УДК 517.535.4

А. Э. ЕРЕМЕНКО

ОБ ОТКЛОНЕНИЯХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО НИЖНЕГО ПОРЯДКА

Для мероморфной в конечной плоскости $\mathbf{C}$ функции f положим $\beta(a, f) = \varliminf_{r\to\infty} \ln M(r, (f-a)^{-1})/T(r, f)$, $a \neq \infty$; $\beta(\infty, f) = \varliminf_{r\to\infty} \ln M \times$ $\times (r, f)/T(r, f)$. Здесь и далее пользуемся стандартными обозначениями теории мероморфных функций [1].

Ряд работ последних лет посвящен изучению сходимости рядов $\sum_a \delta^\alpha(a, f)$, $\alpha < 1$ для мероморфных функций конечного нижнего порядка. Наиболее сильный результат в этом направлении принадлежит А. Вейцману [2], который доказал, что если f — мероморфная функция конечного нижнего порядка, то

$$\sum_a \delta^{1/3}(a, f) < \infty. \tag{0.1}$$

То, что ряд $\sum_a \delta^{1/3-\varepsilon}(a, f)$ может расходиться при любом $\varepsilon > 0$, показал У. Хейман [1, с. 150]. В работе [2] подробно изложена история вопроса. Величины $\beta(a, f)$ (они называются величинами отклонений) систематически изучались В. П. Петренко [3], который в частности доказал, что для функций конечного нижнего порядка выполняется $\sum_a \beta^{1/2}(a, f) \ln^{-1/2-\varepsilon} \frac{1}{\beta(a, f)} < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$ [4].

В настоящей статье доказывается следующая

Теорема. *Пусть f — мероморфная функция конечного нижнего порядка. Тогда* $\sum_a \beta^{1/2}(a, f) < \infty$ **(0.2).**

Гипотеза о справедливости этого соотношения была высказана в [3]. Сформулированная теорема была анонсирована Г. А. Барсегяном в Докл. АН Арм. ССР, 1978, 67, № 5. Согласно письменному сообщению Г. А. Барсегяна, в его доказательстве содержался пробел.

Из (0.2) легко вытекает (0.1). В самом деле, обозначим $\theta(r, a) = \operatorname{mes}\{\theta \in [0, 2\pi] : \ln|f(re^{i\theta}) - a|^{-1} \geqslant \ln r\}$, $a \in \boldsymbol{C}$. Для любого конечного набора $a_1, \ldots, a_q \in \boldsymbol{C}$ при достаточно больших r выполняется $\sum_j \theta(r, a_j) \leqslant 2\pi$. С другой стороны, легко видеть, что $\delta(a_j, f) \leqslant \theta(r, a_j)\beta(a_j, f) + o(1)$, $r \to \infty$. С помощью неравенства Гельдера получаем $\sum \delta^{1/3}(a, f) \leqslant (2\pi)^{1/3}\left(\sum \beta^{1/2}(a, f)\right)^{2/3}$. Поэтому из (0.2) следует (0.1).

Сформулированная теорема точна в следующем смысле. Во-первых, известны примеры мероморфных функций бесконечного нижнего порядка, у которых $\beta(a, f) > 0$ для несчетного множества чисел $a \in \boldsymbol{C}$ [3, с. 82]. Во-вторых, анализ известных примеров [3, с. 47] показывает, что для любой последовательности чисел (η_n), $\eta_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = 1$ найдется мероморфная функция нормального типа порядка 1, у которой $\beta(a_n, f) \geqslant \frac{1}{4}\eta_n^2$, где $(a_n) \subset \boldsymbol{C}$ — наперед заданная последовательность.

В п. 1 приведены необходимые вспомогательные результаты, п. 2 содержит доказательство теоремы.

1. ***Лемма 1.*** *Пусть f — мероморфная функция, $a \in \boldsymbol{C}$. Тогда*

$$\log^+\left|\frac{f'(z)}{f(z) - a}\right| = o(T(12|z|, f)), \ z \to \infty, \ |z| \notin I,$$

где множество $I \subset (0, \infty)$ таково, что $\operatorname{mes}(I \cap (0, r)) = o(r)$, $r \to \infty$.

Эта лемма представляет собой вариант леммы 1.4.1 из [3]. Простое доказательсто, основанное на дифференцировании формулы Шварца—Иенсена, опускаем.

