УДК 517.5

С. А. ОРЛОВ

ОПИСАНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА КАНОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ. 1

Работа примыкает к работам [1—6]. Через J обозначена квадратная матрица, удовлетворяющая условиям $J = J^*$, $J^2 = I$.

§ 1. Некоторые инварианты канонических дифференциальных систем

1°. Пусть $W(t, \lambda)$ — квадратная матрица того же размера, что и J, определенная при $0 \leqslant t < \infty$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1. При фиксированном λ: $\operatorname{Im}\lambda > 0$ функция $W(t, \lambda)$ абсолютно непрерывна по t при $t \in [0, \infty]$;

2. При фиксированном $t \in [0, \infty]$ функции $W(t, \lambda)$, $\frac{dW}{dt}(t, \lambda)$ регулярны в области $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $\det W(t, \lambda) \neq 0$;

3. $\Gamma(t, \lambda) \geqslant 0$, $(0 \leqslant t < \infty,\ \operatorname{Im}\lambda > 0)$, где

$$\Gamma(t, \lambda) \overset{\text{def}}{=} J - W(t, \lambda) J W^*(t, \lambda);$$

4. $\Gamma(t_1, \lambda) \leqslant \Gamma(t_2, \lambda)$ $(t_1 < t_2,\ \operatorname{Im}\lambda > 0)$ (монотонность).

Без ограничения общности можно считать, что выполнено условие нормировки $W(0, \lambda) = I$. Такой нормировки всегда можно достичь, переходя к рассмотрению матрицы-функции $\tilde{W}(t, \lambda) = W(0, \lambda)^{-1} \times \times W(t, \lambda)$.

Докажем, что при этих условиях матрица-функция $W(t, \lambda)$ является решением задачи Коши:

$$\frac{dW}{dt}(t, \lambda) = iW(t, \lambda) H(t, \lambda) J, \quad W(0, \lambda) = I, \tag{1.1}$$

где $H(t, \lambda)$ регулярна в области $\operatorname{Im}\lambda > 0$, имеет там неотрицательную мнимую часть: $\operatorname{Im} H(t, \lambda) \geqslant 0$ и при любом λ из этой области функция $H(t, \lambda)$ локально суммируема по t на $(0, \infty)$ (1.2).

Действительно, из монотонности $\Gamma(t, \lambda)$ следует, что

$$0 \leqslant \frac{d\Gamma}{dt}(t, \lambda) = -\frac{dW}{dt}(t, \lambda) J W^* - WJ\frac{dW^*}{dt} = -W\left[W^{-1}\frac{dW}{dt} J + \right.$$
$$\left. + J\frac{dW^*}{dt} W^{*-1}\right] W^*.$$

Положим теперь $H(t, \lambda) \overset{\text{def}}{=} -iW^{-1}(t, \lambda)\frac{dW}{dt}(t, \lambda) J$. Очевидно, верно и обратное предложение. Если $H(t, \lambda)$ удовлетворяет (1.2), то решение задачи Коши (1.1) удовлетворяет условиям (1; 2; 3; 4), ибо

$$\Gamma(b, \lambda) = 2\int_0^b W(t, \lambda) \operatorname{Im} H(t, \lambda) W^*(t, \lambda)\, dt.$$

В частности, всякая абсолютно непрерывная по t J-унитарная матрица $A(t)$, $A(0) = I$ есть решение задачи Коши: $\frac{dA}{dt} = iA(t)C(t)J$, где $C^*(t) = C(t)$, и $C \in L^1_{\mathrm{loc}}$.

2°. Всякая N-функция $H(t, \lambda)$, т. е. функция, удовлетворяющая условиям (1.2), допускает представление $H(t, \lambda) = C(t) + \tilde{H}(t, \lambda)$, где $C(t) = C^*(t)$ — локально суммируема, и $\operatorname{Kern} \tilde{H}(t, \lambda) = \operatorname{Kern} \operatorname{Im} \tilde{H}(t, \lambda) = \operatorname{Kern} \operatorname{Im} H(t, \lambda)$. От матрицы $C(t)$ можно избавиться путем замены $\tilde{W} = WA$, где $A(t) JA^*(t) = J$. Итак, без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{Kern} \operatorname{Im} H(t, \lambda) = \operatorname{Kern} H(t, \lambda)$ **(1.3)**
Условию (1.3), например, удовлетворяют матрицы:

$$1)\ H(t, \lambda) = \lambda H_0(t) + \sum_k \frac{H_k(t)}{\alpha_k - \lambda};\ H_k(t) \geqslant 0,\ \bar{\alpha}_k = \alpha_k; \tag{1.4}$$

$$2)\ H(t, \lambda) = \frac{H(t)}{\alpha(t) - \lambda};\ H(t) \geqslant 0,\ \overline{\alpha(t)} = \alpha(t);$$

$$3)\ H(t, \lambda) = \varphi(t, \lambda) H(t);\ H(t) \geqslant 0,\ \frac{\varphi(t, \lambda) - \overline{\varphi(t, \lambda)}}{2i} \geqslant 0.$$

