УДК 513.88

В. П. ФОНФ

О РАСШИРЕНИИ ОПЕРАТОРНЫХ БАЗИСОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Согласно [1—3, с. 325] полная минимальная система $\{x_i\}$ в банаховом пространстве X называется операторным базисом, если существует последовательность непрерывных операторов $\{T_n\}$, $T_n:$ $:[x_i]_1^n \to [x_i]_1^n$ такая, что для каждого элемента $x \in X$ $x = \lim T_n S_n x$, где S_n — оператор взятия n-частной суммы по минимальной системе $\{x_i\}$ (если $\{x_i^*\}$ — сопряженная к $\{x_i\}$ система, то $S_n x = \sum\limits_1^n x_i^*(x)\, x_i$). Если операторы T_n линейны, то система $\{x_i\}$ называется линейным операторным базисом. М. И. Кадец доказал [2], что если сопряженная система $\{x_i^*\}$ (к полной минимальной системе $\{x_i\}$ является нормирующей (т. е. подпространство $[x_i^*]$ является нормирующим), то $\{x_i\}$ — операторный базис. В [4] автором доказано обратное утверждение, т. е. сопряженная система к операторному базису — нормирующая (в [I] этот факт доказан для линейных операторных базисов). Таким образом, можно дать эквивалентное определение операторного базиса: операторным базисом называется полная минимальная система с нормирующей сопряженной. Хорошо известно (см., например, [3]), что всякое сепарабельное банахово пространство имеет операторный базис, но не всякое — линейный. Полная минимальная система с тотальной сопряженной называется M-базисом.

В настоящей работе рассмотрены вопросы, связанные с расширением операторных базисов, аналогичные вопросам о расширении M-базисов (см. [3], с. 231).

Прежде чем переходить к основным результатам напомним некоторые определения и сформулируем ряд вспомогательных утверждений. Подмножество $A \subset X^*$ сопряженного банахова пространства X^* называется нормирующим, если

$$\inf_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \sup_{\substack{f \in A \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} > 0.$$

Пусть E_1 и E_2 — подпространства банахова пространства X. E_1 и E_2 называются квазидополнительными, если $E_1 \cap E_2 = 0$ и $\overline{E_1 + E_2} =$ $= X$. Раствором подпространств E_1 и E_2 называют число

$$\theta(E_1, E_2) = \max\{\sup_{x \in S(E_1)} d(x, E_2), \sup_{x \in S(E_2)} d(x, E_1)\},$$

где $S(E)$ — единичная сфера пространства E (единичный шар обозначим $U(E)$). Наклоном подпространства E_1 к E_2 называют число $\delta(E_1, E_2) = \inf\{\|x + y\| : x \in S(E_1),\ y \in E_2\}$. Хорошо известное равенство $\theta(E_1, E_2) = \theta(E_1^\perp, E_2^\perp)$ вместе с соображениями устойчивости ([5], с. 126) позволяют доказать следующее утверждение

Лемма 1. *Пусть $\{x_i\}$ — M-базис банахова пространства X с сопряженной системой $\{x_i^*\}$. Тогда для всякой последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_i\}$ существует последовательность $\{\delta_i\}$, $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$ такая, что всякая последовательность $\{y_i\} \subset X$, обладающая свойством $\|x_i - y_i\| < \delta_i$, $i = 1, 2, \ldots$ является M-базисом X и для ее сопряженной $\{y_i^*\}$ справедливы соотношения*

$$\theta([x_i^*]_1^n, [y_i^*]_1^n) < \varepsilon_n, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Лемма 2. *Пусть $\{x_i\}$ — операторный базис подпространства E сепарабельного банахова пространства X. Тогда сопряженная система $\{f_i\} \subset X^*$ может быть выбрана так, чтобы подпространство $[f_i] \subset X^*$ было нормирующим.*