Обозначим $D(R) = \{z : |z| < R\}$. Пусть $u \geqslant 0$ — разность двух субгармонических в $D(R)$ функций, непрерывная в $\overline{D}(R)$. Такие функции будем далее называть допустимыми. Обобщенный лапласиан Δu есть знакопеременная мера с разложением Жордана $\mu_u^+ - \mu_u^-$. Используем обозначения $M(r, u) = \max_\theta u(re^{i\theta})$; $n(r, u) = \mu_u^-(D(R))$;

$$N(r, u) = \int_0^r n(t, u)\frac{dt}{t}, \quad 0 \leqslant r \leqslant R.$$

Для допустимой функции u рассмотрим открытое множество $D = \{z \in D(R) : u(z) > 0\}$. Будем обозначать через $g(z, \zeta, D)$ функцию, определенную следующим образом. Если z лежит в той же компоненте D, что и ζ, то $g(z, \zeta, D)$ есть (положительная) функция Грина этой компоненты с полюсом в точке ζ. Во всех остальных случаях $g(z, \zeta, D) = 0$. Обозначим через $u(., D)$ функцию, гармоническую в D, $u(z, D) = u(z)$, $z \in \bar{D}(R) \setminus D$. Для допустимой функции u в $\bar{D}(R)$ справедливо представление Рисса $u(z) = u(z, D) + \int_D g(z, \zeta, D)\, d(\mu_u^- - \mu_u^+)$ **(1.1).**

Обозначим через D^* круговую симметризацию открытого множества D, т. е. такое открытое множество, что $\operatorname{mes}\{D \cap \{z : |z| = r\}\} = \operatorname{mes}\{D^* \cap \{z : |z| = r\}\}$, причем $D^* \cap \{z : |z| = r\}$ есть либо вся окружность, либо дуга, середина которой лежит на положительном луче. Для любой измеримой функции φ на $[-\pi, \pi]$ определим симметризацию φ^* как монотонно убывающую функцию от $|\theta|$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, причем для любого $t \in \boldsymbol{R}$ $\operatorname{mes}\{\theta : \varphi(\theta) > t\} = \operatorname{mes}\{\theta : \varphi^*(\theta) > t\}$. Определим функцию $u^*(., D^*)$ так: $u^*(., D^*)$ гармоническая в D^* и равна 0 в $D(R) \setminus D^*$; $u^*(Re^{i\theta}, D^*) = (u(Re^{i\theta}))^*$. Функция $u^*(., D^*)$ допустимая.

Лемма 2. 1°. *Если u допустимая функция в $\bar{D}(R)$*, $D = \{z \in D(R) : u(z) > 0\}$, то $M(r, u(., D)) \leqslant M(r, u^*(., D^*)) = u^* \times (r, D^*)$; $0 \leqslant r \leqslant R$; 2°. $M(r, g(., \zeta, D)) \leqslant M(r, g(., |\zeta|, D^*)) = g(r, |\zeta|, D^+)$, $0 \leqslant r \leqslant R$. Утверждение 1° вытекает из теоремы 7 А. Бернштейна [5]; утверждение 2° представляет собой теорему 5 из той же статьи.

Обозначим через $c(\mu)$ круговую проекцию меры μ на положительный луч. Из леммы 2 вытекает

Лемма 3. *Пусть допустимая функция и имеет вид* (1.1). *Тогда* $M(r, u) \leqslant M(r, u^*) = u^*(r)$, $r \leqslant R$; $n(r, u) = n(r, u^*), r < R$ **(1.2)**, где $u^*(z) = u^*(z, D^+) + \int_{D^*} g(z, \zeta, D^*)\, dc(\mu_u^-)$.

Заметим, что $u^* = 0$ в $D(R) \setminus D^*$, u^* супергармоническая в D^* и субгармоническая вне положительного луча.

Лемма 4. *Пусть* u — *допустимая функция*, $\overline{\lim\limits_{|z| \to R}}\, u(z) \leqslant 1$ **(1.3)**, $\mu_u^-(D) < \infty$ **(1.4)**. *Положим* $v(z) = \min\{u(z), 2\}$. *Тогда* $n(R, v) = n(R, u)$.