Легко видеть, что при выполнении условия (1.3)

$$d = \operatorname{def} \Gamma(b, \lambda) = \operatorname{def} \int_0^b \operatorname{Im} H(t, \lambda)\, dt.$$

При $d = 0$ это означает, что неравенство $\Gamma(b, \lambda) > 0$ равносильно неравенству $\int_0^b \operatorname{Im} H(t, \lambda)\, dt > 0$. Если выполняется соотношение (1.3) и $\int_0^b \operatorname{Im} H(t, \lambda)\, dt > 0$, то при замене $\tilde{W}(t, \lambda) = W(t, \lambda) \cdot A(t)$, где $A(t) J A^*(t) = J$, будет $\frac{d\tilde{W}}{dt} = i\tilde{W}[A(t)^{-1} H(t) A(t)^{*-1} + C(t)] J$, где $C(t) = C^*(t)$, и $\frac{dA}{dt} = iA(t) C(t)$. При этом $\int_0^b A(t)^{-1} \cdot \operatorname{Im} H(t, \lambda) A(t) \times$ $\times\, dt > 0$.

Итак, неравенства $\Gamma(b, \lambda) > 0$ и

$$\int_0^b \operatorname{Im} H(t, \lambda)\, dt,\ \int_0^b A(t)^{-1} \operatorname{Im} H(t, \lambda) A^*(t)^{-1}\, dt > 0$$

равносильны.

Впредь будем считать, что $\int_0^b \operatorname{Im} H(t, \lambda)\, dt > 0.$

3°. Заметим, что если $H(t, \lambda)$ продолжаема в нижнюю полуплоскость аналитически по принципу симметрии, т. е. $H(t, \bar{\lambda}) = H^*(t, \lambda)$, то и $W(t, \lambda)$ продолжаема по принципу симметрии в нижнюю полуплоскость, причем $W(t, \bar{\lambda}) = W_1^*(t, \lambda)$, где $W_1 \times (t, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} JW^{-1}(t, \lambda) J$. В этом случае

$$\frac{dW_1}{dt} = -iJH(t, \lambda) W_1(t, \lambda), \ W_1(0, \lambda) = I.$$

Если же граница $\operatorname{Im} \lambda = 0$ «на замке», то мы будем говорить о *принудительном продолжении по принципу симметрии*, понимая под этим $H(t, \bar{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} H^*(t, \lambda), W(t, \bar{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} W_1^*(t, \lambda)$. Всегда $W(t, \lambda) JW_1(t, \lambda) = J$. Так как $\frac{dW_1}{dt} = -iJH(t, \lambda) W_1(t, \lambda)$,

$$\Gamma_1(b, \lambda) = 2 \int_0^b W_1^*(t, \lambda) \operatorname{Im} H(t, \lambda) W_1(t, \lambda)\, dt, \text{ где}$$

$$\Gamma_1(b, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} W_1^*(b, \lambda) JW_1(b, \lambda) - J.$$

Как установлено в [1], имеет место тождество

$$\Gamma^{-1}(b, \lambda) - \Gamma_1^{-1}(b, \lambda) = J.$$

Так как $\Gamma(b, \lambda)$ и $\Gamma_1(b, \lambda)$ возрастают, то существуют пределы

$$R^2(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \to \infty} \Gamma^{-1}(b, \lambda), R_1^2(\lambda) = \lim_{b \to \infty} \Gamma_1^{-1}(b, \lambda),$$

и

$$R^2(\lambda) - R_1^2(\lambda) = J. \tag{1.5}$$

Из соотношения (1.5) следует, что если p, q — числа положительных и отрицательных квадратов матрицы J, то $m \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{rank} R^2(\lambda) \geqslant p$, $m_1 \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{rank} R_1^2(\lambda) \geqslant q$. Теорема об инвариантности рангов $R^2(\lambda)$ и $R_1^2(\lambda)$ утверждает, что m и m_1 не зависит от λ [1]. Из теоремы 2.1 [1] следует, что квадратичные формы $\Gamma(b, \lambda)$ и $\Gamma_1(b, \lambda)$ сходятся на векторах из области значений матриц $R^2(\lambda)$ и $R_1^2(\lambda)$, т. е. число решений $y = C\omega$ и $x = \omega_1 c_1$ однородного уравнения, удовлетворяющих условиям $\int_0^\infty y(t, \lambda) \operatorname{Im} H(t, \lambda) y^*(t, \lambda)\, dt < \infty$ и

$$\int_0^\infty x^*(t, \lambda) \operatorname{Im} H(t, \lambda) x(t, \lambda)\, dt < \infty,$$

равно m и m_1 соответственно. Мы введем пространства $L_2^0[0, b]$

и $L^{\rho}_2[0, \infty)$, полагая $\rho(t, \lambda) = \frac{H((t, \lambda) - H^*(t, \lambda)}{\lambda - \bar{\lambda}}$, и скалярное произведение

$$(x_1, x_2)^b_\rho = \int\limits_0^b x_2^*(t)\rho(t, \lambda)x_1(t)\,dt, \quad (y_1, y_2)^b_\rho = \int\limits_0^b y_1(t)\rho(t, \lambda)y_2^*(t)\,dt.$$