Доказательство. Пусть $\{x_i^*\}$ — сопряженная система к $\{x_i\}$ в E^*, тогда подпространство $M = [x_i^*] \subset E^*$ нормирующее. Обозначим через A естественное вложение E в X. Нетрудно убедиться, что подпространство $A^{*-1}(M) \subset X^*$ нормирующее. Пользуясь сепарабельностью пространства X, выберем в единичном шаре $U(A^{*-1}(M))$ счетное w^*-плотное подмножество $\{t_n\}$ и для каждого номера n найдем элемент $g_n = \sum_1^{m_n} a_i^n x_i^*$ такой, что $\|g_n - A^* t_n\| < n^{-1}$. Без ушерба общности можно считать, что $m_1 < m_2 < \ldots$ и $a_{m_n}^n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть u_n — продолжение с сохранением нормы функционала $g_n - A^* t_n$ подпространства E на все X. Построим сопряженную систему $\{f_i\} \subset X^*$ следующим образом: выберем элементы $f_i \in A^{*-1}(x_i^*)$ $(i = 1, \ldots, m_1 - 1)$ произвольно, а в качестве f_{m_1} возьмем

$$f_{m_1} = \frac{1}{a_{m^1}^1}\left(t_1 + u_1 - \sum_1^{m_1 - 1} a_i^1 f_i\right),$$

далее выберем $f_i \in A^{*-1}(x_i^*)$, $i = m_1 + 1, \ldots, m_2 - 1$ произвольно, а

$$f_{m_2} = \frac{1}{a_{m_2}^2}\left(t_2 + u_2 - \sum_1^{m_2 - 1} a_i^2 f_i\right)$$

и т. д. построим последовательность $\{f_i\} \subset X^*$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $T : X \to Y$ линейное ограниченное взаимнооднозначное отображение сепарабельного банахова пространства X в такое же Y, причем $\overline{TX} = Y \neq TX$, т. е. T^{-1} неограниченное отображение. Тогда для всякого M-*базиса *$\{y_i\}$ в Y и для всякой последовательности $\{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon_i > 0$ существует базисная последовательность $\{u_i\} \subset X$ такая, что $\{Tu_i\}$ — M-бкзис пространства Y и $\|y_i - Tu_i\| < \varepsilon_i$.*

Доказательство. Пусть $\{y_i\}$ — произвольный M-базис пространства Y. Пользуясь устойчивостью M-базиса, найдем последовательность $\{\delta_i\}$ такую, что если $\|y_i - v_i\| < \delta_i$, $i = 1, 2, \ldots,$ то $\{v_i\}$ — M-базис Y. Будем считать, что $\varepsilon_i < \delta_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Воспользовавшись плотностью образа: $\overline{TX}=Y$, выберем элемент $u_1 \in X$ так, чтобы $\|y_1 - Tu_1\| < \varepsilon_1$, и пусть функционал $f_1^1 \in S(X^*)$ таков, что $f_1^1(u_1) = \|u_1\|$. Так как оператор T^{-1} неограничен, то для любого компактного по норме множества $K \subset X^*$ множество $\operatorname{Lin} K + T^*Y^*$ имеет первую категорию в X^* ($\operatorname{Lin} K$ — линейная оболочка множества K). Выберем функционал $h_1^1 \in X^* \setminus T^*Y^*$ так, чтобы $\|f_1^1 - h_1^1\| < \frac{\varepsilon_1}{2}$. Так как $h_1^1 \bar{\in} T^*X^*$, то $\overline{T(\operatorname{Ker} h_1^1)} = Y$ и, следовательно, существует элемент $u_2 \in \operatorname{Ker} h_1^1$ такой, что $\|y_2 - Tu_2\| < \varepsilon_2$. Положим $E_2 = [u_1, u_2]$ и пусть $\{f_i^2\}_1^{n_2} \subset S(X^*)$ такой набор функционалов, что множество $\{f_i^2|_{E_2}\}$ есть $\frac{\varepsilon_2}{2^2}$ — сеть для $S(E_2^*)$. Выберем последовательно функционалы $\{h_i^2\}_1^{n_2}$ так: $\|h_1^2 - f_1^2\| < \frac{\varepsilon_2}{2^2}$, $h_1^2 \bar{\in} [h_1^1] + T^*Y^*$; $\|h_2^2 - f_2^2\| < \frac{\varepsilon_2}{2^2}$, $h_2^2 \bar{\in} [h_1^1, h_1^2] + T^*Y^*$; $\|h_3^2 - f_3^2\| < \frac{\varepsilon_2}{2^2}$, $h_3^2 \bar{\in} [h_1^1, h_1^2, h_2^2] + T^*Y^*$ и т. д. По построению $[h_1^1, h_1^2, \dots, h_{n_2}^2] \cap T^*Y^* = 0$, откуда следует что $\overline{T([h_1^1, h_1^2, \dots h_{n_2}^2]^\tau)} = Y$. Выберем элемент $u_3 \in [h_1^1, h_1^2, \dots, h_{n_2}^2]^T$ так, чтобы $\|y_3 - Tu_3\| < \varepsilon_3$ и т. д.

