_- t\,|\,K_{\vartheta_1},\ \ U_1 = P_+ t\ |K_{\vartheta_1},\ \ V_1 = t\,|\,H^2_+(E_1),$$

$$T_{\vartheta_2}^* = P_{\vartheta_2}\bar{t}\,|\,K_{\vartheta_2} = P_+\bar{t}\,|\,K_{\vartheta_2},\ \ V_2^* = \bar{t}\,|\,H^2_-(E_2),\ \ U_2^* = P_-\bar{t}\,|\,K_{\vartheta_2}.$$

Здесь P_+, P_- — ортопроекторы на H^2_+ и H^2_-, P_ϑ — ортопроектор на K_ϑ.

Лемма 1. *Пусть* $w(\zeta)$ *голоморфная сжимающая оператор-функция в* $\boldsymbol{D}$, $w(\zeta)$: $E_1 \to E_2$. *Положим* $W = P_{K_2} w|\ K_1$, *тогда* 1) *оператор* W — *сжатие,* 2) *блочное разложение* W *имеет треугольный вид*

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ W_{21} & W_2 \end{bmatrix},$$

где

$$W_1 = P_- w\,|\,K_{\vartheta_1} : K_{\vartheta_1} \to H^2_-(E_2);$$

$$W_2 = P_{\vartheta_2} w\,|\,H^2_+(E_1) : H^2_+(E_1) \to K_{\vartheta_2};$$

$$W_{21} = P_{\vartheta_2} w\,|\,K_{\vartheta_1} : K_{\vartheta_1} \to K_{\vartheta_2};$$

3) $WT_1 = T_2 W = P_{K_2} t w\,|\,K_1.$

Пример. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — точки единичного круга $\boldsymbol{D}$ комплексной плоскости,

$$K_{\vartheta_1} = \operatorname{Lin}\left\{\frac{P_1(\zeta_k)\, e_1}{t-\zeta_k},\ e_1 \in E_1\right\}_{k=1}^{n};$$

$$K_{\vartheta_2} = \operatorname{Lin}\left\{\frac{P_2(\zeta_k)\, e_2}{1-t\bar{\zeta}_k},\ e_2 \in E_2\right\}_{k=1}^{n},$$

где $P_1(\zeta_k)$ — ортопроекторы на некоторые подпространства в E_1, $P_2(\zeta_k)$ — в E_2. Пусть $w(\zeta)$ — голоморфная в $\boldsymbol{D}$ сжимающая оператор-функция ($E_1 \to E_2$).

Тогда оператор W_1 определяется значениями $w(\zeta_k) P_1(\zeta_k)$, оператор W_2 — значениями $P_2(\zeta_k)\, w(\zeta_k)$ и оператор W_{21} — значениями $P_2(\zeta_k) \times \times w'(\zeta_k) P_1(\zeta_k)$.

Сформулируем теперь *обобщенную бикасательную задачу Шура—Неванлинны—Пика.*

Пусть W — *блочно-треугольный оператор*

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ W_{21} & W_2 \end{bmatrix}$$

из $K_1 = K_{\vartheta_1} \oplus H_+^2(E_1)$ *в* $K_2 = H_-^2(E_2) \oplus K_{\vartheta_1}$ *такой, что* $WT_1 = T_2 W$. *Требуется дать критерий того, что*

$$W = P_{K_2} w \mid K_1$$

для некоторой сжимающей голоморфной в $\boldsymbol{D}$ *оператор-функции* ($E_1 \to \to E_2$) *и описать все такие функции* w.

Связь этой постановки с рассмотренной в [1, 2] мы обсудим в конце работы.

Как видно из леммы 1, необходимым условием разрешимости задачи является сжимаемость оператора W. Как будет показано, это условие является и достаточным. Для описания всех решений будет использована конструкция типа абстрактной задачи интерполяции (см. [4, 5]).

Если K_{ϑ_1}, K_{ϑ_2} такие, как описано в примере, то это обычная бикасательная задача Шура — Неванлинны — Пика.

Нам понадобится следующее известное утверждение.

Утверждение 2. *Оператор*

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ W_{21} & W_2 \end{bmatrix} : K_{\vartheta_1} \oplus H_+^2(E_1) \to H_-^2(E_2) \oplus K_{\vartheta_2}$$

является сжатием тогда и только тогда, когда оператор

$$D = \left[\begin{array}{c|c} 1_{\vartheta_1} - W_1^* W_1 & W_{21}^* \\ \hline W_{21} & 1_{\vartheta_2} - W_2 W_2^* \end{array}\right],$$

действующий в пространстве $X = K_{\vartheta_1} \oplus K_{\vartheta_2}$, *неотрицателен:* $D \geqslant 0$.

