УДК 517.53/57

Г. М. ЛЕВИН

К ТЕОРИИ ИТЕРАЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

1. **Введение.** 1.1. Значительные успехи, достигнутые в последнее время в теории одномерных динамических систем, связаны во многом с изучением конкретных семейств отображений. В первую очередь, это относится к квадратичному семейству:

$$f_c : z \to z^2 - c. \tag{1.1}$$

Для комплексных значений параметра c обнаружено континуальное разнообразие в поведении итераций отображения $f_c: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Границей, отделяющей устойчивые отображения друг от друга, является граница так называемого множества Мандельброта M [1]. Оно состоит из тех $c \in \mathbf{C}$, для которых итерации $f_c^n(0) = 0(1)$ при $n \to \infty$. Итерации точки $z = 0$ играют особую роль, потому что это единственная критическая точка функции f_c. Одно из свойств M состоит в том, что каждая точка границы M является предельной для сверхустойчивых значений c (значение параметра c называется сверхустойчивым, если f_c имеет сверхустойчивый цикл, т. е. цикл, в котором содержится критическая точка). В [2] показано, что сверхустойчивые значения c асимптотически распределены по некоторой мере с носителем на ∂M. В настоящей работе дано обобщение этого утверждения на семейство

$$z \to z^p - c \, (p \in \mathbf{N},\ p \geqslant 2). \tag{1.2}$$

Приводятся свойства этой меры, а также рассматриваются некоторые ряды, связанные с множеством M и его обобщением на семейство (1.2). Наконец, описан линейный алгоритм для вычисления моментов меры (для $p = 2$).

1.2. Напомним основные определения. Последовательное применение отображения $f: U \to U$ порождает итерации $f^n: U \to U$; $f^1 \equiv f$, $f^{n+1} = f(f^n)$, $(x_n)_{n \geqslant 0}$, $x_n = f^n(x_0)$ — орбита точки x_0; если $x_n = x_0$, то x_0 — периодическая точка периода n; наименьший из периодов x_0 есть некоторое $m \geqslant 1$, причем $m \mid n$; точки $\{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\}$ образуют цикл; если f дифференцируемо, то мультипликатор этого цикла есть $\lambda = (f^m)'(x_0) = \prod_{j=0}^{m-1} f'(x_j)$; цикл называется устойчивым, нейтральным или неустойчивым, смотря по тому, лежит ли λ соответственно внутри, на границе или вне единичного круга; цикл с участием критической точки называется сверхустойчивым (для него $\lambda = 0$).

2. **Мера на бифуркационном множестве.** 2.1. Зафиксируем $p \in \mathbf{N}$, $p \geqslant 2$, и рассмотрим семейство

$$f_c: z \to z^p - c. \tag{2.1}$$

Обозначим через M_p (или просто M) множество тех $c \in \mathbf{C}$, для которых $f_c^n(0) = 0(1)$ $(n \to \infty)$. Граница M_p состоит из тех c, при которых семейство (2.1) перестает быть устойчивым [3], [1].

Пусть $q_n(c) = f_c^n(0)$ — итерации точки ноль; q_n — полином степени p^{n-1}. Множество всех его корней обозначим через P_n: $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ — сверхустойчивые значения c. $P \subset M$ и множество предельных для P точек есть ∂M [3]. Нетрудно показать, что M ограничено, замкнуто, совершенно, и каждая компонента его внутренности односвязна. Теорема Дуади — Хаббарда [1] утверждает, что при $p = 2$ M_2

связно. С очевидными изменениями это доказательство проходит и при $p > 2$.

2.2. Рассмотрим несколько более общую ситуацию. Пусть $f_c(z) = z^p + a_1(c)z^{p-1} + \cdots + a_p(c)$ — полином степени $p \geqslant 2$, коэффициенты которого $a_i(c)$ суть голоморфные функции в области $D \subset \mathbf{C}$.

Пусть $a \in D$, q_0 — критическая точка $f_a(z)$. Перейдя к локальной координате $\xi : U \to V$, где V — окрестность точки a, $\tau = 0 \in U$, можно считать, что q_0 продолжается до голоморфной в U функции q. Обозначим $q_m = f_c^m(q)$.