Доказательство. Пусть $D_1 = \{z \in D : u(z) > 2\}$. В силу .3) и того, что $u(z) = 0$, $z \in \partial D \cap D(R)$, выполняется $\overline{D}_1 \subset D$. Возьмем открытое множество D_2 с гладкой границей Г, $\overline{D}_1 \subset D_2$, $\overline{D}_2 \subset D$.

Очевидно, что $u(z) = v(z)$ в окресности Г. По теореме Грина

$$\mu_v^-(D_2) = \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial n} ds = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} ds = \mu_u^-(D_2). \tag{1.5}$$

В $D(R) \setminus D_1$ выполняется $u(z) = v(z)$, поэтому $\mu_v^-(D(R) \setminus D_2) = \mu_u^-(D(R) \setminus D_2)$, что вместе с (1.5) доказывает лемму.

Лемма 5. Пусть (v_k) — *последовательность допустимых функций со свойствами* $n(R, v_k) \leqslant A$ [A *не зависит от* k] **(1.6)**, $v_k(r) \geqslant \varkappa > 0$, $R/8 \leqslant r \leqslant R$, $r \notin X_k$ **(1.7)**, $\operatorname{mes} X_k \to 0$, $k \to \infty$, $\varkappa$ *не зависит от* k. *Тогда при достаточно больших* k *выполняется* $M(r, v_k) \geqslant \varkappa/2$, $R/4 \leqslant r \leqslant R/2$.

Доказательство. Доказываем лемму от противного. Пусть выполняются (1.6), (1.7) и найдется последовательность $r_k \in [R/4, R/2]$ такая, что $M(r_k, v_k) < \varkappa/2$ **(1.8)**. Рассмотрим новую последовательность функций $w_k(z) = \frac{2}{\varkappa}\left(v_k\left(\frac{r_k}{2}z\right) - \frac{\varkappa}{2}\right)^+$. Из (1.8), (1.7), (1.6) следует, что $w_k(2e^{i\theta}) = 0$ **(1.9)**; $w_k(r) \geqslant 1$, $1 \leqslant r \leqslant 2$, $r \notin Y_k$, $\operatorname{mes} Y_k \to 0$, $k \to \infty$ **(1.10)**; $n(3, w_k) \leqslant A$ **(1.11)**.

Можно, не уменьшая общности, предполагать, что w_k гармонические в области $G = D(2) \setminus [1,2]$. В самом деле, если заменить w_k в G на решение задачи Дирихле с граничными данными w_k, то условия (1.9) — (1.11) не нарушатся. Далее предполагаем, что w_k гармонические в G. Будем обозначать через $\omega(z, \alpha)$ гармоническую меру дуги $\alpha \in \partial G$ в области G. Для любой непрерывной функции u положим $E(r, u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta$. Из (1.10) следует, что $w_k(z) \geqslant \omega(z, ([1,2] \setminus Y_k) = \omega(z, [1,2]) - \omega(z, Y_k) = \omega_1(z) - \omega_{2,k}(z)$, $|z| < 2$. Для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $\omega_{2,k}(z) \to 0$, $k \to \infty$ равномерно по z при $\varepsilon \leqslant |\arg| \leqslant \pi$. Поэтому $E(r, \omega_{2,k}) \to 0$ равномерно при $0 \leqslant r \leqslant 2$. Следовательно, равномерно по r выполняется $E(r, w_k) \geqslant E(r, \omega_1) + o(1)$, $k \to \infty$ **(1.12)** Для $\omega_1(z)$ имеется явное выражение $\omega_1(z) = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{2 - |\zeta|}{|2 - \zeta|}$, $\zeta = \frac{4(z-1)}{4-z}$. Несложным прямым вычислением получаем отсюда, что $\lim\limits_{r \to 2-0} \frac{rd}{dr} E(r, \omega_1) = -\infty$ **(1.13)**. Из (1.9) следует, что $E(2, w_k) = 0$. Учитывая (1.12), (1.13), получим, что $\lim\limits_{k \to \infty} \lim\limits_{r \to 2-0} \frac{rd}{dr} E(r, w_k) = -\infty$. Однако по формуле Грина с учетом (1.11) получаем, что при $r < 2\frac{rd}{dr} E(r, w_k) = n(r, -w_k) -$

$-n(r, w_k) \geqslant -n(r, w_k) \geqslant -n(3, w_k) \geqslant -A$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Пусть в кольце $\{z: 1 < |z| < 2\}$ имеются две простые жордановы кривые Γ_1, Γ_2, соединяющие окружности кольца. Обозначим через S один из криволинейных четырехугольников, ограниченных этими кривыми и дугами окружностей кольца. Область S единственным образом можно отобразить конформно и однолистно на некоторый прямоугольник $Q = \{\zeta = \xi + i\eta : |\xi| < 2, \ |\eta| < \delta\}$ так, чтобы кривые Γ_1, Γ_2 перешли в горизонтальные стороны $|\eta| = \pm\delta$, а дуги окружностей — в вертикальные стороны.

