УДК 517.55

А. М. РУССАКОВСКИЙ

О ПРОДОЛЖЕНИИ С ОЦЕНКАМИ С АНАЛИТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ КОРАЗМЕРНОСТИ. 1

Задаче продолжения функции, голоморфной на аналитическом множестве в C^n, до целой с теми или иными оценками роста посвящено много исследований, начиная с работ Л. Хермандера (см. [1]), В. П. Паламодова, Л. Эренпрайса. Достаточно подробная библиография имеется в [2]. Здесь мы отметим работы, к которым наша наиболее близка по характеру получаемых оценок.

К. Беренштейн и Б. Тейлор (см. [3, 4]) получили ряд результатов, гарантирующих возможность продолжения с оценками функций с аналитических множеств весьма общего вида. В ряде работ Л. И. Ронкина (см., напр., [5]) получены теоремы о продолжении с нулевого множества полинома, а также псевдополинома с более точными оценками, чем полученные в [3, 4]. В [2] эти результаты обобщаются на случай алгебраических множеств произвольной коразмерности.

В данной заметке рассматриваются задачи продолжения с аналитических множеств коразмерности 1. При этом автор ставил перед собой задачу получения как можно более точных оценок продолжения.

Пусть $f(z)$ — целая функция, $z \in \boldsymbol{C}^n$, $\Lambda = \{z : f(z) = 0\}$ и пусть $\varphi(z)$ — функция, голоморфная на Λ, причем $\ln|\varphi(z)| \leqslant u(z)$, $z \in \Lambda$, где $u \in PSH(\boldsymbol{C}^n)$ (плюрисубгармонична).

В настоящей заметке строится такая целая функция $\Phi(z)$, что $\Phi(z) = \varphi(z)$, $z \in \Lambda$, и

$$\ln|\Phi(z)| \leqslant u^{[1]}(z) + w(z), \quad z \in \boldsymbol{C}^n, \tag{$\ast$}$$

где $w \in PSH(\boldsymbol{C}^n)$, а через $u^{[r]}(z)$ здесь и далее обозначается $\sup\{u(\zeta) : |z - \zeta| \leqslant r\}$.

При этом функция $w(z)$ в оценке ($\ast$) определяется только множеством Λ (точнее, функцией f). Это дает возможность указывать условия на Λ, обеспечивающие существование продолжения функции, голоморфной на Λ, до целой в том или ином классе функций, рост которых сравнивается с ростом функций $u(z)$ и $w(z)$. Разумеется, наиболее интересны случаи, когда либо $w(z) = O(u^{[|z|]}(0))$, либо $w(z) = o(u^{[|z|]}(0))$.

Введем соответствующие понятия. Назовем, следуя Л. И. Ронкину [5], типом и радиальным индикатором функции $f(z)$, голоморфной на аналитическом множестве Λ, соответственно, величины $\sigma_\Lambda(f) = \overline{\lim\limits_{t \to \infty}}\, t^{-\rho} \sup\{\ln|f(z)| : |z| \leqslant t,\ z \in \Lambda\}$ и $L_{r,\Lambda}(z;\ f) = \lim\limits_{\varepsilon \to \infty} \times$ $\times \overline{\lim\limits_{t \to \infty}}\, t^{-\rho} \sup\{\ln|f(tz')| : |z' - z| < \varepsilon,\ z't \in \Lambda\}$, $z \in \boldsymbol{C}^n$.

Класс функций, голоморфных на Λ, и таких, что $\sigma_\Lambda(f) < \infty$ ($\sigma_\Lambda(f) \leqslant \sigma$; $L_{r,\Lambda}(z;\ f) \leqslant h(z)\ (z \in \boldsymbol{C}^n)$), обозначим $[\rho,\ \infty)_\Lambda$ ($[\rho,\ \sigma]_\Lambda$; $[\rho,\ h(z)]_\Lambda$ соответственно).

Класс целых функций, имеющих при порядке ρ конечный тип (тип, не превосходящий σ; радиальный индикатор, не превосходящий $h(z)$), обозначим $[\rho,\ \infty)$ ($[\rho,\ \sigma]$; $[\rho,\ h(z)]$ соответственно).

Если $F \in [\rho,\ \infty)$ ($[\rho,\ \sigma]$; $[\rho,\ h(z)]$), то $F|_\Lambda \in [\rho,\ \infty)_\Lambda$ ($[\rho,\ \sigma]_\Lambda$; $[\rho,\ h(z)]_\Lambda$ соответственно).