Последовательность $\{u_i\}$ — требуемая. Лемма доказана.

Теорема 1*. *Пусть $\{x_i\}$ — операторный базис подпространства E_1, сепарабельного банахова пространства X и E_2 квазидополнительное, но не дополнительное подпространство к E_1. Тогда существует базисная последовательность $\{y_i\} \subset E_2$* такая, что *$\{x_i\} \cup \{y_i\}$ — операторный базис всего пространства X.*

Доказательство. Согласно [3], с. 231 существует последовательность $\{z_i\} \subset E_2$ такая, что $\{x_i\} \cup \{z_i\}$ M-базис X. Обозначим $\{x_i^*\} \cup \{z_i^*\}$ сопряженную систему и положим $E_3 = [z_i]$. По лемме 2 существует последовательность $\{u_i\} \subset E_1^\perp$ такая, что $[x_i^* + u_i]$ нормирующее подпространство. Без ущерба общности можно считать последовательность $\{u_i\}$ конечно линейно независимой. По теореме 1.6 ([5], с. 122) в фактор-пространстве X/E_1 существует M-базис $\{t_i\}$ с сопряженной системой $\{t_i^*\}$, обладающей свойством $[t_i^*]_1^n = [u_i]_1^n$, $n = 1, 2, \dots$. Для каждого $n = 1, 2, \dots$ обозначим через $\gamma_n = \delta([u_i]_1^n, [x_i^*]_1^n)$ наклон подпространства $[u_i]_1^n$ и $[x_i^*]_1^n$. По лемме 1, взяв в ней $\varepsilon_i = 2^{-i}\gamma_i$ и в качестве $\{x_i\}$ последовательность $\{t_i\}$ найдем последовательность $\{\delta_i\}$ такую, что если $\|t_i - v_i\| < \delta_i$, $i = 1, 2, \dots$, то $\{v_i\}$ — M-базис фактор-пространства X/E_1 и $\theta([t_i^*]_1^n, [v_i^*]_1^n) < 2^{-n}\gamma_n$, или, что то же самое, $\theta([u_i]_1^n, [v_i^*]_1^n) < 2^{-n}\gamma_n$, $n = 1, 2, \dots$. Обозначим через T — сужение фактор-отображения $X \to X/E_1$ на E_3. Пользуясь тем, что $\overline{E_1 + E_3} = X \neq E_1 + E_3$, нетрудно установить,

* Как стало известно автору, эта теорема без свойства базисности последовательности $\{y_i\}$ недавно была доказана П. Теренци.