Лемма 6. *Справедливо соотношение $\delta \leqslant 2|S| \leqslant 6\pi$, где $|S|$ — площадь области S.*

Это вариант известной леммы Греча.

Доказательство. Пусть $\varphi: Q \to S$ — отображающая функция. Тогда $1 \leqslant \int_{-2}^{2} |\varphi'|\, d\xi, \quad 1 \leqslant 4 \int_{-2}^{2} |\varphi'|^2 d\xi, \ 2\delta \leqslant 4 \int_{-2}^{2} |\varphi'|^2 d\xi d\eta = 4|S|$, что и требовалось доказать.

Пусть $w(\zeta)$ — супергармоническая функция, непрерывная в $\bar{Q}$, $0 \leqslant w(\pm 2 + i\eta) \leqslant 2$, $|\eta| < \delta$; $w(\xi \pm i\delta) = 0$, $|\xi| < 2$, $\delta < 6\pi$.

Лемма 7. *Пусть $M(\xi) = \max_{\eta} w(\xi + i\eta) \geqslant \varkappa > 0$, $|\xi| < 1$. Тогда $\varkappa \leqslant A(\delta\mu_{\bar{w}}(Q) + \delta^2)$, где A — абсолютная постоянная.*

Доказательство. Представим w в виде суммы гармонической в Q функции h и потенциала Грина p. Если $|\xi| \leqslant 1$, нетрудно получить оценку $h(\zeta) \leqslant A_1 \exp(-A_2/\delta) \leqslant A_3\delta^2$, $\operatorname{Re}\zeta = \xi$ (1.14), где A_1, A_2, A_3 — абсолютные постоянные.

Для потенциала имеем $p(\zeta) = \int_Q g(\zeta, t, Q)\, d\mu_{\bar{w}} \leqslant \int_Q g(\xi, \operatorname{Re} t, Q)\, d\mu_{\bar{w}}$, где g — функция Грина. Обозначим через $\Pi(\delta)$ горизонтальную полосу $\{\zeta : |\operatorname{Im}\zeta| < \delta\}$ и положим $M_1(\xi) = \max_{\eta} p(\xi + i\eta)$. Имеем

$$\int_{-1}^{1} M_1(\xi)\, d\xi \leqslant \int_{-1}^{1} d\xi \int_Q g(\xi, \operatorname{Re} t, \ \Pi(\delta))\, d\mu_{\bar{w}} \leqslant$$

$$\leqslant \int_Q d\mu_{\bar{w}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, 0, \Pi(\delta))\, d\xi = \delta\mu_{\bar{w}}(Q) \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, 0, \Pi(1))\, d\xi, \quad (1.15)$$

потому что $g(\delta\xi, 0, \Pi(1)) = g(\xi, 0, \Pi(\delta))$. Последний интеграл в (1.15), очевидно, сходится и представляет собой абсолютную постоянную. Из (1.14), (1.15) получаем

$$\varkappa \leqslant \int_{-1}^{1} M(\xi)\, d\xi \leqslant A_3\delta^2 + \int_{-1}^{1} M_1(\xi)\, d\xi \leqslant A(\delta\mu_{\bar{w}}(Q) + \delta^2),$$

что и требовалось доказать.

2. Доказательство теоремы. Не уменьшая общности, можно считать, что $f(0)=1$, и что $\bar{N}(r,f)\sim T(r,f)$, $r\to\infty$, следовательно, $2T(r,f)\leqslant T(r,f')\leqslant 2T(2r,f)=2T(2r)$. Известно [3, с. 64], что для функций конечного нижнего порядка ряд $\sum_a \beta(a,f)$ сходится, поэтому при доказательстве можно считать, что числа $\beta(a)=\beta(a,f)$ достаточно малы. Далее, если нижний порядок λ функции f равен 0, то соотношение $\beta(a,f)>0$ может выполняться не более, чем для одного значения $a\in\boldsymbol{C}$ [3, с. 69]. Поэтому далее считаем, что $\lambda>0$.