Назовем аналитическое множество Λ интерполяционным в классе $[\rho,\ \infty)$ ($[\rho,\ \sigma]$; $[\rho,\ h(z)]$), если любая функция из $[\rho,\ \infty)_\Lambda$ ($[\rho,\ \sigma]_\Lambda$; $[\rho,\ h(z)]_\Lambda$) продолжается до функции класса $[\rho,\ \infty)$ ($[\rho,\ \sigma]$; $[\rho,\ h(z)]$ соответственно).

Ниже будут установлены достаточные условия интерполяционности аналитического множества Λ в упоминаемых выше классах.

Все они являются следствиями основного результата, который мы теперь сформулируем точно.

Теорема 1. *Пусть функции* $u(z)$, $v_1(z)$, $v_2(z)$, $v(z) = v_1^{[1]}(z) + v_2^{[1]}(z)$ *таковы, что* u, v_1, v, $u + v_2 \in PSH(\mathbf{C}^n)$, $v \geqslant 0$ *и* $|\bar{\partial} v| \leqslant \exp v$ **(1)**.

Пусть, далее, $f(z)$ — *целая функция,* $\Lambda = \{z : f(z) = 0\}$, $0 \bar{\in} \Lambda$, $\ln|f(z)| \leqslant v_1(z)$, $z \in \mathbf{C}^n$ **(2)**, $\ln|\langle \nabla f(z), z|z|^{-1}\rangle| \geqslant -v_2(z)$, $z \in \Lambda$, **(3)** (∇ *означает градиент относительно* $z_1, \ldots, z_n$).

Тогда $\forall \varphi \in A(\Lambda)$ *такой, что*

$$\ln|\varphi(z)| \leqslant u(z), \quad z \in \Lambda, \tag{4}$$

$\exists \Phi \in A(\mathbf{C}^n)$ *такая, что* $\Phi(z) = \varphi(z)$, $z \in \Lambda$, $\ln|\Phi(z)| \leqslant u^{[1]}(z) + 7v^{[1]}(z) + (n+2)\ln(1 + |z|^2) + C$, $z \in \mathbf{C}^n$.

Следующие ниже теоремы 2—4 получаются непосредственно из теоремы 1 при соответствующем выборе функций v_1 и v_2. (Всюду далее $\rho > 0$).

Теорема 2. *Пусть* $f(z) \in A(\mathbf{C}^n)$, $\Lambda = \{z : f(z) = 0\}$, $0 \bar{\in} \Lambda$, *и пусть выполнены условие (2) с* $v_1 = A_1|z|^\rho + A_2$, $A_1 \geqslant 0$ *и условие (3) с* $v_2 = B_1|z|^\rho + B_2$.

Тогда множество Λ *является интерполяционным в классе* $[\rho, \infty)$.

Теорема 3. *Пусть* $f(z) \in A(\mathbf{C}^n)$, $\Lambda = \{z : f(z) = 0\}$, $0 \bar{\in} \Lambda$, *и пусть выполнены условие (2) с* $v_1 = A|z|^\rho + w_1(z)$ *и условие (3) с* $v_2 = -A|z|^\rho + w_2(z)$, *где* $A \geqslant 0$, *а* $w_1(z)$, $w_2(z)$ — *плюрисубгармонические функции минимального типа при порядке* ρ.

Тогда множество Λ *является интерполяционным в классе* $[\rho, \sigma]$ *при* $\sigma \geqslant A$.

Теорема 4. *Пусть* $f(z)$ — *целая функция,* $\Lambda = \{z : f(z) = 0\}$, $0 \bar{\in} \Lambda$, *и пусть выполнены условие (2) с* $v_1 = g(z) + w_1(z)$ *и условие (3) с* $v_2 = -g(z) + w_2(z)$, *где* $g(z)$ — *плюрисубгармоническая функция порядка* ρ, *а* $w_1(z)$ *и* $w_2(z)$ — *те же, что в теореме 3.*

Тогда множество Λ *является интерполяционным в классе* $[\rho, h(z)]$, *где* $h(z)$ — *непрерывная позитивно однородная порядка* ρ *плюрисубгармоническая функция, такая, что* $h - g \in PSH(\mathbf{C}^n)$.

