УДК 517.958

Р. Н. ДАВЫДОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕОСОБЫХ МЕДЛЕННО УБЫВАЮЩИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-де ФРИЗА. I

1. Ставший уже классическим метод интегрирования нелинейных уравнений в частных производных с помощью обратной задачи рассеяния (ОЗР) [1] позволяет найти решение задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$K[v(x, t)] \equiv \dot{v}_t + v'''_{xxx} - 6vv'_x = 0 \qquad (1)$$

с начальными данными $v_0(x) = v(x, 0)$, удовлетворяющими условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{3} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} v_0(x) \right| (1 + |x|)\, dx < \infty.$$

Функции, удовлетворяющие этому условию, мы будем называть быстро убывающими. Решения $v(x, t)$ таких задач тоже быстро убывают по x при всех $t \in (-\infty, \infty)$. В работе [2] методом ОЗР были найдены решения задачи Коши для уравнения КдФ в классе функций, быстро убывающих при $x \to +\infty$ и стремящихся к отрицательной константе при $x \to -\infty$.

Известны также частные решения уравнения КдФ, убывающие при $|x| \to \infty$, как $n(n+1)x^{-2}$. Это рациональные решения [3], [4] и решения, найденные в работе [5]. Однако эти медленно убывающие решения имеют при каждом $t \in (-\infty, \infty)$ вещественные полюсы по переменной x. Вопрос о существовании ограниченных решений уравнения КдФ в классе медленно убывающих функций до настоящего времени оставался открытым.

В предлагаемой статье мы найдем методом ОЗР ограниченные решения задачи Коши для уравнения КдФ с начальными данными $v(x, 0) = v_0(x)$, убывающими при $x \to \pm\infty$ соответственно как $n^\pm(n^\pm + 1)x^{-2}$, где n^+, n^- — произвольные натуральные числа.

В первой части исследуем случай $n^+ = 0$, n^- — произвольное натуральное число. Общий случай рассматривается во второй части.

2. **Метод обратной задачи рассеяния.** Обозначим через D множество вещественных функций из класса $C^\infty(\boldsymbol{R})$, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$, а через $D^-(x < a)$ (соответственно $D^+(x > b)$) множество вещественных бесконечно дифференцируемых на полуоси $-\infty < x < a$ $(b < x < \infty)$ функций, убывающих при $x \to -\infty$ $(x \to +\infty)$ вместе со своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$.

Рассмотрим уравнение Штурма—Лиувилля (Ш—Л) $\boldsymbol{L}[y] \equiv -y''_{xx} + q(x)y = \lambda^2 y$ $(-\infty < x < \infty)$ **(2)** с потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим условиям $q(x) \in D^+(x > -\infty)$, $q(x) - n(n+1)x^{-2} \in D^-(x < 0)$ **(3)**. Везде в дальнейшем для простоты мы будем предполагать, что оператор $\boldsymbol{L}$ не имеет дискретного спектра (общий случай сводится к этому с помощью преобразований Крума).

Определим специальные решения $e^\pm(\lambda, x)$ уравнения (2) асимптотиками $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^\pm(\lambda, x) e^{-i\lambda x} = 1$. При вещественных $\lambda \neq 0$ пара функций $e^-(\lambda, x)$, $e^-(-\lambda, x)$ образует фундаментальную систему решений.

Значит, $e^+(\lambda, x) = a(\lambda) e^-(\lambda, x) + b(\lambda) e^-(-\lambda, x)$ **(4)**. Матрица $S(\lambda) = \| s_{jk}(\lambda) \|_{j, k=1, 2}$, где $s_{11}(\lambda) = s_{22}(\lambda) = [a(\lambda)]^{-1}$; $s_{12}(\lambda) = b(\lambda)/a(\lambda)$; $s_{21}(\lambda) = -b(-\lambda)/a(\lambda)$ называется S-матрицей уравнения (2).

Обратную задачу рассеяния можно условно разделить на две части: а) восстановление потенциала $q(x)$ по известной S-матрице; б) отыскание необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять матрица $S(\lambda)$, для того чтобы она являлась S-матрицей некоторого уравнения (2) с потенциалом $q(x)$ вида (3).