Квадрат нормы $\|y\|^2_\rho$ либо не равен нулю ни при одном λ, либо равен нулю при всех λ из $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Если $H(t, \lambda) = \lambda H(t) + \bar{C}(t)$, где $C(t) = C^*(t)$, $H(t) \geqslant 0$, то $\rho(t, \lambda) = H(t)$. При $J = \begin{bmatrix} 0 & iI_n \\ -iI_n & 0 \end{bmatrix}$ мы будем иметь гамильтонову систему. Если при λ из некоторого интервала вещественной оси функция $H(t, \lambda)$ эрмитова и вещественна, то функция $W(t, \lambda)$ будет J-унитарной на этом интервале и симплектической, т. е. $W(t, \lambda)Jw'(t, \lambda) = J$. По теореме единственности для аналитической функции условие симплектичности будет выполнено при всех λ из $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. В этом случае числа m и m_1 равны.

§ 2. Параметризация диссипативных граничных условий

Пусть $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ — аналитические функции в области $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и образуют пару (A, B), удовлетворяющую условиям

1. $AA^* + BB^* > 0$ (неособенность пары);
2. $AJA^* - BJB^* \leqslant 0$ (J-нерастягиваемость пары) (2.1)

Если пара (A, B) регулярна на отрезке вещественной оси и принимает J-унитарные значения $(AJA^* - BJB^* = 0)$, то она продолжаема в нижнюю полуплоскость по принципу симметрии, т. е. $A(\bar{\lambda}) = A_1^*(\lambda)$, $B(\bar{\lambda}) = B_1^*(\lambda)$, где
3. $A(\lambda)JA_1(\lambda) - B(\lambda)JB_1(\lambda) = 0$ (J-ортогональность). В общем случае мы будем говорить о принудительном продолжении по симметрии, понимая под этим J-ортогональность. Пары (A, B) и (QA, QB), где Q = неособенная, назовем эквивалентными. Из неособенности пары (A, B) следует, что существует единственная, с точностью до эквивалентности, J-ортогональная пара (A_1^*, B_1^*). Пара (A_1^*, B_1^*) удовлетворяет условиям

4. $A_1^*A_1 + B_1^*B_1 > 0$, (неособенность);
5. $A_1^*JA_1 - B_1^*JB_1 \geqslant 0$ (J-растягиваемость). (2.2)

При этом $\operatorname{rang}(BJB^* - AJA^*) = \operatorname{rang}(A_1^*JA_1 - B_1^*JB_1)$ и не зависит от λ, кроме, быть может, множества изолированности. Такие пары подробно изучены в [1], в частности, там установлена параметризация пар с помощью аналитических сжатий.

Граничные условия, определяемые парой $(A(\lambda), B(\lambda))$, назовем *диссипативными*. Пусть $A(\lambda)x(0) + B(\lambda)x(b) = 0$. Эта запись равносильна тому, что $A_1 = Jx(0)$, $B_1 = -Jx(b)$ — J-ортогональна паре $(A(\lambda), B(\lambda))$, поэтому $x^*(0)Jx(0) - x^*(b)Jx(b) \geqslant 0$ **(2.3)**. Аналогично если $y(0)A_1 + y(b)B_1 = 0$, где (A_1^*, B_1^*) J-ортогональна (A, B), то $y(0)Jy^*(0) - y(b)Jy^*(b) \leqslant 0$ **(2.4)**. Параметризация пар имеет следующий вид. Пусть W — постоянная обратимая матрица, удовлетворяющая условию $J - WJW^* > 0$, и пусть $W_1 = JW^{-1}J$, $R = (J - WJW^*)^{-1/2}$, $R_1 = (W_1^* J W_1 - J)^{-1/2}$. Тогда $R^2 - R_1^2 = J$. Матрицы $A(v) = [R_1^2 + R_1 v R] J$, $B(v) = -[R^2 + R_1 v R] wJ$ **(2.5)**, где $v(\lambda)$ — аналитическое сжатие, образуют неособую J-нерастягивающую пару: $AJA^* - BJB^* = R_1(vv^* - I) R_1 \leqslant 0$. Матрицы

$$A_1(v) = J[R^2 + R_1 v R], \quad B_1(v) = -JW_1[R_1^2 + R_1 v R] \tag{2.6}$$

образуют пару, J-ортогональную паре (A, B). Самое важное, что любая J-нерастягивающая пара $(\tilde{A}, \tilde{B})$ эквивалентна паре (A, B), т. е. для любой пары $(\tilde{A}, \tilde{B})$ существует сжатие $\tilde{v}(\lambda)$ такое, что $\tilde{A} = QA(\tilde{v})$, $\tilde{B} = QB(\tilde{v})$, где $Q = [\tilde{A} + \tilde{B}W_1]$. Итак, *формулы* (2.5) *и* (2.6) *осуществляют биективное отображение множества всех J-нерастягивающих пар на множество аналитических сжатий.* В частности, формулы (2.5), (2.6) осуществляют биективное отображение множества всех J-унитарных пар на множество унитарных матриц. Из этих формул видно, что множество всех J-нерастягивающих пар компактно.