Отметим, что теорема 2 является следствием одного более сильного результата К. Беренштейна и Б. Тейлора [3]. В их теореме фигурирует оценка снизу $|\nabla f(z)|$ при $z \in \Lambda$, которая вытекает из условия (3) с $v_2 = B_1|z|^\rho + B_2$. Теоремы 3 и 4 из результатов [3] получить нельзя, так как в них содержатся существенно более тонкие оценки продолжения.

Доказательство теоремы 1.

Доказательство проводится по следующей схеме: вначале строится C^∞-продолжение исходной функции на все $\mathbf{C}^n$, которое затем «подправляется» до целой функции.

Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathrm{dist}(0, \Lambda) \geqslant 2$.

Пусть $\lambda \in \boldsymbol{C}$, $z \in \boldsymbol{C}^n$, $|z| \geqslant 1$. Положим $\tilde{f}(\lambda, z) = f(\lambda z)$, $\Lambda_z = \{\lambda : \lambda z \in \Lambda\} = \{\lambda : \tilde{f}(\lambda, z) = 0\} = \{\lambda_k(z)\}$.

Очевидно, $|\lambda_k(z)| \geqslant 2|z|^{-1}$.

Отметим, что $|\partial\tilde{f}/\partial\lambda(\lambda, z)| = |\langle\nabla f(\lambda z), z\rangle| = \left|\left\langle \nabla f(\lambda z), \frac{\lambda z}{|\lambda z|}\right\rangle\right| \times |z|$. В силу условия (3) при $\lambda \in \Lambda_z$ имеем $\ln|\partial\tilde{f}/\partial\lambda(\lambda, z)| \geqslant -v_2(\lambda z) + \ln|z|$ **(5)**.

Обозначим через $d_k(z)$ величину $\operatorname{dist}(\lambda_k(z), \Lambda_z \setminus \lambda_k(z))$. Пусть $d_k(z) \leqslant |z|^{-1}$. В силу леммы 3 из [6] (см. также лемму 3 из [7]) справедлива оценка $\ln d_k(z) \geqslant -v_2(\lambda_k(z) z) - \max\{v_1(\lambda z) : |\lambda - \lambda_k(z)| \leqslant |z|^{-1}\} - \ln|z| \geqslant -v(\lambda_k(z) z) - \ln|z|$.

Положим $r_k(z) = |z|^{-1}\exp\{-v(\lambda_k(z) z)\}$. Очевидно, $r_k(z) \leqslant d_k(z)$ **(6)**.

Положим $\psi_k(\lambda, z) = \left[\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\lambda}\left(\lambda_k(z), z\right)\right]^{-1} \lambda^{-1} r_k^{-1}(z) \tilde{f}(\lambda_k(z) + r_k(z)\lambda, z)$, $|\lambda| \leqslant 1$.

Очевидно, $\psi_k(0, z) = 1$, $\psi_k(\lambda, z) \neq 0$ при $|\lambda| < 1$ и $\ln|\psi_k(\lambda, z)| \leqslant 2v(\lambda_k(z) z)$ в силу (2), (5).

В силу неравенства Каратеодори при $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2}$: $\ln|\psi_k(\lambda, z)| \geqslant -4v(\lambda_k(z) z)$, откуда $\ln|\tilde{f}(\lambda_k(z) + r_k(z)\lambda, z)| \geqslant -v_2(\lambda_k(z) z) + \ln|\lambda| - 5v(\lambda_k(z) z)$ **(7)**.

Обозначим через $\Omega(z)$ множество $\left\{\lambda : |1 - \lambda^{-1}| < \frac{1}{2|z|} e^{-v(z)}\right\}$, через $\tilde{\Omega}(z)$ множество $\{\zeta : \exists\lambda \in \Omega(z) : \lambda\zeta = z\}$. Пусть λ_1 и λ_2 принадлежат Λ_z, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда в силу (6) имеем $|\lambda_1 - \lambda_2| \geqslant \max\{|z|^{-1}\exp(-v(\lambda_1 z), |z|^{-1}\exp(-v(\lambda_2 z))\}$. Поэтому $\{\lambda : |\lambda - \lambda_1| < 2^{-1}|z|^{-1}\exp(-v(\lambda_1 z))\} \cap \{\lambda : |\lambda - \lambda_2| < 2^{-1}|z|^{-1}\exp(-v(\lambda_2 z))\} = \varnothing$, откуда $\tilde{\Omega}(\lambda_1 z) \cap \tilde{\Omega}(\lambda_2 z) = \varnothing$ **(8)**.