Лемма 3. *Имеет место следующее тождество:*

$$\langle D\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{\vartheta_1} & 0\\ 0 & T^*_{\vartheta_2}\end{bmatrix}x,\ \begin{bmatrix}\mathbf{1}_{\vartheta_1} & 0\\ 0 & T^*_{\vartheta_2}\end{bmatrix}x\rangle_X - \langle D\begin{bmatrix}T_{\vartheta_1} & 0\\ 0 & \mathbf{1}_{\vartheta_2}\end{bmatrix}x,\ \begin{bmatrix}T_{\vartheta_1} & 0\\ 0 & \mathbf{1}_{\vartheta_2}\end{bmatrix}x\rangle_X =$$

$$= \langle M_1 x,\ M_1 x\rangle_{E_1} - \langle M_2 x,\ M_2 x\rangle_{E_2},$$

где

$$x = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\ x_1 \in K_{\vartheta_1},\ x_2 \in K_{\vartheta_2};$$

$$M_1 x = t x_1 |_0 + W_2^* x_2 |_0 : X \to E_1;$$

$$M_2 x = x_2 |_0 + t W_1 x_1 |_0 : X \to E_2.$$

Тождество доказывается непосредственным вычислением с использованием коммутационного соотношения $WT_1 = T_2 W$ (поблочно).

Это тождество позволяет связать с данными обобщенной бикасательной задачи Шура—Неванлинны—Пика *абстрактную интерполяционную задачу* (см. [3, 5]). Сформулируем ее:

голоморфную сжимающую в $\boldsymbol{D}$ *оператор-функцию* $w(\zeta)$: $E_1 \to E_2$ *будем называть решением абстрактной интерполяционной задачи, построенной по данным обобщенной бикасательной задачи Шура—Неванлинны—Пика, если существует линейное отображение* F *из* $X = K_{\vartheta_1} \oplus K_{\vartheta_2}$ *в модельное пространство де Бранжа — Ровняка* H^w *(определение см. в* [4]) *такое, что*

$$1.\ \| Fx \|^2_{H^w} \leqslant \langle Dx,\ x\rangle;$$

$$2.\ F\begin{bmatrix}T_{\vartheta_1} & 0\\ 0 & \mathbf{1}_{\vartheta_2}\end{bmatrix}x \overset{\text{п. в.}}{=} tF\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{\vartheta_1} & 0\\ 0 & T^*_{\vartheta_2}\end{bmatrix}x - \begin{bmatrix}\mathbf{1}_{E_2} & w\\ w^* & \mathbf{1}_{E_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-M_1 x\\ M_2 x\end{bmatrix}.$$

Отображение F называется представлением Фурье пространства X, связанным с решением w.

Вообще говоря (в других задачах), одному решению w могут соответствовать несколько представлений Фурье. Но в случае обобщенной бикасательной задачи Шура—Неванлинны—Пика это не так. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* w *— решение абстрактной задачи интерполяции, построенной по данным обобщенной бикасательной задачи Шура—Неванлинны—Пика, тогда представление Фурье* F *однозначно определяется решением абстрактной задачи интерполяции* w *и имеет вид*

$$Fx = \begin{bmatrix}\mathbf{1}_{E_2} & w\\ w^* & \mathbf{1}_{E_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-W_1 x_1 + x_2\\ x_1 - W_2^* x_2\end{bmatrix},$$

где

$$x = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\ x_1 \in K_{\vartheta_1},\ x_2 \in K_{\vartheta_2},$$

W_1 и W_2 *— данные обобщенной бикасательной задачи Шура — Неванлинны — Пика.*

Доказательство: Компоненты F будем обозначать $F \equiv \begin{bmatrix} F_+ \\ F_- \end{bmatrix}$.

Покажем, что $(F_- x_1)(\zeta) = x_1(\zeta) - w(\zeta)^* \cdot (W_1 x_1)(\zeta)$.