Решение первой части задачи, как и в случае быстро убывающего потенциала, может быть получено с помощью следующей процедуры. Положим $R^+(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} s_{21}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$ и решим уравнение Марченко $K^+(x, y) + \int\limits_x^\infty K^+(x, s) R^+(s + y) ds = -R^+(x + y)$ $(y \geqslant x > -\infty)$ относительно функции $K^+(x, y)$. Потенциал $q(x)$ определяется по формуле $q(x) = -2\frac{d}{dx} K^+(x, x)$.

Вторая часть ОЗР более трудна. Не останавливаясь здесь на ее исследовании, мы приведем формулировку теоремы, полное доказательство которой для случая $n=1$ содержится в работе автора [6].

Теорема 1. *Для того, чтобы матрица $S(\lambda)$ была S-матрицей некоторого уравнения (2) с потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим условию (3), необходимо и достаточно выполнять следующие условия:*

I. Матрица $S(\lambda)$ унитарна, $s_{11}(\lambda)=s_{22}(\lambda)$; $\overline{s_{ij}(\lambda)}=s_{ij}(-\lambda)$.

II. Элементы матрицы $S(\lambda)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями, причем $s_{12}(\lambda)\in D$, $s_{21}(\lambda)\in D$.

III. Функция $s_{11}(\lambda)$ продолжается аналитически в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$, где она нигде не обращается в нуль; при $|z|\to\infty$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ $s_{11}(z)=1+O(|z|^{-1})$.

IV. При $\lambda\neq 0$ $|s_{12}(\lambda)|=|s_{21}(\lambda)|<1$.

V. При $\lambda\to 0$ $s_{12}(\lambda)=(-1)^{n+1}+\lambda^{2n}(\sigma_{2n}+\sigma_{2n+1}\lambda+\sigma_{2n+2}\lambda^2+ o(\lambda^2))$, причем, $|\sigma_{2n}|+|\sigma_{2n+2}|\neq 0$.

Не занимаясь подробным анализом изложенного, отметим особо важное значение условия V, ответственного за характер убывания потенциала при $x\to-\infty$ (число n в условии (3)).

Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения КдФ $K[v(x,t)]=0$, $v(x,0)=q(x)$ **(5)** с вещественной начальной функцией $q(x)$, удовлетворяющей условию (3).

Обозначим через $s_{jk}(\lambda)$ $(j,k=1,2)$ элементы S-матрицы уравнения Ш—Л с потенциалом $q(x)$. Зададим матрицу $\|s_{jk}(\lambda,t)\|_{j,k=1,2}$ формулами

$$s_{jk}(\lambda,t)=e^{(j-k)8i\lambda^3 t}s_{jk}(\lambda) \tag{6}$$

и положим $R^+(x;t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}s_{21}(\lambda,t)e^{i\lambda x}d\lambda$. Обычными методами доказывается *, что уравнение $K^+(x,y;t)+\int\limits_x^\infty K^+(x,s;t)R^+(s+y;t)ds=-R^+(x+y;t)$ **(7)** при $y\geqslant x>-\infty$ и всех t имеет единственное решение $K^+(x,y;t)$; функция $e^+(\lambda,x;t)=e^{i\lambda x}+\int\limits_x^\infty K^+(x,s;t)e^{i\lambda s}ds$ удовлетворяет уравнению $-y''_{xx}+v(x,t)y=\lambda^2 y$ $(-\infty<x<\infty)$, где функция $v(x,t)=-2\frac{\partial}{\partial x}K^+(x,x;t)\in D^+$ $(x>-\infty)$ является решением уравнения КдФ, причем $v(x,0)=q(x)$.

---

* Детальное изложение этого доказательства можно найти в монографиях: Марченко В. А. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения.— К.: Наук. думка, 1977, гл. 4, с. 285—303; Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов.— М.: Наука, 1980, с. 20—43.

Однако при этом остается неизвестным поведение решения $v(x, t)$ при $x \to -\infty$. Правда, в случае $n = 1$ матрица $S(\lambda, t)$, определенная равенством (6), удовлетворяет при всех t условиям теоремы 1. Следовательно, $v(x, t) - 2x^{-2} \in D^-(x < 0)$. Заметим, что функция $p_1(x) = 2x^{-2}$ является рациональным решением уравнения КдФ.