Пусть $\chi \in C^\infty(\boldsymbol{R}^+)$ — функция со следующими свойствами:

$$\chi(t) = 1 \text{ при } t \leqslant \frac{1}{4},\ \chi(t) = 0 \text{ при } t \geqslant \frac{1}{2},\ \chi(t) \in [0, 1],$$

$$\forall t \in \boldsymbol{R}^+, \text{ и пусть } c = \sup\{|\chi'(t)| : t \in \boldsymbol{R}^+\}.$$

Пусть $z_0 = \lambda z$.

Тогда

$$\chi(|z - z_0| e^{v(z_0)}) \neq 0 \leftrightarrow |z - z_0| e^{v(z_0)} < \frac{1}{2} \leftrightarrow \lambda \in \Omega(z_0). \tag{9}$$

Положим

$$g(z) = \begin{cases} \chi(|z - z_0| e^{v(z_0)})\, \varphi(z_0), \text{ если } \exists z_0 \in \Lambda : z_0 = \lambda z,\ \lambda \in \Omega(z_0); \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

В силу (8) функция $g(z)$ определена корректно при $z \in \boldsymbol{C}^n$, $|z| \geqslant 1$. Заметим, что так как $|z_0| \geqslant 2$, $\forall z_0 \in \lambda$, то $2^{-1}|z_0|^{-1}\exp(-v \times (z_0)) \leqslant 4^{-1}$. Поэтому если $z_0 = \lambda z$, $\lambda \in \Omega(z_0)$, то $|z| \geqslant \frac{3}{2}$. Значит, в силу (9) при $1 \leqslant |z| \leqslant 3/2$ имеем $g(z) = 0$. Доопределим $g(z)$ нулем при $|z| < 1$. Теперь, очевидно, $g \in C^\infty(\boldsymbol{C}^n)$.

Оценим теперь $|\bar{\partial} g(z)|$. Пусть $z_0 \in \lambda(z) z$, $\lambda(z) \in \Omega(z_0) = \Big\{\lambda : |1 - \lambda^{-1}| < \frac{1}{2|z|} e^{-v(z_0)}\Big\} = \Big\{\lambda : |1 - \lambda| e^{v(\lambda z)} < \frac{1}{2|z|}\Big\}$. Тогда $g(z) = \chi(|1 - \lambda(z)||z| \exp(v(\lambda(z) z)) \varphi(\lambda(z) z)$.

Рассмотрим уравнение $\tilde{f}(\lambda, \zeta) = 0$. В силу (5) — (7) оно разрешимо относительно λ на множестве $\{(\lambda, \zeta) : |\lambda - \lambda(z)| \exp(v(\lambda(z) z)) < 2^{-1} |z|^{-1}, \zeta \in U_z\}$, где U_z — некоторая окрестность z. При этом функция $\lambda(\zeta)$ является аналитической в U_z и, стало быть, $\bar{\partial}_\zeta \lambda(\zeta) = 0$ в U_z; кроме того, поскольку $0 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \zeta_i}(\lambda(\zeta), \zeta) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda}(\lambda(\zeta), \zeta) \times \frac{\partial \lambda(\zeta)}{\partial \zeta_i} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_i}(\lambda(\zeta), \zeta)$, то при $\lambda(\zeta) \in \Omega(z_0) : \left|\frac{\partial \lambda(\zeta)}{\partial \zeta_i}\right| = \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_i}(\lambda(\zeta), \zeta)\right| \times \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda}(\lambda(\zeta), \zeta)\right|^{-1} = |\lambda(\zeta)| \left|\frac{\partial f}{\partial \zeta_i}(\lambda(\zeta) \zeta)\right| \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda}(\lambda(\zeta), \zeta)\right|^{-1} \leqslant 2 \exp \times \{v(\lambda(\zeta) \zeta) - \ln|\zeta|\}$.

В последнем неравенстве мы воспользовались оценкой (5) и тем, что

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \zeta_i}(\zeta)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w - \zeta_i| = 1} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, w, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_n)\, dw}{(w - \zeta_i)^2}\right| \leqslant$$

$\leqslant \exp v_1^{[1]}(\zeta)$ в силу (2), а $|\lambda(\zeta)| \leqslant 1 + 2^{-1} |\zeta|^{-1} e^{-v(\lambda(\zeta)\zeta)} < 2$, если $\lambda(\zeta) \in \Omega(z_0)$. Таким образом, $|\partial_\zeta \lambda(\zeta)| \leqslant 2n e^{v(\lambda(\zeta)\zeta) - \ln|\zeta|}$, $\zeta \in U_z$, $\lambda(\zeta) \in \Omega(z_0)$ (10).