§ 3. Параметризация диссипативных функций Грина на конечном промежутке

Рассмотрим краевые задачи в интервале $[0, b]$;

$$-i\frac{dy}{dt}J = yH(t, \lambda) + \varphi(t)\rho(t, \lambda), \quad y(0)A_1(\lambda) + y(b)B_1(\lambda) = 0; \tag{3.1}$$

$$iJ\frac{dx}{dt} = H(t, \lambda)x(t) + \rho(t, \lambda)\psi(t), \quad Ax(0) + Bx(b) = 0, \tag{3.2}$$

где $\rho(t, \lambda) = \dfrac{H(t, \lambda) - H^*(t, \lambda)}{\lambda - \bar{\lambda}}$, $\varphi(t)$, $\psi^*(t) \in L_\rho^2[0, b]$

Каждая из этих краевых задач есть принудительное продолжение другой по принципу симметрии из области $\operatorname{Im}\lambda > 0$ в область $\operatorname{Im}\lambda < 0$. Рассмотрим функции (см. [4])

$$K(s, t, \lambda) = \begin{cases} W_1(s, \lambda) Z_1(\lambda) W(t, \lambda), & 0 \leqslant t < s \leqslant b; \\ W_1(s, \lambda) Z(\lambda) W(t, \lambda), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant b; \end{cases} \tag{3.3}$$

$$K_2(t, s, \lambda) = \begin{cases} W_1(t, \lambda) Z_1(\lambda) W(s, \lambda), & 0 \leqslant s < t \leqslant b; \\ W_1(t, \lambda) Z(\lambda) W(s, \lambda), & 0 \leqslant t < s \leqslant b, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $Z = \frac{1}{2}(iJ + \Omega)$, $Z_1 = \frac{1}{2}(-iJ + \Omega) = Z - iJ$, условия на функцию $\Omega(\lambda)$ будут получены далее. Функция $K(s, t, \lambda)$ имеет при $s = t$ скачок $K(s, s, \lambda) - K(s, s+0, \lambda) = iJ$. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что функции

$$\begin{aligned} x(t, \lambda) &= \int_0^b K_1(t, s, \lambda)\rho(s, \lambda)\psi(s)\,ds, \\ y(t, \lambda) &= \int_0^b \varphi(s)\rho(s, \lambda)K(s, t, \lambda)\,ds \end{aligned} \tag{3.5}$$

являются решениями уравнения (3.1). Очевидно, что если $K(s, t, \lambda)$ удовлетворяет по t граничным условиям, то и $y(t, \lambda)$ будет удовлетворять граничным условиям. Имеем $K(s, 0, \lambda) = W_1(s, \lambda) Z_1(\lambda)$; $K(s, b, \lambda) = W_1(s, \lambda) Z(\lambda) W(b, \lambda)$. Итак,

$$K(s, 0, \lambda) A_1(\lambda) + K(s, b, \lambda) B_1(\lambda) =$$
$$= W_1(s, \lambda) Z_1(\lambda) A_1(\lambda) + W_1(s, \lambda) Z(\lambda) W(b, \lambda) B_1(\lambda) =$$
$$= W_1(s, \lambda) \{Z_1(\lambda) A_1(\lambda) + Z(\lambda) W(b, \lambda) B_1(\lambda)\} = 0, \text{ т. е.}$$
$$(-iJ + \Omega(\lambda)) A_1(\lambda) + (iJ + \Omega(\lambda)) W(b, \lambda) B_1(\lambda) = 0, \text{ откуда}$$

$$\Omega(b, \lambda) = iJ(A_1(\lambda) - W(b, \lambda) B_1(\lambda))(A_1(\lambda) + W(b, \lambda) B_1(\lambda))^{-1}.$$

Так как $J - WJW^* > 0$, то функция $\Omega(b, \lambda)$ регулярна в области $\operatorname{Im}\lambda > 0$, и $\operatorname{Im}\Omega(b, \lambda) \geqslant 0$. Аналогично, подставляя функцию $K_1(t, s, \lambda)$ в граничные условия по t, получим, что

$$\Omega(b, \lambda) = -i(A(\lambda) + B(\lambda) W_1(b, \lambda))^{-1}(A(\lambda) - B(\lambda) W_1(b, \lambda).$$

Так как $A(\lambda) JA_1(\lambda) - B(\lambda) JB_1(\lambda) = 0$, то

$$\Omega(b, \lambda) = iJ(A_1(\lambda) - W(b, \lambda) B_1(\lambda))(A_1(\lambda) + W(b, \lambda) B_1(\lambda))^{-1} =$$
$$= -i(A(\lambda) + B(\lambda) W_1(b, \lambda))^{-1}(A(\lambda) - B(\lambda) W_1(b, \lambda)). \qquad (3.6)$$