Оказывается, что и в общем случае справедливо аналогичное утверждение, а именно, при всех t и достаточно далеких отрицательных x $(x < x_0 = x_0(t))$ решение $v(x, t)$ отличается от рационального решения $v_n(x, t)$ уравнения КдФ $(v_n(x, 0) = n(n+1)x^{-2})$ на функцию из класса $D^-(x < x_0)$. Доказательство этого факта, составляющее основную и наиболее трудную часть наших рассмотрений, предварим некоторыми необходимыми нам для дальнейшего построениями.

3. **Преобразование Крума и рациональные решения уравнения КдФ.** В этом разделе мы приведем большей частью уже известные факты ([3, 4]). Покажем, как с помощью преобразований Крума (*Crum M.*) можно, исходя из некоторого известного решения уравнения КдФ, строить новые решения того же уравнения (аналог преобразования Беклунда), а затем проиллюстрируем этот прием важным примером построения класса рациональных решений уравнения КдФ.

Пусть $\varphi_k(\lambda_1, x)$ — некоторое решение уравнения Ш—Л $\boldsymbol{L}_k[y] \equiv -y''_{xx} + v_k(x)\, y = \lambda^2 y$ (8) с $\lambda = \lambda_1$. Тогда преобразование

$$\theta_{k+1}(\lambda, x) = \varphi_k^{-1}\left[\varphi_k \frac{\partial}{\partial x}\theta_k(\lambda, x) - \theta_k(\lambda, x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_k\right] \tag{9}$$

переводит решения $\theta_k(\lambda, x)$ уравнения (8) в решения $\theta_{k+1}(\lambda, x)$ уравнения Ш—Л $\boldsymbol{L}_{k+1}[y] = \lambda^2 y$ с потенциалом $v_{k+1}(x) = v_k(x) - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\varphi_k(\lambda_1, x)$ **(10)**.

Следовательно, задав некоторые начальные v_0, φ_0, можем построить, в общем случае, бесконечную последовательность интегрируемых явным образом уравнений Ш—Л. Преобразование (9)—(10) назовем преобразованием Крума, хотя, по-видимому, впервые на него указал Дарбу.

Предположим теперь, что потенциал v_k зависит еще и от параметра t, причем, таким образом, что $\boldsymbol{K}[v_k(x, t)] = 0$. Нетрудно убедиться непосредственной проверкой, что

$$\boldsymbol{K}[v_{k+1}(x, t)] = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{\boldsymbol{M}_k^{\lambda_1}[\varphi_k(\lambda_1, x;\, t)]}{\varphi_k(\lambda_1, x;\, t)}\right\},$$

где $$\boldsymbol{M}_k^{\lambda}[\varphi_k(\lambda, x;\, t)] = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_k + \varphi_k\frac{\partial}{\partial x}v_k - 2(v_k + 2\lambda^2)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_k.$$

Значит, если функция $\varphi_k(\lambda, x;\, t)$ является совместным решением системы уравнений

$$M_k^\lambda[\varphi_k(\lambda, x; t)] = 0,\ \ L_k[\varphi_k(\lambda, x; t)] = \lambda^2\varphi_k(\lambda, x; t), \tag{11}$$

функция $v_{k+1}(x, t)$ тоже удовлетворяет уравнению КдФ.

Положим $v_0 = 0$; $\psi_0 = \theta_0 = e^{i\lambda x}$; $\varphi_0 = x + c_0$. Воспользуемся теперь преобразованием Крума (9)—(10), выбирая на каждом шаге в качестве φ_k произвольное растущее решение уравнения $L_k[y] = 0$ $\varphi_k(x) = \varphi_k(0, x) = \left[c_k\psi_k(\lambda, x) - (-i)^{2k+1}\frac{\partial}{\partial\lambda^{2k+1}}\psi_k(\lambda, x)\right]_{\lambda=0}$, где через $\psi_k(\lambda, x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ обозначена функция $\psi_k(\lambda, x) = \exp\left[\sum_{j=0}^{k-1}(i\lambda)^{2j+1}c_j\right]\theta_k(\lambda, x)$.