Итак, пусть $z_0 = \lambda(z) z$, $\lambda(z) \in \Omega(z_0)$. Если $|\lambda(z) - 1| < 4^{-1} \times |z|^{-1} \exp(-v(\lambda(z) z))$, то $g(z) = \varphi(\lambda(z) z) \in A(U_z)$, и, значит, $\bar{\partial} g(z) = 0$.

Пусть теперь $|\lambda(z) - 1||z| \exp(v(\lambda(z) z)) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. Тогда $\bar{\partial} g \times (z) = \bar{\partial} \chi(|1 - \lambda(z)||z| \exp(v(\lambda(z) z))) \times \varphi(\lambda(z) z)$. Остается оценить $|\bar{\partial} \chi(|1 - \lambda(z)||z| \exp(v(\lambda(z) z)))| : |\bar{\partial} \chi| \leqslant c \Big(\frac{|1 - \lambda(z)|}{2|1 - \lambda(z)|} |\partial \lambda \times (z)||z| \exp(v(\lambda(z) z)) + \frac{|1 - \lambda(z)|}{2} e^{v(\lambda(z) z)} + |1 - \lambda(z)|\, |z| \exp(v \times$

$$\times (\lambda(z) z)) |\bar{\partial} v(\lambda(z) z)| \times (|\partial \lambda(z)||z| + |\lambda(z)|)\Big) \leqslant c\,(n e^{2v(\lambda(z) z)} + \\ + \frac{1}{4|z|} + n e^{2v(\lambda(z) z)} + 2n e^{v(\lambda(z) z) - \ln|z|}) \leqslant c_1 \exp(2v(\lambda(z) z)). \qquad (11)$$

(Здесь мы воспользовались условием (1) и оценкой (10)).

Из (11) и (4) следует, что

$$|\bar{\partial} g(z)| \leqslant C_1 e^{u(\lambda(z) z) + 2v(\lambda(z) z)} \qquad (12)$$

при $|\lambda(z) - 1||z| \exp(v(\lambda(z) z)) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

Положим $\Phi(z) = g(z) - \beta(z) f(z)$, где $\bar{\partial} \beta = \alpha = f^{-1} \cdot \bar{\partial} g$ (13).

Чтобы оценить сверху $|\alpha|$, заметим, что $\alpha(z) \neq 0 \Rightarrow (\lambda(z) - 1)|z| \exp(v(\lambda(z)z)) = \lambda \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, откуда $1 = \lambda(z) + \lambda|z|^{-1} \times \exp(-v(\lambda(z)z))$, и, значит, $f(z) = \tilde{f}(1, z) = \tilde{f}(\lambda(z) + \lambda|z|^{-1} \times \exp(-v(\lambda(z)z)))$. Используя оценку (7), получаем, что $\ln|f(z)| \geqslant -v_2(\lambda(z)z) - 5v(\lambda(z)z) - \ln 4$.

Таким образом, $|\alpha(z)| \leqslant C_2 \exp(u(\lambda(z)z) + v_2(\lambda(z)z) + 7v(\lambda \times (z)z))$, и, поскольку $|\lambda(z)z - z| = |z||\lambda(z) - 1| \leqslant \frac{1}{2} e^{-v(\lambda(z)z)} \leqslant \frac{1}{2}$, то $|\alpha(z)| \leqslant C_2 \exp((u + v_2)^{\left[\frac{1}{2}\right]}(z) + 7v^{\left[\frac{1}{2}\right]}(z))$, $z \in \boldsymbol{C}^n$.

Положим $\psi(z) = (u + v_2)^{\left[\frac{1}{2}\right]}(z) + 7v^{\left[\frac{1}{2}\right]}(z) + (n+1)\ln(1 + |z|^2)$. Легко видеть, что $\psi \in PSH(\boldsymbol{C}^n)$ и $\int\limits_{\boldsymbol{C}^n} |\alpha|^2 e^{-2\psi} dV_n < \infty$. По известной теореме Хермандера [1] существует такое решение β уравнения (13), что $\int\limits_{C_n} |\beta|^2 e^{-2\psi - 2\ln(1+|z|^2)} dV_n < \infty$. Несложно показать теперь, что при таком выборе β

$$\int\limits_{\boldsymbol{C}^n} |\Phi|^2 e^{-2\psi - 2v_1 - 2\ln(1+|z|^2)} dV_n < \infty,$$

откуда стандартным способом [1] получается оценка, фигурирующая в заключении теоремы.