Лемма. *Если для некоторого $m \geqslant 1$ $q_m \not\equiv q$ и $\tau = 0$ — ноль кратности l функции $q_m - q$, то 0 — ноль той же кратности функций $q_{nm} - q$ $(n = 2, 3, \ldots)$.*

Доказательство. Применим индукцию по n. По условию, $q_m - q = \tau^l \cdot Q_1(\tau)$, $Q_1(0) \neq 0$. Предположим, что $q_{nm} - q = \tau^l \times Q_n(\tau)$, $Q_n(0) \neq 0$. Так как $f'(q) = 0$, то $q_{(n+1)m} - q = f^m(q +$

$$+ \tau^l Q_n) - q = (f^m(q) - q) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k f^m}{dz^k}(q) \cdot (\tau^l Q_n)^k = \tau^l Q_1 +$$

$+ O(\tau^{2l}) = \tau^l Q_{n+1}(\tau)$, $Q_{n+1}(0) \neq 0$.

2.3. Вернемся к семейству (2.1) и введем функции

$$\sigma_n(c) = \frac{q_n'(c)}{p^{n-1} q_n(c)}, \quad n \in \mathbf{N};$$

$\sigma_n(c)$ голоморфна в $\mathbf{C} \setminus M$, так как $q_n(c) \neq 0$, $c \in \mathbf{C} \setminus M$.

Лемма. *Существует $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n(c) = \sigma(c)$, $c \in \mathbf{C} \setminus M$. Функция $\sigma(c)$ голоморфна в $\mathbf{C} \setminus M$, $\sigma(c) \sim \frac{1}{c}$ $(c \to \infty)$.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой Бетхера [1]: если $f(z) = z^p + \cdots + a_p$ — полином, то $(f^n(z))^{p^{-n}} = z + \cdots$ равномерно сходится в окрестности $z = \infty$ при $n \to \infty$ к голоморфной в ∞ функции. Отсюда следует сходимость последовательности $(q_n)^{p^{-n}}$ в каждой точке $\mathbf{C} \setminus M$. Эта последовательность отделена от 0 и ∞ в окрестности каждой точки $c \in \mathbf{C} \setminus M$. Взяв логарифмическую производную, получим искомую сходимость.

2.4. Напомним, что P_n — это множество корней $q_n(c)$ (с учетом кратности).

Лемма. *Пусть функция $F(c)$ голоморфна в некоторой окрестности компакта M. Тогда существует*

$$\Phi(F) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{p^{n-1}} \sum_{c \in P_n} F(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(c)\,\sigma(c)\,dc,$$

где Γ — гладкий контур, охватывающий M.

Доказательство. По теореме о вычетах,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(c)\,\sigma(c)\,dc = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F \frac{q_n'}{p^{n-1} q_n} dc = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{p^{n-1}} \sum_{c \in P_n} F(c).$$

2.5. **Теорема.** *Пусть $F: \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ — непрерывная функция. Тогда существует*

$$\Phi(F) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{p^{n-1}} \sum_{c \in P_n} F(c).$$

Доказательство. Если $F = Re(u)$, где u — полином, то утверждение следует из п. 2.4. Если же F — произвольная непрерывная функция, то по теореме Уолша — Лебега [4], на границе M функция F есть равномерный предел гармонических полиномов. Воспользовавшись п. 2.2 и доказанным, получим искомое.

2.6. Пусть μ_n — вероятностная мера, равномерно распределенная в корнях полинома $q_n(c)$. Мы доказали, что μ_n слабо сходится при $n \to \infty$ к мере μ с носителем на ∂M; μ определяется линейным функционалом $\Phi \in C(\mathbf{C})^*$.

3. **Ядро меры.** Нелинейность отображений f_c приводит к быстрой сходимости функций σ_n в ∞, что, в частности, позволяет описать ядро меры μ (функционала Φ).

3.1. **Лемма.** $\sigma(c) = \sigma_n(c) + O(c^{-p^n})$, $c \to \infty$.