Лемма 1. *Функции $\psi_k(\lambda, x)$ — целые функции по λ и разлагаются в ряд Тэйлора по степеням λ вида* $\varphi_k(\lambda, x) = \sum_{j=0}^{k}(i\lambda)^{2j}\times\xi_{2j}(x) + (i\lambda)^{2k+1}\xi_{2k+1}(x) + \cdots$; все коэффициенты $\xi_l(x)$ являются рациональными функциями, причем, $\xi_0(x)$ и $\xi_{2k+1}(x)$ составляют фундаментальную систему решений уравнения $L_k[y] = 0$; функции $v_k(x)$ тоже рациональны и имеют вид $v_k(x) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln P_k(x, c_0, c_1, \ldots, c_{k-1})$, где $P_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1}\varphi_j(x)$ — полиномы степени $k(k+1)/2$, коэффициенты которых также полиномиальным образом зависят от параметров c_j.

Доказательство леммы проводится по индукции. Приведем здесь первые три полинома $P_1 = (x + c_0)$, $P_2 = (x + c_0)^3 - 3c_1$; $P_3 = (x + c_0)^6 - 15c_1(x + c_0)^3 + 45c_2(x + c_0) - 45c_1^2$. Используя лемму 1, нетрудно непосредственно проверить, что условие (11) выполняется, если $\dot{c}_1 = -4$; $\dot{c}_k = 0$ $(k \neq 1)$. В дальнейшем мы всегда будем полагать $c_1 = -4t$; $c_k = 0$ $(k \neq 1)$, что обусловлено выбором начального условия $v_k(x, 0) = k(k+1)x^{-2}$, и для краткости писать $P_k(x, t) \equiv P_k(x, 0, -4t, 0, \ldots, 0)$.

Пусть $x_k(t)$ — минимальный вещественный корень полинома $P_k(x, t)$. Положим $a_k(T) = \inf_{|t|<T} x_k(t)$. Легко проверить, что $a_k(T) > -\infty$ при каждом $T < \infty$. Следовательно, функция $P_k(x, t)$ в области $(-\infty < x \leqslant a_k(T) - 1] \times [-T \leqslant t \leqslant T]$ нигде не обращается в нуль.

4. Исследование поведения решения $v(x, t)$ при $x \to -\infty$. Обозначим через $p_n(x, t)$ ограниченную на множестве $(x, t) \in \mathbf{R} \times [-T, T]$ функцию

$$p_n(x, t) = \begin{cases} -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln P_n(x, t) & (x \leqslant a = a_n(T) - 1), \\ 0 & (x > a = a_n(T) - 1). \end{cases}$$

Пусть $\tilde{s}_{jk}(\lambda, t)$ — элементы S-матрицы, а $\tilde{e}^{\pm}(\lambda, x; t)$ — специальные *решения уравнения Ш—Л с потенциалом $p_n(x, t)$. Эти функции* выписываются, конечно, в явном виде с помощью преобразований Крума, например

$$\tilde{e}^{-}(\lambda, x, t)=\begin{cases} e^{i\lambda x}\left[1+\sum\limits_{k=1}^{n}(i\lambda x)^{-k} e_k(x, t)\right] & (x \leqslant a), \\ \tilde{a}(-\lambda, t) e^{i\lambda x}-\tilde{b}(\lambda, t) e^{-i\lambda x} & (x>a), \end{cases} \tag{12}$$

где $\tilde{a}(\lambda, t)=\frac{e^{i\lambda a}}{2}\left[\tilde{e}^{-}(-\lambda, x; t)+\frac{i}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{e}^{-}(-\lambda, x; t)\right]_{x=a}$; $\tilde{b}(\lambda, t)=$ $=-\frac{e^{i\lambda a}}{2}\left[\tilde{e}^{-}(\lambda, x; t)+\frac{i}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{e}^{-}(\lambda, x; t)\right]_{x=a}$, а $e_k(x, t)$ — рациональные ограниченные функции.