Очевидно, что при $z \in \Lambda$ $\Phi(z) = \varphi(z) + \beta(z) f(z) = \varphi(z)$. Теорема доказана.

Заметим, что результат, аналогичный теореме 1, можно получить, рассматривая другое семейство комплексных прямых. Например, вместо семейства прямых, проходящих через начало координат, можно взять семейство прямых, параллельных плоскости переменного z_1 (ср. [4], где доказано, что оба эти семейства являются «почти параллельными» в смысле определения из [4]).

Приведем без доказательства соответствующий результат.

Теорема 5. *Пусть функции u, v_1, v_2, v — те же, что в теореме 1. Пусть, далее, $f(z)$ — целая функция, $\Lambda = \{z : f(z) = 0\}$, Λ не содержит ни одной прямой* $\{(z_2, \ldots, z_n) = \text{const}\}$,

$$\ln|f(z)| \leqslant v_1(z), \quad z \in \boldsymbol{C}^n,$$

$$\ln\left|\frac{\partial f}{\partial z_1}(z)\right| \geqslant -v_2(z), \quad z \in \Lambda.$$

Тогда справедливо заключение теоремы 1.

Формулировку аналогов теорем 2—4 мы опускаем.

Отметим, что простейший пример множества Λ, которое может удовлетворять условиям теоремы 1 (или 5), — это параллельное семейство гиперплоскостей (т. е. нулевое множество функции, зависящей только от одной переменной). В этом случае можно доказать необходимость условий интерполяционности, приведенных в теоремах

2—4, поскольку множество параллельных гиперплоскостей интерполяционно тогда и только тогда, когда на каждой комплексной прямой, проходящей через начало координат, разрешима задача свободной интерполяции в соответствующем классе функций, и можно воспользоваться известными одномерными результатами (см., например, [6]).

В заключение рассмотрим несколько более сложный пример. Пусть $\Lambda = \{(z, w) \in \boldsymbol{C}^2 : e^z + e^w = 1\}$. Известный результат Демайи (он приводится, например, в [3]) состоит в том, что аналитическая на Λ функция со степенным ростом может быть продолжена в $\boldsymbol{C}^2$ до полинома. Из наших результатов теорему Демайи получить нельзя. Можно утверждать (уточняя по ходу доказательства некоторые оценки) лишь следующее:

1) любая функция, аналитическая на Λ и имеющая порядок 1, может быть продолжена до целой с «подскоком» индикатора на $\max(|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Re} w|)$ (соответственно с «подскоком» типа на 1);

2) любая функция, аналитическая на Λ и имеющая порядок больше 1, может быть, продолжена до целой с сохранением индикатора (типа). (В обоих случаях от индикатора требуется непрерывность).

Список литературы: 1. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., 1968. 280 с. 2. *Ронкин Л. И., Руссаковский А. М.* О продолжении с оценками функции, голоморфной на алгебраическом множестве // Ann. Pol. Math. 1985. **46**. С. 403—431. 3. *Berenstein C. A., Taylor B. A.* On the geometry of interpolating varieties // Sem. P. Lelong — H. Skoda. 1980—1981. P. 1—25. 4. *Berenstein C. A., Taylor B. A.* Interpolation problems in $\boldsymbol{C}^n$ with applications to harmonic analysis // I. Anal. Math. 1980. 38. P. 188—254. 5. *Ронкин Л. И.* О продолжении с оценками функции, голоморфной на нулевом множестве псевдополинома // Сиб. мат. журн. 1983. **24**, № 4. С. 150—163. 6. *Руссаковский А. М.* Интерполяция в классах голоморфных функций одной и многих переменных с индикатором, не превосходящим данного: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Х., 1984. 122 с. Машинопись. 7. *Berenstein C. A., Taylor B. A.* A new look at interpolation theory for entire functions of one variable // Adv. Math. 1979. **33**, № 2. P. 109—143.

Поступила в редколлегию 25.04.87