Доказательство. Соотношение $q_{n+1} = q_n^p - c$ влечет:

$$\frac{\ln q_{n+1}}{p^n} = \frac{\ln q_n}{p^{n-1}} + O(c^{-(p^n-1)}),$$

откуда дифференцированием получим требуемое.

3.2. Лемма. *Пусть $F(c)$ — полином степени l и $l \leqslant p^n - p^{n-1} - 2$. Тогда*

$$\int F q_n \, d\mu = 0.$$

Доказательство. В силу п. 2.4,

$$\int F q_n \, d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F q_n \sigma \, dc =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(c) q_n(c) \left(\frac{q_n'(c)}{p^{n-1} q_n(c)} + O(c^{-p^n}) \right) dc =$$

$$= \frac{1}{p^{n-1}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(c) q_n'(c) \, dc + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma O(c^{l+p^{n-1}-p^n}) \, dc = 0.$$

3.3. Следствие. Пусть $l \geqslant 0$, $m \geqslant 1$, $1 \leqslant r \leqslant p-1$, $0 \leqslant j \leqslant (p-r)p^{m-1} - 2$, $\varepsilon_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $k = 1, 2, \ldots, l$, $\varepsilon_l \geqslant 1$. Тогда

$$\int c^j q_m^r q_{m+1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot q_{m+l}^{\varepsilon_l} \, d\mu = 0.$$

Доказательство. Пользуемся п. 3.2 и тем, что $\deg(c^j q_m^r \times q_{m+1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot q_{m+l}^{\varepsilon_l - 1}) \leqslant p^{m+l} - p^{m+l-1} - 2$.

3.4. **Лемма.** *При $l \geqslant 0$, $1 \leqslant r \leqslant p-1$, $j \leqslant 0$ и $j + l \leqslant (p-r)p^{m-1} - 2$*

$$\int c^j q_m^{lp+r} \, d\mu = 0.$$

Доказательство. Индукцией по l докажем формулу $q_m^{lp} = c^l + \ldots$ (3.1), где точками отмечена линейная комбинация членов вида $c^j q_{m+1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot q_{m+k}^{\varepsilon_k}$ **(3.2)** ($\varepsilon_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $0 \leqslant j \leqslant l-1$). В самом деле, при $l=0$ (3.1) очевидна. Далее,

$$q_m^{(l+1)p} = (q_{m+1} + c)\, q_m^{lp} = q_{m+1}\, q_m^{lp} + c q_m^{lp},$$

и $q_{m+1} c^j q_{m+1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot q_{m+k}^{\varepsilon_k}$ есть линейная комбинация членов вида (3.2) с $j \leqslant l$.

(3.1) доказано. Осталось умножить обе части на q_m^r и воспользоваться п. 3.3.

4. **Функции, связанные с бифуркационным множеством.** Напомним, что данному фиксированному натуральному $p \geqslant 2$ сопоставлено бифуркационное множество M семейства (2.1). При $p=2$ это множество Мандельброта.

4.1. Рассмотрим следующие функции, определенные и голоморфные в ∞: $\varphi_n = (q_n)^{p^{-n}}$, φ_n однозначно выделяется условием

$\frac{\varphi_n(c)}{c} \to 1$ $(c \to \infty)$; по теореме Бетхера, определена $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$.

Пусть $\psi = \varphi^{-1}$ — обратное отображение. Заметим, что

$$\sigma_n = \frac{\varphi_n'}{\varphi_n}, \quad \sigma = \frac{\varphi'}{\varphi}.$$

Определим последовательность чисел $(C_l)_{l \geqslant 0}$ рядом Лорана, сходящимся в ∞:

$$\psi(\omega) = \omega + C_0 + \frac{C_1}{\omega} + \cdots + \frac{C_l}{\omega^l} + \cdots.$$

4.2. *Замечание.* (1) числа C_l зависят, конечно, и от фиксированного p; (2) так как M связано, то φ_n и φ однозначно продолжаются в $\mathbf{C} \setminus M$, причем φ однолистно отображает $\mathbf{C} \setminus M$ на $D = \{\omega : |\omega| > 1\}$, а $\psi: D \to \mathbf{C} \setminus M$ — обратное отображение.