Лемма 2. *Матрица $\tilde{S}(\lambda, t)=\tilde{s}_{jk}(\lambda, t)$ удовлетворяет условиям* I, III, IV *теоремы 1, элементы матрицы являются бесконечно дифференцируемыми функциями, и при $\lambda \to 0$ справедливы асимптотические равенства $\tilde{s}_{12}(\lambda, t)=(-1)^{n+1} \exp (-8 i \lambda^3 t)[1+$ $+o(\lambda^{2n})]$; $\tilde{s}_{11}(\lambda, t)=\lambda^{n+1} O(1)$.*

Доказательство леммы опирается на рассмотрения предыдущего пункта.

Теорема 2. *Если бесконечно дифференцируемая функция $r(\lambda)$ обладает следующими свойствами:* а) $r(\lambda)=r(-\lambda)$; б) $\lambda^{m+2} \frac{d^p}{d\lambda^p} \times$ $\times r(\lambda) \in L^2(-\infty, \infty)$ $(p=0, 1, 2, \ldots)$; в) $\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda^{-2n} r(\lambda)=0$, то существует такое $x_0 \leqslant a$, что для каждого $t \in[-T, T]$ уравнение

$$K^{-}(x, y; t)+\int_{-\infty}^{x} K^{-}(x, s; t) R^{-}(s, y; t) ds=-R^{-}(x, y; t), \tag{13}$$

где

$$R^{-}(x, y; t)=\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) \tilde{e}^{-}(-\lambda, x; t) \tilde{e}^{-}(-\lambda, y; t) d\lambda, \tag{14}$$

имеет единственное вещественное решение $K^{-}(x, y; t)$ $(y \leqslant x \leqslant x_0)$; функция $e^{-}(\lambda, x; t)=\tilde{e}^{-}(\lambda, x; t)+\int\limits_{-\infty}^{x} K^{-}(x, y; t) \tilde{e}^{-}(\lambda, y; t) dy$ удовлетворяет уравнению $-y_{xx}''+[v_n(x, t)+\varepsilon(x, t)] y=\lambda^2 y$ $(x \leqslant x_0)$ (15), где $v_n(x, t)=-2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln P_n(x, t)$, а функция $\varepsilon(x, t)$ имеет m непрерывных производных и убывает вместе с ними быстрее любой степени $|x|^{-1}$, когда $x \to -\infty$.

Доказательство: Подставляя явное выражение функции $\tilde{e}^{-}(\lambda, x; t)$ (12) в определение ядра $R^{-}(x, y; t)$ (14), нетрудно убедиться в справедливости оценок

$$|R^-(x, y; t)| \leqslant \tau_1(x+y) \quad (x \leqslant a,\ y \leqslant a); \quad |R^-(x, y; t)| \leqslant \tau_2(x+y) + \tau_3(x-y) \quad (x \leqslant a,\ y > a), \tag{16}$$

где $\tau_i(x) \in L^1(-\infty, \infty) \cap L^\infty(-\infty, \infty)$. Следовательно, семейство операторов Φ_x $\Phi_x[f] = \int\limits_{-\infty}^{x} R^-(s, y; t)\, f(s)\, ds$, равномерно по $x \leqslant x_0$ убывает по норме, когда $x_0 \to -\infty$ как в $L^2(-\infty, x_0]$, так и в $L^1(-\infty, x_0]$. Поэтому, оператор $I + \Phi_x$ обратим, начиная с некоторого x_0 в каждом из этих пространств.

Обозначим $\varepsilon(x, t) = 2\frac{d}{dx} K^-(x, x; t)$. Сформулированные в утверждении теоремы 2 свойства функции $\varepsilon(x, t)$ являются следствием дифференцируемости ядра $R^-(x, y; t)$ по переменным x, y нужное число раз и быстрого убывания этих производных, когда $x \to -\infty$, $y \to -\infty$.

Применяя теперь к уравнению (13) последовательно операции $l_x = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + v_n(x, t)$; $l_y = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} + v_n(y, t)$, найдем, что функция $K^-(x, y; t)$ удовлетворяет уравнению $[l_x - l_y + \varepsilon(x, t)]\, K^-(x, y; t) = 0$ **(17)**. Справедливость уравнения (15) устанавливается, учитывая равенство (17), непосредственной проверкой.