Класс функций, определяемый преобразованием (3.6), подробно изучен в [1] и обозначен $N_W(b)$. Из (3.6) следует, что пара $(Z_1(\lambda) J, -Z(\lambda) W(b, \lambda) J$ эквивалентна паре $(A(\lambda), B(\lambda))$, т. е. является J-нерастягивающей. В [1] установлена внутренняя характеристика множества $N_W(b)$. Именно, *для того, чтобы* $\Omega(\lambda) \in N_W(b)$, *необходимо и достаточно, чтобы пара* $(Z_1(\lambda) J, -Z(\lambda) W(b, \lambda) J$ *была J-нерастягивающей*. Заметим, что при выполнении этого условия образ этой пары в преобразовании (3.6) и есть функция $\Omega(\lambda)$. J-форма пары имеет вид

$$Z(\lambda)(J - W(\lambda) JW^*(\lambda)) Z^*(\lambda) - \frac{\Omega(\lambda) - \Omega^*(\lambda)}{2i} \leqslant 0. \qquad (3.7)$$

Матрицы $\tilde{A}_1(\lambda) = JZ$, $\tilde{B}_1 = -JW_1 Z_1$ образуют пару, J-ортогональную паре $(Z_1 J, -ZWJ)$. J-форма J-ортогональной пары имеет вид

$$Z_1^*(\lambda)(W_1^*(\lambda) JW_1(\lambda) - J) Z_1(\lambda) - \frac{\Omega(\lambda) - \Omega^*(\lambda)}{2i} \leqslant 0. \qquad (3.8)$$

Итак, условия (3.7) и (3.8) являются необходимыми и достаточными условиями принадлежности функции $\Omega(\lambda)$ множеству $N_W(b)$. Для класса $N_W(b)$ справедлива лемма Шварца—Пика:
для принадлежности $\Omega(\lambda) \in N_W(b)$ *необходимо и достаточно, чтобы ядро*

$$a(b, \lambda, \mu) = \frac{-2i}{\lambda - \bar{\mu}} \Big[\frac{\Omega(\lambda) - \Omega^*(\mu)}{2i} -$$
$$- Z(\lambda)(J - W(b, \lambda) JW^*(b, \mu)) Z^*(\mu) \Big]$$

было эрмитово неотрицательным. Образ J-унитарной пары в преобразовании (3.6) назовем *канонической функцией*. Каноническая функция из класса $N_W(b)$ определяется одним своим значением в произвольной точке, ибо аналитическая J-унитарная пара $A(\lambda)$, $B(\lambda))$ эквивалентна постоянной паре $(A(\lambda_0), B(\lambda_0))$. Для канонической функции в (3.7) и (3.8) имеет место равенство в любой точке; если для $\Omega(\lambda)$ в (3.7) или (3.8) равенство имеет место хоть в какой-то точке, то тогда равенство имеет место и в любой точке, и функция $\Omega(\lambda)$ — каноническая. Из вышеизложенного следует, что граничные условия могут быть записаны в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} y(0)JZ(\lambda) &= y(b)JW_1(b, \lambda)Z_1(\lambda), \\ Z_1(\lambda)Jx(0) &= Z(\lambda)W(b, \lambda)Jx(b). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Итак, подведем итоги: *аналитические сжатия находятся в биективном соответствии с парами* $(A(\lambda), B(\lambda))$ (2.5). *Пары с помощью преобразования* (3.6) *биективно отображаются на функции класса* $N_W(b)$. *Функции класса* $N_W(b)$ *отображаются биективно на множество диссипативных функций Грина* (3.3), *характеризующихся тем, что пара* $(K(s, 0, \lambda), K(s, b, \lambda))$ — *J-нерастягивающая, т. е.*

$$K(s, 0, \lambda)JK^*(s, 0, \lambda) - K(s, b, \lambda)JK^*(s, b, \lambda) \leqslant 0,$$

или

$$K_1^*(0, s, \lambda)JK_1(0, s, \lambda) - K_1^*(b, s, \lambda)JK_1(b, s, \lambda) \geqslant 0. \tag{3.10}$$

Отметим, что по принципу принудительной симметрии $K(s, t, \bar{\lambda}) = K_1^*(t, s, \lambda)$ **(3.11).** Установим характеристическое свойство оператора R_λ:

$$R_\lambda\psi \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^b K_1(t, s, \lambda)\rho(s, \lambda)\psi(s)\,ds.$$

Так как функция $x(t, \lambda) = (R_\lambda\psi)(t)$ является решением краевой задачи (3.1), и

$$-[x(0)^*Jx(0) - x(b)^*Jx(b)] = \int_0^b \frac{d}{dt}(x^*(t, \lambda)Jx(t, \lambda))\,dt =$$

$$= \int_0^b x^*(t, \lambda)J\frac{dx}{dt}(t, \lambda)\,dt + \int_0^b \left(J\frac{dx}{dt}(t, \lambda)\right)^* x(t, \lambda)\,dt,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{i}(R_\lambda\psi, R_\lambda\psi) &= \frac{(R_\lambda\psi, \psi)_\rho^b - (\psi, R_\lambda\psi)_\rho^b}{i} - \\ &- [x^*(0, \lambda)Jx(0, \lambda) - x^*(b, \lambda)Jx(b, \lambda)]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Так как $x(t, \lambda)$ удовлетворяет граничным условиям, то выражение в квадратной скобке неотрицательно, поэтому

$$(R_\lambda\psi, R_\lambda\psi)_\rho^b \leqslant \frac{(R_\lambda\psi, \psi)_\rho^b - (\psi, R_\lambda\psi)_\rho^b}{\lambda - \bar{\lambda}}. \tag{3.13}$$

Для канонической функции Грина в неравенстве (3.13) будет иметь место равенство; если для функции Грина в неравенстве (3.13) равенство имеет место хотя бы в одной точке λ_0, $\operatorname{Im}\lambda_0 > 0$, то равенство будет иметь место и в любой точке λ, и функция Грина будет канонической.