4.3. Мы покажем, что среди чисел C_l много нулей. Для доказательства нужна

Лемма. *Пусть* $1 \leqslant r \leqslant p-1$, $m \geqslant 1$, $0 \leqslant l \leqslant (p-r)p^{m-1} - 2$. *Тогда*

$$(\varphi(c))^{(lp+r)p^{m-1}} = q_m^{lp+r} + \sum_{j=1}^{l} R_j(c)\, q_m^{(l-j)p+r} + O\left(c^{-((p-r)p^{m-1}-l-1)}\right), \quad c \to \infty,$$

где $R_j(c)$ — полином степени не выше j.

Доказательство. Умножим равенство

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{q_n'}{p^{n-1} q_n} + O(c^{-p^n})$$

на k и проинтегрируем, получим

$$\varphi^k = q_n^{kp^{1-n}} + O(c^{-p^n+1+k}).$$

Пусть теперь $k=(lp+r)p^{m-1}$, $0\leqslant l\leqslant (p-r)p^{m-1}-2$, $n-m=\alpha$, причем α таково, что $p^{\alpha}\leqslant lp+r<p^{\alpha+1}$. Тогда

$$\varphi^{(lp+r)p^{m-1}}=q_{m+\alpha}^{(lp+r)p^{-\alpha}}+O\left(c^{-(p^{m+\alpha}-(lp+r)p^{m-1}-1)}\right).$$

По индукции заключаем, что α-я итерация (2.1)

$$f_c^{\alpha}(z)=z^{p^{\alpha}}+p_1^{(\alpha)}(c)\,z^{p^{\alpha}-p}+\cdots+p_i^{(\alpha)}(c)\,z^{p^{\alpha}-ip}+\cdots,$$

где $p_i^{(\alpha)}$ — многочлен степени i. Поэтому

$$(q_{m+\alpha})^{(lp+r)p^{-\alpha}}=(f^{\alpha}(q_m))^{(lp+r)p^{-\alpha}}=$$

$$=(q_m^{p^{\alpha}}+\cdots+p_i^{(\alpha)}z^{p^{\alpha}-ip}+\cdots)^{(lp+r)p^{-\alpha}}=$$

$$=q_m^{lp+r}\left(1+\cdots+\frac{p_i^{(\alpha)}}{q_m^{ip}}+\cdots\right)^{(lp+r)p^{-\alpha}}=$$

$$=q_m^{lp+r}\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{R_j(c)}{q_m^{jp}}\right)=q_m^{lp+r}+\sum_{j=1}^{\infty}R_j\,q_m^{(l-j)p+r},$$

где $R_j(c)$ — полином степени не выше j (он не зависит от α, так как α однозначно определяется по l, r, p). Осталось заметить, что при $j=l+1$

$$q_m^{r-p}R_{l+1}=O\left(c^{-(p^{m-1}(p-r)-l-1)}\right).$$

4.4. **Теорема.** $C_{(lp+r)p^{m-1}}=0$,

$$r\in\{1,\ 2,\ldots,\ p-1\},\ 0\leqslant l\leqslant (p-r)p^{m-1}-3.$$

Доказательство. Для достаточно большого ρ имеем

$$C_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\omega|=\rho}\omega^{k-1}\psi(\omega)\,d\omega=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varphi(|\omega|=\rho)}c\,\varphi^k(c)\,\sigma(c)\,dc.$$

Теперь пользуемся пп. 4.3 и 3.4.

4.5. *Замечание*. Доказанная теорема означает, что для каждого $p\geqslant 2$ нули в соответствующей последовательности $(C_l)_{l>0}$ разбиваются на $p-1$ подпоследовательность, номера в которых почти — периодичны с почти — периодом p^n, $n\in\mathbf{N}$.

4.6. При $p=2$, в частности, получается последовательность чисел $(C_l)_{l>0}$, в которой $C_{(2l+1)2^{m-1}}=0$, $m\geqslant 3$, $l=0,\ 1,\ldots,\ 2^{m-1}-3$.

5. **Арифметические свойства коэффициентов.** Остановимся на случае квадратичного семейства и зафиксируем $p=2$.