Пусть аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ функция $\delta_m(z, t) = \sum\limits_{k=0}^{2n} \delta_k(t)(iz)^k(1 - iz)^{-m-k-3}$ такова, что функция $r(\lambda) = s_{12}(\lambda) \times \exp(-8i\lambda^3 t) - \delta_m(\lambda, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Очевидно, что указанная функция единственным образом определяется условием $\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda^{-2n} r(\lambda) = 0$.

Исходя из функции $r(\lambda)$, построим по формуле (14) ядро $R^-(x, y; t)$. Пусть $K^-(x, y; t)$ — решение уравнения (13), $e^-(\lambda, x; t) = \tilde{e}^-(\lambda, x; t) + \int\limits_{-\infty}^{x} K^-(x, y; t)\, \tilde{e}^-(\lambda, y; t)\, dy$; $\quad v^-(x, t) = v_n(x, t) + \varepsilon(x, t)$, где $\varepsilon(x, t) = 2\frac{d}{dx} K^-(x, x; t)$.

Завершая наши исследования, покажем, что $v^-(x, t) \equiv v(x, t)$ $(x \leqslant x_0)$. Для этого достаточно установить, что при всех $x \leqslant x_0$ и $t \in [-T, T]$ функция $e^+(\lambda, x; t)$ является линейной комбинацией функций $e^-(\lambda, x; t)$ и $e^-(-\lambda, x; t)$. С этой целью мы перейдем от уравнений Марченко (7) и (13) к их преобразованиям Фурье по собственным функциям задачи рассеяния для модельных уравнений Ш—Л соответственно с потенциалами $q(x) = 0$ и $q(x) = p_n(x, t)$. Для обоснования дальнейших рассуждений нам понадобится одно утверждение, формулировкой которого мы здесь ограничимся.

Лемма 3. *Если $g(\lambda) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ и $g^{(p)}(\lambda) \in L^2(\boldsymbol{R})$ для всех $p = 0, 1, 2, \ldots$, то справедливы формулы обращения $G(x) =$*

$$= \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} g(\lambda)\, \tilde{s}_{11}(\lambda, t)\, \tilde{e}^-(-\lambda, x; t)\, d\lambda; \quad g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x)\, \tilde{e}^+(\lambda, x;$$

$t)\, dx$. Положим

$$F^-(x, y; t) = R^-(x, y; t) + \int_{-\infty}^{x} K^-(x, s; t)\, R^-(s, y; t)\, ds. \tag{18}$$

При всех значениях $x \leqslant a$, в силу оценок (16), $F^-(x, y; t) \in L^1(\boldsymbol{R}) \cap \cap L^\infty(\boldsymbol{R})$ как функция от y. Умножим $F^-(x, y; t)$ на $\tilde{e}^+(\lambda, y; t)$ и проинтегрируем по y от $-\infty$ до $+\infty$. В силу леммы 3 мы получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^-(x, y; t)\, \tilde{e}^+(\lambda, y; t)\, dy = \tilde{s}_{11}(\lambda, t)^{-1} [s_{12}(\lambda, t) - \\ - \delta_m(\lambda, t)]\, e^-(-\lambda, x; t).$$

С другой стороны, $F^-(x, y; t) = -K^-(x, y; t)$ при $y < x$, значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^-(x, y; t)\, \tilde{e}^+(\lambda, y; t)\, dy = \int_{x}^{\infty} F^-(x, y; t)\, \tilde{e}^+(\lambda, y; t)\, dy - \\ - \int_{-\infty}^{x} K^-(x, y; t)\, \tilde{s}_{11}(\lambda, t)^{-1} [\tilde{e}^-(\lambda, y; t) + \tilde{s}_{12}(\lambda, t)\, \tilde{e}^-(-\lambda, y; t)]\, dy = \\ = \int_{x}^{\infty} F^-(x, y; t)\, \tilde{e}^+(\lambda, y; t)\, dy + \tilde{e}^+(\lambda, x; t) - \\ - \tilde{s}_{11}(\lambda, t)^{-1} [e^-(\lambda, x; t) + \tilde{s}_{12}(\lambda, t)\, e^-(-\lambda, x; t)].$$