Найдутся последовательности $r_m\to\infty$, $S_m\to\infty$ такие, что $T(Sr_m)\leqslant S^{\lambda+1}T(r_m)$, $1\leqslant S\leqslant S_m$. **(2.1).**

Доказательство теоремы разобьем на несколько этапов.

1°. По теореме А. Картана [1, с. 26] и (2.1)

$$\int_0^{2\pi} n\left(4r_m, \frac{1}{f'-te^{i\varphi}}\right)d\varphi\leqslant\int_0^{2\pi} N\left(12r_m, \frac{1}{f'/t-e^{i\varphi}}\right)\,d\varphi+\mathrm{const}\leqslant$$

$$\leqslant\log^+\frac{1}{t}+(2+o(1))\,T(24r_m)\leqslant A\left(\log^+\frac{1}{t}+T(r_m)\right).\ \forall t>0.$$

Здесь и далее через A обозначаем различные постоянные, зависящие только от λ. Обозначим через $l(t)$ суммарную длину линий уровня $|f'(z)|=t$ в круге $D(4r_m)$. Положим $\gamma_1=\exp(-T(r_m))$, $\gamma_2=\gamma_1/2$. Согласно принципу длины и площади [6, с. 26] выполняется

$$\int_{\gamma_2}^{\gamma_1}\frac{l^2(t)\,dt}{t}\leqslant Ar_m^2\left(\log^+\frac{1}{\gamma_2}+T(r_m)\right).$$

Поэтому найдется α_m, $\sqrt{T(r_m)}\leqslant\alpha_m\leqslant\sqrt{T(r_m)}+\log 2$ такое, что $l(e^{-\alpha_m})\leqslant Ar_m\sqrt{T(r_m)}$ **(2.2)**. Фиксируем конечный набор точек $a_1,\ldots,a_q\in\boldsymbol{C}$, $q\geqslant 2$, $\min\{|a_i-a_j|:i\neq j\}=c>0$, $\beta(a_j,f)>0$. Рассмотрим множество $G_m=\{z:|z|<4r_m,\ \log|f'(z)|<-\alpha_m\}$. Пусть G_{jm}, $1\leqslant j\leqslant q$ — открытое множество, образованное теми компонентами G_m, в каждой из которых найдется точка z_1, в которой $|f(z_1)-a_j|<c/4$ **(2.3)**. Тогда всюду в G_{jm} выполняем $|f(z)-a_j|<c/2$ **(2.4)**. В самом деле, пусть $z\in G_{jm}$. В той же компоненте, что и z найдется точка z_1, для которой справедливо (2.3). В силу (2.2) найдем кривую $\Gamma\subset G_{jm}$, соединяющую z с z_1, причем длина Γ не превосходит $Ar_m\sqrt{T(r_m)}$. На указанной кривой, как и всюду в G_m, выполняем $|f'(z)|\leqslant\exp(-\alpha_m)\leqslant\exp(-\sqrt{T(r_m)})$. Поэтому, учитывая, что $\lambda>0$, получаем $|f(z)-f(z_1)|\leqslant\leqslant\int_\Gamma|f'(z)||dz|\leqslant A\exp(-\sqrt{T(r_m)})\,r_m\sqrt{T(r_m)}=o(1)$, $m\to\infty$, и из (2.3) следует (2.4). В частности, G_{jm} попарно не пересекаются.

2°. В силу леммы 1 и (2.1) найдем множество $I_m \subset \left[\frac{r_m}{2}, 4r_m\right]$, $\operatorname{mes} I_m = o(r_m)$, $m \to \infty$, такое, что

$$\log^+ \left|\frac{f'(z)}{f(z)-a_j}\right| = o(T(r_m)),\ m \to \infty, \tag{2.5}$$

$1 \leqslant j \leqslant q$, $|z| \in [r_m/2, 4r_m] \setminus I_m$. Покажем, что для любого $r \in [r_m/2, 4r_m] \setminus I_m$ найдется точка z, $|z| = r$ такая, что $z \in G_{jm}$ и $\log|f'(z)| < -A\beta(a_j)T(r_m)$ **(2.6)** В самом деле, поскольку $\beta(a_j) > 0$, для любого $r \in [r_m/2, 4r_m]$ найдется точка z, $|z| = r$ такая, что $\log|f(z) - a_j| < -\frac{1}{2}\beta(a_j)T(r) \leqslant -A\beta(a_j)T(r_m)$ **(2.7)**. Отсюда и из (2.5) вытекает справедливость (2.6) для некоторой точки z. По определению G_m эта точка содержится в G_m. Наконец, в силу (2.4), она содержится именно в G_{jm}.