что $\overline{TE_3} = X/E_1$ и отображение T^{-1} неограничено. По лемме 3 существует базисная последовательность $\{y_i\} \subset E_3$ такая, что $\|t_i - Ty_i\| < \delta_i$. Полагая $v_i = Ty_i$, $i = 1, 2, \ldots$, получим, что $\{Ty_i\}$ — M-базис X/E_1, откуда следует, что $\{x_i\} \cup \{y_i\}$ M-базис X. Кроме того, если $\{y_i^*\} \subset E_1^{\perp}$ сопряженная система к $\{Ty_i\}$, то $\theta([y_i^*]_1^n, [u_i]_1^n) < 2^{-n}\gamma_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Возьмем теперь произвольный элемент $f \in S([x_i^*]_1^n + [u_i]_1^n)$, $f = x^* + u$, $x^* \in [x_i^*]_1^n$, $u \in [u_i]_1^n$. Так как $\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma_n}$ и существует элемент $v \in [y_i^*]_1^n$ такой, что $\left\|\frac{u}{\|u\|} - v\right\| < 2^{-n}\gamma_n$, то $\|f - (x^* + \|u\| v)\| = \|u\| \left\|\frac{u}{\|u\|} - v\right\| \leqslant 2^{-n}$. Но элемент $x^* + \|u\| v \in [x_i^*]_1^n + [y_i^*]_1^n$ и, следовательно, $[\{x_i^*\}_1^\infty, \{y_i^*\}_1^\infty] \supset [\{x_i^* + u_i\}_1^\infty]$, откуда следует, что $\{x_i\} \cup \{y_i\}$ — операторный базис ($[x_i^* + u_i]$ нормирующее подпространство, значит и $[x_i^*, y_i^*]_1^\infty$ — нормирующее). Теорема доказана.

Как замечено И. Зингером ([3], с. 234), не всегда возможно так расширить M-базис $\{x_i\}$ подпространства E_1 элементами $\{y_i\}$ из заданного квазидополнения E_2, чтобы $[y_i] = E_2$. С другой стороны, согласно одному результату В. Г. Винокурова ([5], с. 123) всегда существует M-базис $\{x_i\} \cup \{y_i\}$ всего пространства, что $[x_i] = E_1$, $[y_i] = E_2$. Следующее предложение суммирует результаты в этом направлении, касающиеся операторных базисов.

Предложение. *Пусть сепарабельное банахово пространство X есть квазипрямая сумма своих подпространств E_1 и E_2 (т. е. $E_1 \cap E_2 = 0$, $E_1 \dotplus E_2 = X \neq E_1 + E_2$). Пусть далее $P_1 : E_1 \dotplus E_2 \to E_1$ проектор из $E_1 \dotplus E_2$ на E_1 параллельно E_2, $P_2 = I - P_1$, $Y = (E_1 \oplus E_2)_{l_1}$ и T — естественное вложение пространства Y в X. Следующие утверждения эквивалентны.*

1) *P_1 и P_2 — отображения первого класса Бэра (норма на $E_1 \dotplus E_2$ индуцирована пространством X);*

2) *T^{-1} — отображение первого класса Бэра;*

3) *$E_1^{\perp} + E_2^{\perp}$ — нормирующее линейное многообразие;*

4) *$E_1^{\perp}|_{E_2}$ и $E_2^{\perp}|_{E_1}$ — нормирующие линейные многообразия соответственно для E_2 и E_1;*

5) *одно из многообразий $E_1^{\perp}|_{E_2}$ или $E_2^{\perp}|_{E_1}$ нормирующее;*

6) *существуют операторные базисы $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ подпространств E_1 и E_2 такие, что $\{x_i\} \cup \{y_i\}$ M-базис X;*

7) *существуют операторные базисы $\{x_i\}$ E_1 и $\{y_i\}$ в E_2 такие, что $\{x_i\} \cup \{y_i\}$ — операторный базис пространства X.*