Приравнивая правые части последних двух равенств найдем, что $s_{12}(\lambda)\, e^{-8i\lambda^3 t} e^-(-\lambda, x; t) + e^-(\lambda, x; t) = s_{11}(\lambda)\, f^+(\lambda, x; t)$ **(19)**, где

$$f^+(\lambda, x; t) = s_{11}(\lambda)^{-1} [\delta_m(\lambda, t) - \tilde{s}_{12}(\lambda, t)]\, e^-(-\lambda, x; t) + \\ + \frac{\tilde{s}_{11}(\lambda, t)}{s_{11}(\lambda)} \left[\tilde{e}^+(\lambda, x; t) + \int_{x}^{\infty} F^-(x, y; t)\, \tilde{e}^+(\lambda, y; t)\, dy\right]. \tag{20}$$

После аналогичных рассмотрений для правой полуоси мы получим равенство $s_{21}(\lambda) e^{8i\lambda^3 t} e^+(\lambda, x; t) + e^+(-\lambda, x; t) = s_{11}(\lambda)\, f^-(-\lambda, x; t)$ **(21)**, где

$$f^-(-\lambda, x; t) = s_{11}(\lambda)^{-1} \left[e^{-i\lambda x} + \int_{-\infty}^{x} F^+(x, y; t)\, e^{-i\lambda y}\, dy\right], \tag{22}$$

а функция $F^+(x, y; t) \in L^1(\boldsymbol{R}) \cap L^\infty(\boldsymbol{R})$ по переменной y при всех значениях параметров x и t.

Функции $f^+(\lambda, x; t)$ и $f^-(-\lambda, x; t)$ в силу определений (20), (22) и равенств (19), (21) продолжаются аналитически в верхнюю полуплоскость, где они обладают следующими свойствами: $\overline{f^+(z, x; t)} = f^-(-\bar{z}, x; t)$; $\overline{f^-(-z, x; t)} = f^-(z, x; t)$; $W[e^+(z, x; t), f^-(-z, x; t)] = W[f^+(z, x; t), e^-(-z, x; t)] = 2izs_{11}(z)^{-1}$ **(23)**; $\lim\limits_{|z|\to\infty} e^{izx}f^-(-z, x; t) = \lim\limits_{|z|\to\infty} e^{-izx}f^+(z, x; t) = 1$ **(24)**.

Подставим в (21) $\lambda_1 = -\lambda$. Рассматривая полученное равенство совместно с (21) как систему уравнений относительно $e^-(\pm\lambda, x; t)$, найдем $s_{11}(\lambda)e^-(-\lambda, x; t) = f^+(-\lambda, x; t) + s_{21}(\lambda)e^{8i\lambda^3t}f^+(\lambda, x; t)$ (25). Исключая теперь из (21) и (25) функцию $s_{21}(\lambda)$, получим равенство

$$s_{11}(\lambda)[f^-(-\lambda, x; t)f^+(\lambda, x; t) - e^-(-\lambda, x; t)e^+(\lambda, x; t)] = \\ = e^+(-\lambda, x; t)f^+(\lambda, x; t) - f^+(-\lambda, x; t)e^+(\lambda, x; t). \qquad (26)$$

Обозначим через $g(z)$ аналитическую в верхней полуплоскости функцию $g(z) = s_{11}(z)[f^-(-z, x; t)f^+(z, x; t) - e^-(-z, x; t)e^+(z, x; t)]$. Из равенства (26) следует, что на вещественной оси $g(\lambda) = -g(-\lambda)$, поэтому ее можно продолжить до функции $g_1(z)$ аналитической во всей плоскости (за исключением точки $z = 0$, где она может иметь полюс), положив

$$g_1(z) = \begin{cases} g(z) \; (\operatorname{Im} z \geqslant 0), \\ -g(-z) \; (\operatorname{Im} z < 0). \end{cases}$$

В силу леммы 2, из формулы (20) следует, что функция $f^+(z, x; t)$ непрерывна вплоть до вещественной оси, а из формулы (22) вытекает аналогичное утверждение о функции $s_{11}(z)f^-(-z, x; t)$. Поэтому, $g_1(z)$ имеет устранимую особенность в точке $z = 0$, а так как, в силу равенств (24), $\lim\limits_{|z|\to\infty} g_1(z) = 0$, то по теореме Лиувилля $g_1(z) \equiv 0$. Значит, $e^+(-\lambda, x; t)f^+(\lambda, x; t) \equiv f^+(-\lambda, x; t)e^+(\lambda, x; t)$ **(27)**.