Напомним, что $\varphi(c)$ однолистно отображает внешность множества Мандельброта на внешность единичного круга, $\sigma=\dfrac{\varphi'}{\varphi}$, $\psi=\varphi^{-1}$.

Вместе с последовательностью $(C_l)_{l>0}$ рассмотрим еще две последовательности, которые определяются разложениями φ и σ в ∞:

$$\varphi(c)=c+B_0+\frac{B_1}{c}+\cdots+\frac{B_l}{c^l}+\cdots,$$

$$\sigma(c)=\frac{1}{c}\left(1+\frac{A_1}{c}+\frac{A_2}{c^2}+\cdots+\frac{A_l}{c^l}+\cdots\right).$$

Числа A_l — это моменты меры μ:

$$\int c^l\,d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} c^l\,\sigma(c)\,dc = A_l.$$

Пусть $P_n = (b_{k,n})_{k=1}^{2^{n-1}}$ — множество всех корней $q_n(c)$. Так как

$$\frac{q_n'(c)}{2^{n-1}\,q_n(c)} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{c^{l+1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(b_{k,n})^l,\ c\to\infty,$$

то из леммы п. 3.1 при $p=2$ получим

$$A_l = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(b_{k,n})^l,\ n\geqslant 1,\ 0\leqslant l\leqslant 2^n-2.$$

5.1. Мы вычислим точный двоичный порядок чисел A_l, B_l и C_{2l+1}.

Двоичным порядком $\operatorname{ord}_2 m$ ненулевого целого m называется наибольшее целое l, такое, что 2^l делит m; двоичный порядок дроби $\operatorname{ord}_2\frac{m}{n} = \operatorname{ord}_2 m - \operatorname{ord}_2 n$; $\operatorname{ord}_2 0 = +\infty$.

5.2. Положим для удобства $c = -t$, и пусть

$$q_n(c) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} a(i,\ n)\,t^i.$$

Коэффициенты $a(i,\ n)$ суть натуральные числа (например, $a(1,\ n) = a(2^{n-1},\ n) = 1$). Поэтому и коэффициенты разложения q_n'/q_n в ∞ есть целые числа; учитывая 3.1, получим, что A_l, а также B_l и C_l разлагаются в конечные двоичные дроби (при $p=2$).

5.3. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр в двоичном разложении натурального числа n. Хорошо известна формула $S(n) = n - \operatorname{ord}_2(n!)$, $n\in\mathbf{N}$. Отсюда $S(n)+S(m)-S(n+m) = \operatorname{ord}_2 C_{n+m}^n \geqslant 0$,

где $C_{n+m}^n = \frac{(m+n)!}{n!\,m!}$ — число сочетаний из $m+n$ по n.

Далее нам понадобится несколько утверждений, доказательств которых мы не приводим ввиду элементарности.

5.4. **Лемма.** *Пусть* $l\geqslant 3$. *Сумма*

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]} C_l^k$$

нечетна, если l *не есть степень двух, и четна в противном случае.*

5.5. **Лемма.** *При* $1\leqslant l\leqslant 2^{n-1}-2$, $n\geqslant 2$, *сумма*

$$\sum_{k=l}^{\left[\frac{l+2^{n-1}-1}{2}\right]} C_{l+2^{n-1}}^k$$

нечетна.

5.6. **Лемма.** *При* $2^{n-1} \leqslant l \leqslant 2^n - 2$, $n \geqslant 2$, *сумма*

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} C^l_{2^{n-1}+l-k}$$

нечетна

5.7. **Теорема.** $\operatorname{ord}_2 a(i, n) = S(i) - 1$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}$.

Доказательство. Заметим сначала, что если $D = \sum_{k=1}^{l} D_k$ — сумма l ненулевых целых чисел, $\operatorname{ord}_2 D_k = p_k \geqslant p_0$ для всех k и $\operatorname{ord}_2 D_k = p_0$ для нечетного числа номеров k, то $D \neq 0$ и $\operatorname{ord}_2 D = p_0$.