§ 4. Предельная функция Грина

Покажем, что существуют нормировка $\tilde{W}(t, \lambda) = W(t, \lambda)\, U(t)$, $U(t)\, JU^*(t) = J$ **(4.1)** и последовательность $b_n \to \infty$, $b_n < b_{n+1}$, такие что для любой фиксированной пары (A, B) соответствующая функция Грина имеет предел при $b_n \to \infty$. Установим свойства предельной функции Грина. Класс функций, определяемых преобразованием (3.6), обозначим $N_W(b)$. С ростом b $N_W(b_1) \supseteq N_W(b_1)$, $(b_1 < b_2)$. Пусть

$$N_W(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{b>0} N_W(b). \tag{4.2}$$

В [1], теорема 3.3, установлена внутренняя характеристика множества $N_W(\infty)$. *Для того чтобы $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$, достаточно выполнения в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ одного из неравенств*

$$\frac{\Omega(\lambda) - \Omega^*(\lambda)}{2i} - \lim_{b\to\infty} Z(\lambda)\,(J - W(b, \lambda)\, JW^*(b, \lambda))\, Z(\lambda) \geqslant 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\Omega(\lambda) - \Omega^*(\lambda)}{2i} - \lim_{b\to\infty} Z_1^*(\lambda)\,(W_1^*(b, \lambda)\, JW_1(b, \lambda) - J)\, Z_1(\lambda) \geqslant 0, \tag{4.4}$$

и необходимо, чтобы матричное ядро

$$a(\infty, \lambda, \mu) = \frac{2i}{\lambda - \bar{\mu}} \Bigg[\frac{\Omega(\lambda) - \Omega^*(\mu)}{2i} - \\ - \lim_{b\to\infty} Z(\lambda)\,(J - W(b, \lambda)\, JW^*(b, \mu))\, Z^*(\mu)\Bigg] \tag{4.5}$$

было эрмитово неотрицательным. Формулу (4.5) можно рассматривать как лемму Шварца—Пика для $\Omega \in N_W(\infty)$. Нам понадобится еще теорема 3.5 из [I]: каждая функция $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$ принимает в каждой точке λ, $\operatorname{Im}\lambda > 0$, значение вида $\Omega(\lambda) = i\,[R^2(\lambda) + R_1^2(\lambda) + 2R_1(\lambda)\, v_\lambda R(\lambda)]$ **(4.6)** с некоторой матрицей v_λ, $v_\lambda v_\lambda^* \leqslant I$. Матрица $\Omega(\lambda)$, являющаяся пределом канонических функций, принимает значение (4.6) с унитарной матрицей v_λ, $v_\lambda v_\lambda^* = \mathrm{I}$.

Пронормируем семейство $W(t, \lambda)$ в точке $\lambda = i$ следующим образом. Положим

$$W_0(t) = [R^2(t, i) + R_1(t, i)\, R(t, i]^{-1} \cdot [R_1^2(t, i) + R_1(t, i)\, R(t, i)]. \tag{4.7}$$

Здесь $R(t, i) = \Gamma^{-1/2}(t)$, $R_1(t, i) = \Gamma_1^{-1/2}(t)$. Непосредственной проверкой (учитывая, что $R^2 - R_1^2 = J$) можно убедиться в том, что $J - W(t, i)\, JW^*(t, i) = J - W_0(t)\, JW_0^*(t)$. Следовательно, $W^{-1}(t, i) \times W_0(t) = U(t)$ — J-унитарная матрица. Теперь положим

$$\tilde{W}(t, \lambda) = W(t, \lambda)\, U(t),\ \tilde{W}_1(t, \lambda) = U^*(t)\, W_1(t, \lambda),$$

т. е. $\tilde{W}(t, i) = W_0(t)$. Рассмотрим образ пары $(I, -I)$ в преобразовании (3.6): $\Omega(b, \lambda, I, -I) = iJ(I + \tilde{W}(b, \lambda))(I - \tilde{W}(b, \lambda))^{-1}$ (4.9)

Теорема (1.1) из [2] утверждает:

1. *Если семейство* $W(t, \lambda)$ *нормировано в точке* $\lambda = i$ *к матрице* (4.7) *либо к* J*-модулю, и если из компактного семейства канонических функций* (4.9) *выделить сходящуюся последовательность* $\Omega(b_n, \lambda, I, -I)$, $\lim_{n\to\infty}\Omega(b_n, \lambda, I, -I) = \Omega(\lambda, I)$, *то матрицы* $\Omega(\lambda, i)$, $Z(\lambda, I) = \frac{iJ + \Omega(\lambda, I)}{2}$, $Z_1(\lambda) = \frac{-iJ + \Omega(\lambda, I)}{2}$ *обладают следующими свойствами:*

1) $\operatorname{Im}\Omega(\lambda, I) > 0$, 2) $\operatorname{def} Z(\lambda) = \operatorname{def} R^2(\lambda)$, 3) $\operatorname{def} Z_1(\lambda) = \operatorname{def} R_1^2(\lambda)$.