Доказательство. Обозначим через Q_1 и Q_2 проекторы из Y на E_1 и E_2 соответственно параллельно E_2 и E_1. Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) следует из равенств $P_i = TQ_iT^{-1}$, $i = 1, 2$; $T^{-1} = T^{-1}|_{E_1}P_1 + T^{-1}|_{E_2}P_2$. Импликации 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) очевидны. Для доказательства 5) $\Rightarrow$ 3) заметим, что линейное многообразие $E_1^{\perp} + E_2^{\perp} = (T|_{E_1})^{*-1} \times (E_2^{\perp}|_{E_1})$ является нормирующим как прообраз нормирующего линейного многообразия $E_2^\perp | E_1$. Докажем 4) $\Rightarrow$ 2). Для этого достаточно проверить ([6], с. 188), что T^*X^* нормирующее линейное многообразие. Однако $T^*X^* \supset E_1^\perp | E_2 + E_2^\perp | E_1$, что и влечет нормируемость T^*X^*. Прежде чем доказывать 1) $\Rightarrow$ 5) обозначим через φ_1 сужение фактор-отображения $X \to X/E_1$ на E_2. Для доказательства 1) $\Rightarrow$ 5) достаточно проверить ([6], с. 188), что φ_1^{-1} отображение первого класса Бэра. Пусть непрерывные отображения $f_n : E_1 + E_2 \to E_2$, $(n = 1, 2, \ldots)$ таковы, что для всех $x \in E_1 + E_2$ $\lim f_n(x) = P_2 x$ и ψ — непрерывный селектор для фактор-отображения $q_1 : X \to X/E_1$, т. е. для всех $x \in X$ $q_1 \psi_1 q_1(x) = x$. Тогда для всех $x \in E_2$ $\lim f_n \psi_1 \varphi_1(x) = x$, откуда следует, что φ_1^{-1} — первого класса Бэра. Импликации 7) $\Rightarrow$ 6) и 6) $\Rightarrow$ 4) очевидны. Докажем 3) $\Rightarrow$ 7). Выберем последовательность $\{u_n\} \subset E_1^\perp + E_2^\perp$, $u_n = v_n + w_n$, $v_n \in E_1^\perp$, $w_n \in E_2^\perp$, обладающую следующими свойствами:

$$\text{а)}\ \dim [u_i]_1^n = \dim [v_i]_1^n = \dim [w_i]_1^n = n;$$

$$\text{в)}\ \mathrm{Lin}\,\{u_i\}_1^\infty \text{ — нормирующее многообразие.}$$

Так как $E_1^\perp \cap E_2^\perp = 0$, то из а) следует, что

$$\dim [v_i]_1^n |_{E_2} = \dim [w_i]_1^n |_{E_1} = n$$

и по теореме 1,6 ([5], с. 122) существуют полные минимальные системы $\{x_i\}$ в E_1 и $\{y_i\}$ в E_2 с сопряженными $\{x_i^*\} \subset E_1^*$ и $\{y_i^*\} \subset E_2^*$ такими, что

$$[x_i^*]_1^n = [w_i]_1^n |_{E_1} \quad \text{и} \quad [y_i^*]_1^n = [v_i]_1^n |_{E_2}.$$

Пусть $\hat{x}_i^* \in E_2^\perp$ и $\hat{y}_i^* \in E_1^\perp$ продолжения функционалов x_i^* и y_i^*, $(i = 1, 2, \ldots)$, тогда $[\hat{x}_i^*]_1^n = [w_i]_1^n$ и $[\hat{y}_i^*]_1^n = [v_i]_1^n$ и, следовательно, по свойству в) $[\hat{x}_i^*, \hat{y}_i^*]$ — нормирующее подпространство.

Таким образом, $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ — операторные базисы. Предложение доказано.

Следствие. *Пусть E_1 и E_2 квазидополнительные подпространства сепарабельного банахова пространства X, $P_1 : E_1 \dotplus E_2 \to E_1$, проектор из $E_1 \dotplus E_2$ на E_1 параллельно E_2, $P_2 = I - P_1$, причем P_1 и P_2 — отображения не первого класса Бэра (скажем, второго). Тогда никакой операторный базис пространства E_1 не может быть дополнен до М-базиса X с помощью полной минимальной системы в E_2.*

Список литературы: 1. *Гапошкин В. Ф., Кадец М. И.* Операторные базисы в пространствах Банаха // Мат. сб. 1963. **61**, № 1. С. 3—12. 2. *Кадец М. И.* Нелинейные операторные базисы в пространстве Банаха // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1966. Вып. 2. С. 128—130. 3. *Singer I.* Bases in Banach Spaces, II. Berlin—Heidelberg—New-York. 1981. 668 p. 4. *Фонф В. П.* операторные базисы и обобщенные базисы суммирования // Докл. АН УССР. 1986. № 11. С. 16—18. 5. *Мильман В. Д.* Геометрическая теория пространства Банаха // Успехи мат. наук. 1970. **25**, № 3. С. 113—174. 6. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения. К., 1980. 216 с.

Поступила в редколлегию 25.01.88