Утверждение теоремы будем доказывать индукцией по n. Так как $a(1,1) = a(1,2) = a(2,2) = 1$, то при $n = 1,2$ теорема верна. Предположим, что $\operatorname{ord}_2 a(l, n) = S(l) - 1$, $1 \leqslant l \leqslant 2^{n-1}$, и докажем, что $\operatorname{ord}_2 a(l, n+1) = S(l) - 1$, $1 \leqslant l \leqslant 2^n$. Разберем случай, когда l четно. В случае нечетного l доказательство аналогично.

1) $1 \leqslant l \leqslant 2^{n-1}$.

Так как $q_{n+1} = q_n^2 + t$, то при $l \leqslant 3$

$$a(l, n+1) = 2 \sum_{k=1}^{\frac{l}{2}-1} a(k, n)\, a(l-k, n) + \left(a\left(\frac{l}{2}, n\right)\right)^2. \qquad (5.1)$$

Имеем

$$\operatorname{ord}_2 2a(k, n)\, a(l-k, n) = 1 + \operatorname{ord}_2 a(k, n) + \\ + \operatorname{ord}_2 a(l-k, n) = 1 + S(k) - 1 + S(l-k) - 1 = \\ = S(k) + S(l-k) - 1 \geqslant S(l) - 1$$

в силу 5.3, причем равенство имеет место, когда C_l^k нечетно;

$$\operatorname{ord}_2 \left(a\left(\frac{l}{2}, n\right)\right)^2 = 2\left(S\left(\frac{l}{2}\right) - 1\right) = 2 \cdot S\left(\frac{l}{2}\right) - 2 = \\ = 2 \cdot S(l) - 2 \geqslant S(l) - 1;$$

равенство имеет место, если l — степень двух.

Итак, число слагаемых в сумме (5.1) с наименьшим порядком $p_0 = S(l) - 1$ равно числу нечетных слагаемых в сумме

$$\sum_{k=1}^{\frac{l}{2}-1} C_l^k,$$

если l — не степень 2, и на единицу больше, если l — степень **2.** В обоих случаях в силу 5.4 это число нечетно, что и доказывает утверждение при $1 \leqslant l \leqslant 2^{n-1}$.

2) $2^{n-1} + 1 \leqslant l \leqslant 2^n$.

При $l = 2^n$ $\operatorname{ord}_2 a(2^n, n+1) = \operatorname{ord}_2 1 = S(2^n) - 1$.

При $l = 2^{n-1} + r$, $1 \leqslant r \leqslant 2^{n-1} - 1$, рассуждаем аналогично 1) и пользуемся 5.5.

5.8. Теперь мы можем вычислить двоичный порядок моментов A_l. Напомним формулы Ньютона [5]: если δ_l — сумма l-х степеней корней полинома

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, \text{ то при } l \leqslant n$$

$$\delta_l + \delta_{l-1} a_1 + \delta_{l-2} a_2 + \cdots + \delta_1 a_{l-1} + (-1)^l\, l\, a_l = 0,$$

а при $l > n$ $\delta_l + \delta_{l-1} a_1 + \delta_{l-2} a_2 + \cdots + \delta_{l-n} a_n = 0$.

5.9. **Теорема.**

$$\operatorname{ord}_2(A_l) = -S(l),\ l = 1,\ 2, \ldots .$$

Доказательство. Обозначим

$$R(l,\ n) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (-b_{k,n})^l,\ n \in \mathbf{N},\ l = 0,\ 1,\ 2, \ldots .$$

$(b_{k,n})_{k=1}^{2^{n-1}}$ — корни уравнения $q_n = 0$).

Тогда

$$R(l,\ n) = (-1)^l \cdot 2^{n-1} A_l,\ 1 \leqslant l \leqslant 2^n - 2. \tag{5.2}$$

Поэтому утверждение теоремы равносильно тому, что $\operatorname{ord}_2 R(l,\ n) = n - 1 - S(l),\ 1 \leqslant l \leqslant 2^n - 2$ (5.3).

Предположим, что (5.3) доказано для некоторого $n \geqslant 2$ и всех $l = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 2^{n-1} - 2$, и докажем его для $l = 2^{n-1} - 1,\ 2^{n-1}, \ldots$ $\ldots,\ 2^n - 2$. Тогда в силу (5.2) равенство (5.3) будет доказано для $n + 1$ и $l = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 2^n - 2$. Отсюда по индукции будет вытекать справедливость теоремы для всех l.