Заметим, что множество G_{jm} не может содержать ни одной окружности $\{z : |z| = r\}$. Этот важный для дальнейшего факт следует из (2.4), (2.7) и того, что $q \geqslant 2$.

3°. По теореме Дж. Майлза [7] мероморфную функцию $1/f'$ можно представить в виде отношения двух целых функций g_1, g_2 так, что $T(r, g_j) \leqslant A_1 T(A_2 r)$, $j = 1,2$; A_1, A_2 — абсолютные постоянные. Воспользовавшись этой теоремой и известной оценкой максимума модуля целой функции через характеристику, получим $-\log|f'(z)| = t_1(z) - t_2(z)$, t_1, t_2 — субгармонические функции, $t_j(z) \leqslant AT(r_m)$, $|z| < 12r_m$ **(2.8)**. Положим $t_1^* = \max(t_1, t_2 + \alpha_m)$; $t_2^* = \max(t_1 - T(r_m), t_2 + \alpha_m)$; $y_m(z) = (T(r_m)^{-1}) \times (t_1^*(r_m z) - t_2^*(r_m z))$, $z \in D(4)$. Через D_{jm}, D_m, X_m обозначим такие множества, что $r_m D_{jm} = G_{jm}$; $r_m D_m = G_m$; $r_m X_m = I_m$. Нетрудно видеть, что $y_m(z) = 0$, если $z \in D(4) - D_m$; $y_m(z) = 1$, если $\log|f'(r_m z)| \leqslant -T(r_m) - \alpha_m$; $y_m(z) = T(r_m)^{-1}(-\log|f'(r_m z)| - \alpha_m)$ в остальных случаях. Поэтому $0 \leqslant y_m \leqslant 1$, $z \in \bar{D}(4)$ **(2.9)**, а из (2.6) следует:

$$\max_{|z| = r,\ z \in D_{jm}} y_m(z) \geqslant A\beta(a_j),\ r \notin X_m,\ 1/2 \leqslant r \leqslant 4. \tag{2.10}$$

Здесь и всюду далее в аналогичных неравенствах предполагается $A\beta(a_j) < 1$. В силу (2.8) получаем $n(4, y_m) = T(r_m)^{-1} n(4r_m, -t_2^*) \leqslant (Tr_m)^{-1} N(12r_m, -t_2^*) \leqslant T(r_m)^{-1} M(12r_m, t_2^*) \leqslant A$ **(2.11)**, где A не зависит от m.

Положим теперь

$$u_{jm} = \begin{cases} y_m(z), & z \in D_{jm}, \\ 0, & z \in D(4) \setminus D_{jm}. \end{cases}$$

Из (2.10) следует, что $M(r, u_{jm}) \geqslant A\beta(a_j)$, $\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant 4$, $r \notin X_m$ **(2.12)**, а из (2.9) — что $0 \leqslant u_{jm} \leqslant 1$, $z \in \bar{D}(4)$ **(2.13)**. Положим $p_{jm} = n(4, u_{jm})$ Из (2.11) получаем

$$\sum_{j=1}^{q} p_{jm} \leqslant n(4, y_m) \leqslant A. \tag{2.14}$$

Функции u_{jm} удовлетворяют условиям леммы 3 (в качестве D берем D_{jm}, $R = 4$). Согласно этой лемме получаем функции u_{jm}^* и области D_{jm}^*, которые удовлетворяют условиям $M(r, u_{jm}^*) \geqslant A\beta(a_j)$, $1/2 \leqslant r \leqslant 4$, $r \notin X_m$ **(2.15)**; $n(4, u_{jm}^*) \leqslant p_{jm} \leqslant A$ **(2.16)**; $\overline{\lim\limits_{|z| \to 4}}\ u_{jm}^*(z) \leqslant 1$ **(2.17)**; $u_{jm}^*(z) = 0$, $z \in D(4) \setminus D_{jm}^*$ **(2.18)**. Неравенство (2.15) следует из (2.12) и леммы 3; неравенство (2.16) — из (1.2); (2.17) — из (2.13); а (2.18) — из замечания после леммы 3. В силу (2.15), (2.16) выполняются условия леммы 5 ($R = 4$), которая позволяет заменить (2.15) на $M(r, u_{jm}^*) \geqslant A\beta(a_j)$, $1 \leqslant r \leqslant 2$ **(2.19)**.