Дальнейшее доказательство заключается в исследовании аналитических свойств функции $h(z) = f^+(z, x; t)[e^+(z, x; t)]^{-1}$. Учитывая равенство (27), ее можно продолжить в нижнюю полуплоскость до функции $h_1(z)$, аналитической во всей плоскости, за исключением разве что точек, в которых $e^+(z, x; t) = 0$. Предположим вначале, что $z \neq 0$; $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и $e^+(z, x; t) = 0$. Из определения функции $g(z)$ следует, что $f^-(-z, x; t)f^+(z, x; t) = 0$, но, в силу (23), $f^-(-z, x; t) \neq 0$. Значит, $f^+(z, x; t) = 0$, а поскольку нули $e^+(z, x; t)$ — простые, то для всех точек $x \leqslant x_0$ (кроме, может быть, дискретного множества точек x, в которых $e^+(0, x) = 0$) функция $h_1(z)$ — целая. Из (24) вытекает, что $h_1(z) \to 1$, когда $|z| \to \infty$, значит, $h_1(z) \equiv 1$, т. е. $f^+(z, x) = e^+(z, x)$. Равенство (19) позволяет теперь заключить, что $s_{12}(\lambda)e^{-8\lambda^3t}e^-(-\lambda, x; t) + e^-(\lambda, x; t) = s_{11}(\lambda) \times e^+(\lambda, x; t)$. По непрерывности последнее равенство распространяется на все x.

Заметим, что функция $\varepsilon(x, t) = v^{-}(x, t) - v_n(x, t)$ не зависит на самом деле от выбора числа m в конструкции $\delta_m(\lambda)$, следовательно, $\varepsilon(x, t) \in D^{-}(x \leqslant x_0)$.

Таким образом, нами доказано следующее, основное в данной работе утверждение.

Теорема 3. *Решение $v(x, t)$ задачи Коши для уравнения КдФ $v_t + v'''_{xxx} - 6vv'_x = 0$; $v(x, 0) = q(x)$ с начальной функцией $q(x)$, удовлетворяющей условию $q(x) \in D^{+}(x > -\infty)$, $q(x) - \frac{n(n+1)}{x^2} \in$ $\in D^{-}(x < 0)$* существует и может быть найдено с помощью метода обратной задачи рассеяния. В любой момент времени t $v(x, t) \in$ $\in D^{+}(x > -\infty)$; $v(x, t) - v_n(x, t) \in D^{-}(x < x_n(t))$, где $v_n(x, t)$ — рациональное решение уравнения КдФ с начальным условием $v_n(x, 0) = n(n+1)x^{-2}$, а $x_n(t)$ его наименьший вещественный полюс.

Список литературы: 1. *Gardner C., Green I., Kruskal M., Miura R.*, A method for solving the Korteweg — de Vries equation.— Phys. Rev. Letters, 1967, **19**, p. 1095—1098. *Хруслов Е. Я.* Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки.— Мат. сб., 1976, **99** (141), № 2, с. 261—281. 3. *Бордаг Л. А., Матвеев В. Б.* Об автомодельных решениях уравнения КдФ и потенциалах с тривиальной S-матрицей.— Теор. и мат. физика, 1978, **34**, № 2, с.426—429. 4. *Adler M., Moser I.* On a class of polynomials connected with the Korteweg — de Vries equations.— Comm. Math. Phys., 1978, **61**, № 1, p. 1—30. 5. *Ablowitz M. I., Cornille H.* On solutions of the Korteweg — de Vries equation.— Phys. Lett., 1979, **72A**, № 4, p. 277—280. 6. *Давыдов Р. Н.* Обратная задача рассеяния на оси для уравнения Штурма—Лиувилля с квадратично убывающим потенциалом.— В кн.: Функцион. анализ и прикл. математика.—К.: Наук. думка, 1982, с. 17.

Поступила в редколлегию 27.01.82.