Для этого воспользуемся соотношением ($|\zeta| < 1$):

$$(F_- T_{\vartheta_1} x_1)(\zeta) = \frac{1}{\bar\zeta}(F_- x_1)(\zeta) - (M_1 x_1 - w(\zeta)^* \cdot M_2 x_1).$$

Откуда

$$(F_-(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1}) x_1)(\zeta) = \bar\zeta (M_1 x_1 - w(\zeta)^* M_2 x_1).$$

Делая подстановку $x_1 := (\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1$, получаем

$$(F_- x_1)(\zeta) = \bar\zeta (M_1 - w(\zeta)^* M_2)(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1.$$

Поскольку

$$(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1 = P_- \frac{x_1}{1 - \bar\zeta t} = \bar t\, \frac{x_1 - x_1(\zeta)}{\bar t - \bar\zeta}, \text{ то}$$

$$M_1(\bar\zeta(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1) = t\bar\zeta (\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1 \big|_{t=0} = x_1(\zeta).$$

Так как $W_1 T_{\vartheta_1} = V_2 W_1$, где $V_2 = P_- t \mid H^2_-(E_2)$, то

$$M_2(\bar\zeta(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1) = t\bar\zeta W_1 (\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1 \big|_{t=0} =$$
$$= t\bar\zeta(\mathbf{1}_{H^2_-(E_2)} - \bar\zeta V_2)^{-1} W_1 x_1 \big|_{t=0} = (W_1 x_1)(\zeta).$$

(Последнее равенство получается так же, как и для M_1). Таким образом,

$$(F_- x_1)(\zeta) = x_1(\zeta) - w(\zeta)^* \cdot (W_1 x_1)(\zeta).$$

в. Покажем, что $F_+ x_1 \overset{\text{п. в}}{=} w x_1 - w_1 x_1$, $|t| = 1$.

Для этого воспользуемся соотношением

$$(F_+ T_{\vartheta_1} x_1)(\zeta) = \zeta (F_+ x_1)(\zeta) - (w(\zeta) M_1 - M_2) x_1.$$

Положим $x_1 := \bar\zeta(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1$, тогда

$$\zeta\bar\zeta (F_+(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1)(\zeta) - \bar\zeta (F_+ T_{\vartheta_1}(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1)(\zeta) =$$
$$= w(\zeta) x_1(\zeta) - (W_1 x_1)(\zeta).$$

Добавим и вычтем в левой части $(F_+(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1)(\zeta)$, тогда левая часть примет вид

$$(\zeta\bar\zeta - 1)(F_+(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1)(\zeta) + (F_+ x_1)(\zeta).$$

Покажем, что первое слагаемое стремится к нулю при некасательном стремлении $|\zeta|$ к границе единичного круга $\boldsymbol{D}$. В самом деле,

$$\|(F_+(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1)(\zeta)\|^2_{E_2} \leqslant \frac{\| F_+(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1 \|^2_{H^2_+(E_2)}}{1 - |\zeta|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\| F(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1 \|^2_{H^w}}{1 - |\zeta|^2} \leqslant \frac{\| \sqrt{D}(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1 \|^2_X}{1 - |\zeta|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\| (\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar\zeta T_{\vartheta_1})^{-1} x_1 \|^2_{K_{\vartheta_1}}}{1 - |\zeta|^2}.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$(1-|\zeta|^2)^2 \| (F_+ (\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1)(\zeta) \|_{E_2}^2 \leqslant$$
$$\leqslant (1-|\zeta|^2) \| (\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1 \|_{K_{\vartheta_1}}^2 .$$

Поскольку

$$(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1 = \bar{t} \frac{x_1 - x_1(\zeta)}{\bar{t} - \bar{\zeta}},$$

$$(1-|\zeta|^2) \| (\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1 \|^2 = \int_{\boldsymbol{T}} \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2} \| x_1 - x_1(\zeta) \|_{E_1}^2 \, dm(t),$$

где $\boldsymbol{T}$ — единичная окружность, dm — нормированная мера Лебега на ней. Но последний интеграл, очевидно, стремится к нулю при $|\zeta| \to 1$.

Таким образом, при $|t| = 1$

$$F_+ x_1 \overset{\text{п. в}}{=\!=} w x_1 - W_1 x_1 .$$

Собирая вместе $F_+ x_1$ и $F_- x_1$, получим

$$F x_1 \overset{\text{п. в}}{=\!=} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{E_2} & w \\ w^* & \mathbf{1}_{E_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -W_1 x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично вычисляется $F x_2$.

Теорема 5. *Множества решений обобщенной бикасательной задачи Шура—Неванлинны—Пика и построенной по ее данным абстрактной задачи интерполяции совпадают. Для любого решения w имеет место равенство Парсеваля $\langle Dx, x \rangle = \| Fx \|_{H^w}^2$.*

Доказательство: Пусть w — голоморфная в $\mathbf{D}$ сжимающая оператор-функция из E_1 в E_2, рассмотрим выражение

$$Fx = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{E_2} & w \\ w^* & \mathbf{1}_{E_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -W_1 x_1 + x_2 \\ x_1 - W_2^* x_2 \end{bmatrix},$$