Рассмотрим теперь функции $v_{jm} = \min(u_{jm}^*, 2)$. Из (2.19) получаем $M(r, v_{jm}) \geqslant A\beta(a_j)$, $1 \leqslant r \leqslant 2$ **(2.20)**. В силу (2.16), (2.17), (2.18) выполняются условия (1.3), (1.4) леммы 4. Эта лемма дает $n(4, v_{jm}) \leqslant p_{jm}$ **(2.21)**.

Заметим теперь, что поскольку области D_{jm} попарно не пересекаются, то

$$\sum_{j=1}^{q} |D_{jm}^*| = \sum_{j=1}^{q} |D_{jm}| \leqslant 16\pi. \tag{2.22}$$

Далее, ни одна область D_{jm} не содержит окружности с центром в нуле, что следует из замечания в конце 2°. Поэтому области D_{jm}^* также не содержат таких окружностей. Из (2.20), (2.18) вытекает, что $[1, 2] \subset D_{jm}^*$, следовательно, множества $S_{jm} = D_{jm}^* \cap \cap \{z : 1 < |z| < 2\}$ связны. Легко видеть, что S_{jm} — односвязные области.

Отобразим каждую область S_{jm} конформно и однолистно на прямоугольник $Q_{jm} = \{\zeta = \xi + i\eta : |\xi| < 2;\ |\eta| < \delta_{jm}\}$, как это требуется в лемме 6. Согласно этой лемме $\delta_{jm} \leqslant 2|S_{jm}| \leqslant 2|D_{jm}^*|$ **(2.23)**. Пусть $\varphi_{jm} : Q_{jm} \to S_{jm}$ конформное и однолистное отображение, обратное к указанному. Рассмотрим суперпозицию $w_{jm}(\zeta) = v_{jm}(\varphi_{jm}(\zeta))$. В силу определения v_{jm} выполняется $0 \leqslant w_{jm} \leqslant 2$; $w_{jm}(\xi + i\delta_{jm}) = 0$; в силу (2.21) имеем $\mu_{w_{jm}}^-(Q_{jm}) \leqslant p_{jm}$ **(2.24)**, а в силу (2.20) $\max\limits_{\eta} w_{jm}(\xi + i\eta) \geqslant A\beta a_j)$, $|\xi| < 2$. По лемме 7 (с $\varkappa = A\beta(a_j)$) получаем с учетом (2.24), (2.23) $\beta(a_j) \leqslant A(\delta_{jm}p_{jm} + \delta_{jm}^2) \leqslant 4A(|D_{jm}^*|p_{jm} + |D_{jm}^*|^2)$. Отсюда, используя (2.14), (2.22) и элементарные неравенства, выводим, что $\sum\limits_{j=1}^{q} \beta^{1/2}(a_j) \leqslant A \sum\limits_{j=1}^{q} |D_{jm}| + \sum\limits_{j=1}^{q} p_{jm}) \leqslant A$.

Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Хейман У.* К Мероморфные функции. —М.: Мир, 1966. —287 с. 2. Weitsman A. A theorem on Nevanlinna deficiencies. Acta math., 1972, 128, № 1—2, p. 41—52.
3. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций. — X.: Вища школа, 1978. — 135 с. 4. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка. — Математика, 1969, 33, № 2, с. 414 — 454. 5. Baernstein A. Integral means, univalent functions and circular symmetrization. Acta math., 1975, 133, № 3—4, p. 139—169. 6. *Хейман У. К.* Многолистные функции.— М.: ИЛ, 1960.—179 с. 7. Miles J. B. Quotient representations of meromorphic functions. J. d'Analyse math, 1972, 25, p. 371—388.

Поступила в редколлегию 22.01.82