УДК 517.9

*В. С. ЗАЯЧКОВСКИЙ, А. А. ПАНКОВ*

# СЛАБАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ФАКТОРИЗАЦИЙ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

В конечномерном комплексном пространстве $E$ рассмотрим полиномиальный операторный пучок $A(z) = z^n - 1_E + z^{n-1}A_1 + \cdots + A_n$. Факторизацией пучка $A(z)$ называется его представление в виде $A(z) = B(z)C(z)$. Пространство $P_n$ пучков степени $n$ с единичным старшим коэффициентом очевидным образом отождествляется с пространством $L(E)^n$ и, тем самым, наделяется естественной метрикой и комплексной структурой.

Введем отображение $m: P_k \times P_l \to P_n$, $n = k + l$, действующее по формуле $(B(z), C(z)) \mapsto B(z)C(z)$. Очевидно, что слой $m^{-1}(A)$, $A \in P_n$, состоит из всевозможных факторизаций пучка $A(z)$, у которых степень правого делителя равна $l$.

Представляет интерес исследование устойчивых в том или ином смысле факторизаций. Наиболее сильное понятие устойчивости изучалось в работах [1, 2]: факторизация называется устойчивой, если отображение $m$ биголоморфно в некоторой окрестности точки $(B, C)$ (замена условия биголоморфности условием липшицевой гомеоморфности [3] или даже просто гомеоморфности в силу известных результатов (см. [4], с. 290) не дает ничего нового).

Более слабое понятие устойчивости рассматривалось в [5, 6]. Факторизация $A = BC$ называется слабо устойчивой, если для любого пучка $A$, близкого к $A$, имеется (не обязательно единственная) факторизация $\tilde{A} = \tilde{B}\tilde{C}$, где пучки $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ близки к $B$ и $C$ соответственно. Это равносильно открытости отображения $m$ в точке $(B, C)$ (определение отображения, открытого в точке, см. в [7]).

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые сведения об операторных пучках и их факторизациях. Каждому операторному пучку каноническим образом можно сопоставить линейный оператор

$$F_A = \begin{bmatrix} 0 & 1_E & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 1_E \\ -A_n & \dots & & -A_1 \end{bmatrix},$$

действующий в пространстве $E^n$. Этот оператор наследует все спектральные свойства пучка $A(z)$. Каждому левому делителю $C(z)$ (а, следовательно, и факторизации) пучка $A(z)$ ставится в соответствие инвариантное подпространство $\varphi(C)$ оператора $F_A$, которое задается явно через коэффициенты пучка $C(z)$ [8]. При этом спектральные свойства пучка $C(z)$ такие же, как и у оператора $F_A|_{\varphi(C)}$. Множество всех инвариантных подпространств оператора $F$ обозначим через $\operatorname{Lat} F$; оно является проективным алгебраическим многообразием.

**Теорема 1.** *Следующие условия эквивалентны:*

а) *факторизация* $A(z) = B(z)C(z)$ *слабо устойчива;*

б) $(B, C)$ — *изолированная точка слоя* $m^{-1}(A)$;

в) *подпространство* $\varphi(C)$ *является изолированной точкой в* $\operatorname{Lat} F_A$;

г) *каждому общему собственному значению пучков* $B(z)$ и $C(z)$ *отвечает единственный собственный вектор пучка* $A(z)$.

Доказательство. Импликация б) $\Rightarrow$ а) вытекает из фундаментального принципа открытости Зарисского [7].

Отображение Лангера задает изоморфизм $\varphi$ аффинного алгебраического многообразия $m^{-1}(A)$ в $\operatorname{Lat} F_A$. Отсюда вытекает эквивалентность б) и в).

Простые доказательства импликаций а) $\Rightarrow$ г) и в) $\Rightarrow$ г) см. в [5]. Докажем импликацию г) $\Rightarrow$ в). Пусть $L = \varphi(C)$, а $\tilde{L}$ — инвариантное подпространство $F_A$, близкое к $L$. Тогда характеристические многочлены $\chi(F_A|_L)$ и $\chi(F_A|_{\tilde{L}})$ совпадают. Действительно, характеристический многочлен непрерывно зависит от оператора, а $\chi(F_A|_L)$ необходимо делит $\chi(F_A)$. Отсюда и из условия г) следует, что спектральные типы операторов $F_A|_L$ и $F_A|_{\tilde{L}}$ совпадают. Действительно, перестройка спектрального типа может произойти только за счет распадения жордановых клеток, что запрещено условием г).

Таким образом, инвариантное подпространство $L = \varphi(C)$ вместе со своей окрестностью в $\operatorname{Lat} F_A$ целиком содержится в множестве $V \subset \operatorname{Lat} F_A$, состоящем из интервальных подпространств фиксированного спектрального типа. Этот спектральный тип однозначно определяется условием г): если $\nu = (n_1, n_2, \dots, n_p)$ — частные спектральные кратности собственного значения $z_0$ пучка $A(z)$, то либо точка $z_0$ не является собственным значением пучка $C(z)$ (тогда ее частные спектральные кратности $\lambda = (0, 0, \dots 0)$), либо $z_0$ — собственное значение пучка $C(z)$, частные спектральные кратности которого равны $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_p)$, если $n_2 > 0$, или же $\lambda = (n_0, 0, \dots, 0)$, если $\nu = (n_1, 0,$