
УДК 517.545:547.56

С. Д. БРОНЗА, В. Г. ТАИРОВА

**СУЩЕСТВОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
ЗАДАНОЙ РАЗВЕТВЛЕННОСТИ,
УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОДНОМУ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОМУ УСЛОВИЮ**

Пусть $F_\rho = F_\rho(n; a_1: \lambda_1(a_1), \dots, \lambda_{m_1}(a_1); \dots; a_q: \lambda_1(a_q), \dots, \lambda_{m_q}(a_q)) = F_\rho(n; a_1: \Lambda_1(a_1); \dots; a_q: \Lambda_q(a_q))$ — класс замкнутых римановых поверхностей (р. п. рода ρ , где $\Lambda_j = \sum_{k=1}^{m_j} \lambda_k(a_j)$ — суммарная

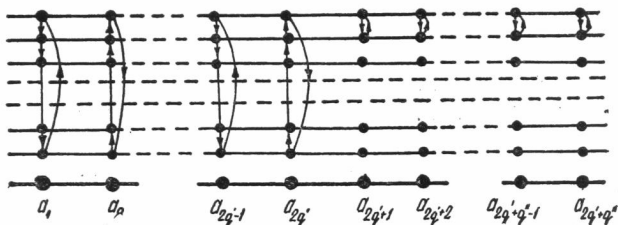
разветвленность р. п. класса F_ρ над базисной точкой a_j . Числа Λ_j должны удовлетворять соотношениям:

$$\sum_{j=1}^q \Lambda_j = \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^{m_j} \lambda_k(a_j) = 2(n-1) + 2\rho$$

(формула Римана — Гурвица), $\Lambda_j \leq n - m_j$, $j = \overline{1, q}$.

В [1, с. 468] показано, что для случая $\rho = 0$ выполнения формулы Римана — Гурвица является необходимым, но не достаточным условием существования компактной р. п. заданной разветвленности.

В этой работе мы даем достаточные условия существования классов F_ρ при дополнительных ограничениях, налагаемых на числа Λ_j . Для того чтобы сформулировать наш результат, определим на множестве монотонных разбиений (μ -разбиений) числа N на слагаемые



частичный порядок: μ' -разбиение считаем мельче μ -разбиения, если разбиение μ' может быть получено из разбиения μ разбиением элементов последнего на части.

Теорема. Класс римановых поверхностей $F_\rho = F_\rho(n; a_1: \Lambda_1; \dots; a_q: \Lambda_q)$ не пуст, если μ -разбиение числа $2(n-1) + 2\rho$: $\mu = (2(n-1) + 2\rho/\Lambda_1, \dots, \Lambda_q)$ мельче его μ_0 -разбиения:

$$\mu_0 = (2(n-1) + 2\rho/\underbrace{(n-1), \dots, (n-1)}_{2q'}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q'})$$

Доказательство. На совокупность чисел $\{\Lambda_j\}_1^q$ можно смотреть, как на μ -разбиение числа $2(n-1) + 2\rho$: $\mu = (2(n-1) + 2\rho/\Lambda_1, \dots, \Lambda_q)$.

Зафиксируем μ_0 -разбиение числа $2(n-1) + 2\rho$:

$$\mu_0 = (2(n-1) + 2\rho/\underbrace{(n-1), \dots, (n-1)}_{2q'}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q'})$$

Класс р. п., соответствующий μ_0 -разбиению числа $2(n-1) + 2\rho$, не пуст: профиль Π_0 , изображенный на рисунке, представляет р. п. этого класса. Пусть $\Pi_0 = \text{clos} \sum_{j=1}^{2q'+q''} G_j^0$. Очевидно, подстановки атомарных псевдопрофилей этого профиля таковы:

$$S(G_j^0) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}, & \text{если } j = 1, 3, \dots, 2q' - 1; \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}, & \text{если } j = 2, 4, \dots, 2q'; \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}, & \text{если } j = 2q' + 1, \dots, 2q' + q''. \end{cases}$$

Пусть теперь класс р. п. F_p соответствует μ -разбиению числа $2(n-1) + 2p$ и разбиение μ мельче разбиения μ_0 . Тогда

$$2(n-1) + 2p = \sum_{j=1}^q \Lambda_j = \sum_{m=1}^{2q'} \sum_{j=1}^{q_m} \Lambda_j^m + \underbrace{1 + \dots + 1}_{q'}$$

$$\sum_{j=1}^{q_m} \Lambda_j^m = n-1.$$

Согласно теореме Р. Тома [2], класс римановых поверхностей $F_0(n; a_1: \Lambda_1^m; \dots; a_q: \Lambda_q^m; a_{q_m+1}, n-1)$, $m = \overline{1, 2q'}$, не пуст. Пусть

$\Pi_m = \text{clos} \sum_{j=1}^{q_m+1} G_j^m$ — профиль р. п. этого класса. Без ограничения общности можно считать, что подстановка атомарного псевдопрофиля $G_{q_m+1}^m$ профиля Π_m такова:

$$S(G_{q_m+1}^m) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}, & \text{если } m = 1, \dots, 2q' - 1; \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}, & \text{если } m = 2, \dots, 2q', \end{cases}$$

ибо если это не так, то указанного положения над точкой $a_{q_m+1}^m$ можно добиться применением преобразований обмен и изменения нумерации сильных контуров профиля Π_m .

Заметим, что подстановка псевдопрофиля $\sum_{j=1}^{q_m} G_j^m$ совпадает с подстановкой атомарного псевдопрофиля G_m^0 :

$$S\left(\sum_{j=1}^{q_m} G_j^m\right) = S(G_{q_m+1}^m) = S(G_m^0).$$

Поэтому, произведя замену в профиле Π_0 атомарного псевдопрофиля G_m^0 псевдопрофилем $\sum_{j=1}^{q_m} G_j^m$, $m = \overline{1, 2q'}$, получим профиль р. п. из класса F_0 , фигурирующего в формулировке теоремы.

Следствие. Классы р. п. $F_0(n; a_1: \Lambda_1; \dots; a_q: \Lambda_q)$ не пусты, если $q \geq n$.

Пусть μ — разбиение числа $2(n-1)$ мельче его μ_0 -разбиения:

$$\mu_0 = (2(n-1)/(n-1), (n-1));$$

$$\mu = (2(n-1)/\Lambda_1^1, \dots, \Lambda_{q_1}^1, \Lambda_1^2, \dots, \Lambda_{q_2}^2) \sum_{j=1}^{q_m} \Lambda_j = n-1, \quad m = 1, 2.$$

Доказанная теорема обеспечивает существование классов п-листных замкнутых р. п., разветвленность которых определяется слагаемыми μ -разбиения числа $2(n-1)$. Следствие будет доказано, если мы покажем, что любое разбиение числа $2(n-1)$ на q слагаемых при $q \geq n$ мельче его μ_0 -разбиения.