2. *Образ* $\Omega(b_n, \lambda, A, B)$ *любой неособенной* J*-нерастягивающей пары* $(A(\lambda), B(\lambda))$ *и* J*-ортогональной ей пары* $(A_1^*(\lambda), B_1^*(\lambda))$ *имеет при* $b_n \to \infty$ *предел, который определяется формулами*

$$Z(\lambda, A_1, B_1) = \frac{iJ + \Omega(\lambda, A, B)}{2} = iJA_1(\lambda)[Z(\lambda, I)A_1(\lambda) + Z_1(\lambda, I)B_1(\lambda)]^{-1} \cdot Z(\lambda, I), \tag{4.10}$$

$$Z_1(\lambda, A, B) = -iZ_1(\lambda, I) \cdot [A(\lambda)Z_1(\lambda, I) + B(\lambda)Z(\lambda, I)]^{-1} A(\lambda)J. \tag{4.11}$$

3. *Матрицами* (4.10) *и* (4.11) *исчерпывается множество функций* $N_W(\infty)$.

Следствие из теоремы 1.1 [2]. *На аналитическом подпространстве векторов размерности* d_1, *удовлетворяющих условию* $f(\lambda)Z_1(\lambda, I) = 0$, *все функции* $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$ *совпадают. На аналитическом подпространстве векторов размерности* d, *удовлетворяющих условию* $Z(\lambda, I)g(\lambda) = 0$, *все функции* $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$ *совпадают.* Итак, теорема 1.1 из [2] утверждает, что каждая функция $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$ является пределом при $b_n \to \infty$ последовательности $\Omega(b_n, \lambda, A, B)$, где A, B — некоторая фиксированная пара, предел определяется этой парой формулами (4.10) и (4.11). Таким образом, формулы (4.10) и (4.11) осуществляют однозначное отображение множества всех пар на множестве $N_W(\infty)$. Однако в силу следствия это отображение не биективно, если хотя бы одна из матриц $R(\lambda)$, $R_1(\lambda)$ необратима.

Например, если $R(\lambda) > 0$, то $Z(\lambda, I)$ обратима. В этом случае в силу критерия сходимости монотонного семейства [1], нормированная матрица $\tilde{W}(b, \lambda)$ имеет предел при $b \to \infty$,

$$\tilde{W}(\lambda) = \lim_{b\to\infty}\tilde{W}(b, \lambda) = Z^{-1}(\lambda, I)Z_1(\lambda, I)$$

и, следовательно, $\operatorname{rang}\tilde{W}(\lambda) = \operatorname{rang}\tilde{Z}_1(\lambda, I) = \operatorname{rang} R_1(\lambda)$. В этом случае (4.9) может быть преобразовано в (3.6), но биективность иметь места не будет вследствие необратимости $R_1(\lambda)$.

Нормировка $W(t, \lambda)$ является по существу заменой переменной $\tilde{W}(t, \lambda) = W(t, \lambda)U(t)$. Однако мы можем избежать замены переменной, относя множитель $U(t)$ к матрице, задающей граничные условия. Преобразование (3.6) имеет вид (для нормированной матрицы $\tilde{W}$):

$$\Omega^{(b_n)}(\lambda, A, B) = \Omega^{(b_n)}(\lambda, A_1, B_1) = iJ(A_1(\lambda) - W(b_n, \lambda)U(b_n)B_1(\lambda)(A_1(\lambda) + W(b_n, \lambda)U(b_n)B_1(\lambda))^{-1} = -i(A(\lambda) + B(\lambda)U^*(b_n)W_1(b_n, \lambda))^{-1}\cdot(A(\lambda) - B(\lambda)U^*(b_n)W_1(b_n, \lambda))J.$$

Теорема 1.1 утверждает, что при $b_n \to \infty$ существует предел, определяемый формулами (4.10), (4.11), и такими пределами исчерпывается множество $N_W(\infty)$. Если теперь писать граничные условия в виде $y(0)A_1(\lambda) + y(b_n)U(b_n)B_1(\lambda) = 0$ и $A(\lambda)x(0) + B(\lambda)U^*(b_n)x(b_n) = 0$, то функции Грина $K^{b_n}(s, t, \lambda, A, B)$ и $K_1^{b_n}(t, s, \lambda, A, B)$ при любой паре (A, B) имеют предел, определяемый матрицами $Z(\lambda, A_1, B_1)$ и $Z_1(\lambda, A, B)$, (4.10) и (4.11).