где $x \in K_{\vartheta_1} \oplus K_{\vartheta_2}$, W_1 и W_2 — данные обобщенной бикасательной задачи Шура—Неванлинны—Пика. Как видно из выражения для F, первая компонента F лежит в $H_+^2(E_2)$ тогда и только тогда, когда $w x_1 - W_1 x_1 \in H_+^2(E_2)$, т. е. $P_- w x_1 = W_1 x_1$. Точно так же вторая компонента $F \in H_-^2(E_1)$ тогда и только тогда, когда $w^* x_2 - W_2^* x_2 \in H_-^2(E_1)$, т. е. $P_+ w^* x_2 = W_2^* x_2$. Таким образом, F есть отображение в H^w тогда и только тогда, когда $P_- w x_1 = W_1 x_1$ и $P_+ w^* x_2 = W_2^* x_2$.

В этом случае вычислим $\| Fx \|_{H^w}^2$:

$$\langle F x_1 \, F x_1 \rangle_{H^w} = \int_{\boldsymbol{T}} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{E_2} & w \\ w^* & \mathbf{1}_{E_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -W_1 x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} -W_1 x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \right\rangle_{E_2 \oplus E_1} dm = \langle w x_1 - W_1 x_1, \, -W_1 x_1 \rangle + \langle x_1 - w^* \cdot W_1 x_1, \, x_1 \rangle .$$

Первое слагаемое равно нулю, так как

$$wx_1 - W_1x_1 \in H^2_+(E_2), \text{ а } W_1x_1 \in H^2_-(E_2).$$

Преобразуем второе слагаемое

$$\langle w^* \cdot W_1x_1, x_1\rangle = \langle W_1x_1, wx_1\rangle = \langle W_1x_1, P_-wx_1\rangle = \langle W_1x_1, W_1x_1\rangle.$$

Итак,

$$\| Fx_1 \|^2_{H^w} = \langle (\mathbf{1}_{\vartheta_1} - W_1^*W_1)\, x_1, x_1\rangle.$$

Аналогично

$$\| Fx_2 \|^2_{H^w} = \langle (\mathbf{1}_{\vartheta_2} - W_2W_2^*)\, x_2, x_2\rangle, \ \langle Fx_1, Fx_2\rangle_{H^w} = \langle \widehat{W}_{21}x_1, x_2\rangle,$$

где $\widehat{W}_{21} = P_{\vartheta_2}w \mid K_{\vartheta_1}$.

Таким образом,

$$\| Fx \|^2_{H^w} = \langle \widehat{D}x, x\rangle_X,$$

где

$$\widehat{D} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_{\vartheta_1} - W_1^*W_1 & \widehat{W}_{21}^* \\ \hline \widehat{W}_{21} & \mathbf{1}_{\vartheta_2} - W_2W_2^* \end{array}\right].$$

Но $\widehat{D} \leqslant D$ тогда и только тогда, когда $\widehat{W}_{21} = W_{21}$. В самом деле

$$D - \widehat{D} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & W_{21}^* - \widehat{W}_{21}^* \\ \hline W_{21} - \widehat{W}_{21} & 0 \end{array}\right] \geqslant 0$$

тогда и только тогда, когда $W_{21} = \widehat{W}_{21}$.

Кроме того, если w — решение обобщенной бикасательной задачи Шура—Неванлинны—Пика, то F обладает свойством 2 абстрактной задачи интерполяции.

Тем самым теорема доказана.

В работах [1, 2] обобщенная бикасательная задача Шура—Неванлинны—Пика рассматривалась в следующей постановке: w_0 — заданная голоморфная в $\boldsymbol{D}$ сжимающая оператор-функция из E_1 в E_2, требуется описать все функции w:

$$w - w_0 \in \vartheta_2 \cdot H^\infty(\tilde{E}_1 \to \tilde{E}_2) \cdot \vartheta_1.$$

Утверждение 6. Пусть $g \in H^\infty(E_1 \to E_2)$, тогда $g = \vartheta_2\hat{g}\vartheta_1$, где $\hat{g} \in H^\infty(\tilde{E}_1 \to \tilde{E}_2)$ тогда и только тогда, когда $P_{K_2}g \mid K_1 = 0$ (определение пространств K_1 и K_2 дано в начале работы).

Доказательство. Поскольку

$$P_{K_1} = \mathbf{1}_{L^2(E_1)} - \vartheta_1^*P_-\vartheta_1, \ P_{K_2} = \mathbf{1}_{L^2(E_2)} - \vartheta_2P_+\vartheta_2^*, \text{ то}$$

$$P_{K_2}gP_{K_1} = (\mathbf{1} - \vartheta_2P_+\vartheta_2^*)\, g\, (\mathbf{1} - \vartheta_1^*P_-\vartheta_1) =$$

$$= g - \vartheta_2P_+\vartheta_2^*g - g\vartheta_1^*P_-\vartheta_1 + \vartheta_2P_+\vartheta_2^*g\vartheta_1^*P_-\vartheta_1.$$

Это выражение мы рассматриваем как оператор, применяемый к произвольной функции из $L^2(E_1)$.