Из следствия теоремы 1.1 [2] вытекает:

1. *На аналитическом подпространстве векторов размерности* d_1, *удовлетворяющих условию* $f(\lambda)Z_1(\lambda, I) = 0$, *все предельные функции Грина совпадают.*

2. *На аналитическом подпространстве векторов размерности* d, *удовлетворяющих условию* $Z(\lambda, I)g(\lambda) = 0$, *все предельные функции Грина совпадают.*

Пусть функция $\Omega(\lambda)$ регулярна при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $Z = \frac{iJ + \Omega}{2}$, $Z_1 = \frac{-iJ + \Omega}{2}$. Положим

$$K(s, t, \lambda) = \begin{cases} W_1(s, \lambda)Z_1(\lambda)W(t, \lambda), & 0 \leqslant t < s < \infty; \\ W_1(s, \lambda)Z(\lambda)W(t, \lambda), & 0 \leqslant s \leqslant t < \infty; \end{cases} \tag{4.12}$$

$$K_1(t, s, \lambda) = \begin{cases} W_1(t, \lambda)Z_1(\lambda)W(s, \lambda), & 0 \leqslant s \leqslant t < \infty; \\ W_1(t, \lambda)Z(\lambda)W(s, \lambda), & 0 \leqslant t < s < \infty. \end{cases} \tag{4.13}$$

Определение. *Функции (4.11), (4.12) назовем диссипативными функциями Грина в интервале* $[0, \infty)$, *если*

$$K(s, 0, \lambda)JK^*(s, 0, \lambda) - \lim_{b\to\infty} K(s, b, \lambda)JK^*(s, b, \lambda) \leqslant 0, \tag{4.14}$$

$$K_1^*(0, s, \lambda)JK_1(0, s, \lambda) - \lim_{b\to\infty} K_1^*(b, s, \lambda)JK_1(b, s, \lambda) \geqslant 0. \tag{4.15}$$

Теорема 4.1. *Всякая предельная функция Грина диссипативна на интервале* $[0, \infty)$. *Всякая диссипативная на интервале* $[0, \infty)$ *функция Грина есть предельная функция Грина.*

Доказательство. Имеем $K(s, 0, \lambda) = W_1(s, \lambda)Z_1(\lambda)$, $K(s, b, \lambda) = W_1(s, \lambda)Z(\lambda)W(b, \lambda)$. Следовательно, пара $(K(s, 0, \lambda), K(s, b, \lambda))$ эквивалентна паре $(Z_1(\lambda), Z(\lambda)W(b, \lambda))$, поэтому в силу (3.7)

$$K(s, 0, \lambda)JK^*(s, 0, \lambda) - K(s, b, \lambda)JK^*(s, b, \lambda) = W_1(s, \lambda)\times \left[Z(\lambda)(J - W(b, \lambda)JW^*(b, \lambda))Z^*(\lambda) - \frac{\Omega(\lambda) - \Omega^*(\lambda)}{2i}\right]\cdot W_1^*(s, \lambda).$$

Откуда следует, что (4.14) равносильно (4.3); аналогично, (4.15) равносильно (4.4). В силу теоремы 3.3 из [1], (4.3) и (4.4) являются необходимыми и достаточными условиями того, что $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$. Итак, если $K(s, t, \lambda)$ и $K_1(t, s, \lambda)$ — предельные функции Грина, то $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$, следовательно, выполняются неравенства (4.3) и (4.4), а следовательно, и (4.14), (4.15), т. е. $K(s, t, \lambda)$ и $K_1(t, s, \lambda)$ — диссипативные функции Грина в $[0, \infty)$. Наоборот, если выполняются неравенства (4.14) и (4.15), то выполняются неравенства (4.3) и (4.4). Следовательно, $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$, и поэтому $K(s, t, \lambda)$, $K_1(t, s, \lambda)$ — диссипативные функции Грина в $[0, \infty)$. Теорема доказана. Формулы (4.12), (4.13) и (4.10), (4.11) устанавливают параметризацию диссипативных функций Грина в интервале $[0, \infty)$, т. е. доказана также

Теорема 4.2. *Каждой J-нерастягивающей паре $(A(\lambda), B(\lambda))$ и J-ортогональной ей паре $(A_1(\lambda), B_1(\lambda))$ отвечает по формулам* (4.10) *и* (4.11) *функция $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$, а функции $\Omega(\lambda) \in N_W(\infty)$ отвечает по формуле* (4.12) *и* (4.13) *диссипативная функция Грина в интервале* $[0, \infty)$. *Этим исчерпывается все множество диссипативных функций Грина в интервале* $[0, \infty)$.

Список литературы: 1. *Орлов С. А.* Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра, и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов /Изв. АН СССР, сер. мат. 1976. **40.** № 3. С. 593—644. 2. *Орлов С. А.* Параметризация предельных матричных кругов, аналитически зависящих от параметра//Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1984. Вып. 41. С. 96—107. 3. *Орлов С. А.* Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов/ ДАН СССР. 1953. **92,** № 3. С. 483—486. 4. *Орлов С. А.* К теории резольвенты одномерной регулярной краевой задачи//ДАН СССР. 1956. **111.** № 3. С 538—541. 5. *Орлов С. А.* Конструкция резольвент и спектральных функций одномерных линейных самосопряженных сингулярных дифференциальных операторов $2n$-го порядка//ДАН СССР. 1956. **111,** № 6. С. 1175—1177. 6. *Орлов С. А.* О сходимости и характере расходимости монотонных семейств аналитических J-сжимающих семейств матриц-функций//ДАН АрмССР. 1974. **59.** № 4. С. 193—198.

Поступила в редколлегию 21.01.87