а. Пусть $g = \vartheta_2\hat{g}\vartheta_1$, тогда

$$P_{K_2}gP_{K_1} = \vartheta_2\hat{g}\vartheta_1 - \vartheta_2P_+\hat{g}\vartheta_1 - \vartheta_2\hat{g}P_-\vartheta_1 + \vartheta_2P_+\hat{g}P_-\vartheta_1.$$

Группируя первые два члена и последние два, получаем

$$P_{K_2} g P_{K_1} = \vartheta_2 P_- \hat{g} \vartheta_1 - \vartheta_2 P_- \hat{g} P_- \vartheta_1 = \vartheta_2 P_- \hat{g} P_+ \vartheta_1 = 0,$$

так как $\hat{g} \in H^\infty$.

б. Пусть $P_{K_2} g P_{K_1} = 0$, т. е.

$$(1 - \vartheta_2 P_+ \vartheta_2^*) g (1 - \vartheta_1^* P_- \vartheta_1) = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим (1) на векторах вида $e_1 \in E_1$, тогда

$$(1 - \vartheta_2 P_+ \vartheta_2^*) g e_1 = 0,$$

откуда следует, что $g = \vartheta_2 \tilde{g}$, $\tilde{g} \in H^\infty (E_1 \to \tilde{E}_2)$.

Рассмотрим оператор, сопряженный к (1) с учетом полученного свойства g:

$$(1 - \vartheta_1^* P_- \vartheta_1) \tilde{g}^* \vartheta_2^* (1 - \vartheta_2 P_+ \vartheta_2^*) = 0,$$

т. е.

$$(1 - \vartheta_1^* P_- \vartheta_1) \tilde{g}^* P_- \vartheta_2^* = 0.$$

Рассмотрим этот оператор на векторах $\vartheta_2 \bar{t} \tilde{e}_2$:

$$(1 - \vartheta_1^* P_- \vartheta_1) \tilde{g}^* \bar{t} \tilde{e}_2 = 0,$$

или, умножая последнее равенство на t слева,

$$(1 - t \vartheta_1^* P_- \vartheta_1 \bar{t}) \tilde{g}^* \tilde{e}_2 = 0.$$

Откуда вытекает, что $\tilde{g}^* = \vartheta_1^* \hat{g}^*$, т. е. $\tilde{g} = \hat{g} \vartheta_1$, где $\hat{g} \in H^\infty (\tilde{E}_1 \to \tilde{E}_2)$. Следовательно, $g = \vartheta_2 \hat{g} \vartheta_1$.

Таким образом, для того, чтобы перейти от постановки работ [1, 2] к нашей постановке, нужно положить $W = P_{K_2} w_0 | K_1$. Смысл этой процедуры состоит в том, что от данной функции w_0 остаются лишь ее значения на спектре интерполяции.

Автор выражает глубокую благодарность Д. З. Арову за продолжительную беседу, которая послужила толчком для выполнения настоящей работы, а также В. Э. Кацнельсону и П. М. Юдицкому за полезные обсуждения.

Список литературы: 1. *Аров Д. З.* Линейные стационарные пассивные системы с потерями: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Одесса, 1983. 298 с. 2. *Аров Д.З.* γ-производящие матрицы, J-внутренние матрицы-функции и связанные с ними задачи экстраполяции матриц-функций. Одесса, 1986. 49 с. Деп. в УкрНИИНТИ, № 726 УК-Д 86. 3. *Кацнельсон В. Э., Хейфец А. Я., Юдицкий П. М.* Абстрактная интерполяционная задача и теория расширений изометрических операторов // Операторы в функцион. пространствах и вопросы теории функций. 1987. С. 83—96. 4. *Хейфец А. Я.* Равенство Парсеваля в абстрактной задаче интерполяции и соединение открытых систем I // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1988. Вып. 49. С. 112—120. 5. *Хейфец А. Я.* Равенство Парсеваля в абстрактной задаче интерполяции и соединение открытых систем II // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1988. Вып. 50. С. 98—103. 6. *Хейфец А. Я., Юдицкий П. М.* Интерполяция оператора, коммутирующего с укороченным сдвигом функциями класса И. Шура // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1983. Вып. 40. С. 129—136.

Поступила в редколлегию 05.09.88