Так как

$$\frac{q'_2}{2q_2} = \frac{2c - 1}{2(c^2 - c)} = \frac{1}{c}\left(1 + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2c^2} + \cdots\right),$$

то $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}$, т. е. при $n = 2,\ 3$ и $l = 1,\ 2$ (5.3) выполняется. Пусть $\operatorname{ord}_2 R(l,\ n) = n - 1 - S(l)$ для некоторого $n \geqslant 3$ и всех $l = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 2^{n-1} - 2$. Покажем, что $\operatorname{ord}_2 R(l,\ n) = n - 1 - S(l)$ для $l = 2^{n-1} - 1, \ldots,\ 2^n - 2$.

Так как $\deg q_n = 2^{n-1}$ и $q_n(0) = 0$, то по формулам Ньютона

$$\begin{aligned} R(2^{n-1} - 1, n) = -(&R(2^{n-1} - 2, n)\, a(2^{n-1} - 1, n) + \cdots \\ &+ R(i - 1, n)\, a(i, n) + \cdots + R(1, n)\ a(2, n) + \\ &+ (2^{n-1} - 1)\, a(1, n)), \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} R(l, n) = -(&R(l - 1, n)\, a(2^{n-1} - 1, n) + \cdots \\ &+ R(l - i, n)\, a(2^{n-1} - i, n) + \cdots + R(l - 2^{n-1} + 1, n)\, a(1, n)), \end{aligned} \tag{5.5}$$

$l = 2^{n-1}, \cdots, 2^n - 2$.

По доказанному, $\operatorname{ord}_2 a(i, n) = S(i) - 1$; по предположению индукции, $\operatorname{ord}_2 R(l, n) = n - 1 - S(l),\ 1 \leqslant l \leqslant 2^{n-1} - 2$.

Пусть $l = 2^{n-1} - 1$. Докажем, что в правой части (5.4) все слагаемые, кроме последнего, равного $2^{n-1} - 1$, четны:

$$\operatorname{ord}_2 R(i - 1, n)\, a(i, n)) = (n - 1 - S(i - 1)) +$$
$$+ (S(i) - 1) \geqslant 1, \text{ так как } S(i - 1) \leqslant n - 2,\ i \leqslant 2^{n-1} - 1.$$

Итак, при $l = 2^{n-1} - 1$ утверждение доказано.

Пусть теперь оно доказано для всех номеров, меньших l, где $2^{n-1} \leqslant l \leqslant 2^n - 2$, и докажем его для l. В (5.5) порядок каждого слагаемого

$$\operatorname{ord}_2(R(l-i, n)a(2^{n-1}-i, n)) = (n-1-S(l-i)) + (S(2^{n-1}-i)-1) \geqslant \geqslant n-1-S(l),$$

так как $S(2^{n-1}-i) + S(l) \geqslant S(l-i) + 1$, причем равенство равносильно тому, что число $C^l_{2^{n-1}+l-i}$ нечетно. Осталось воспользоваться 5.6. Теорема доказана.

5.10. *Замечание.* Воспользовавшись доказанной теоремой и выражением дискриминанта полинома через его степенные суммы [5], нетрудно показать, что дискриминант

$$D_n = \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant 2^{n-1}} (b_{i,n} - b_{k,n})^2$$

полинома q_n при $n \geqslant 2$ есть число нечетное.

5.11. Приведем еще одно утверждение, касающееся чисел A_l. Для этого заметим, что, по доказанному, $\operatorname{ord}_2 2^l A_l = l - S(l) = \operatorname{ord}_2(l!) \geqslant 0$, т. е. $N_l = 2^l A_l$ — целое число ($l \in \mathbf{N}$).

Теорема. *Для любых натуральных k, r и простого числа $m > 2$*

$$N_{km^r} = N_{km^{r-1}} \pmod{m^r}.$$

Замечание. Так как $N_1 = 1$, то, в частности, $N_m \equiv 1 \pmod m$ для всех простых $m > 2$.

Утверждение теоремы вытекает из сравнения (частный случай теоремы Эйлера): $2^{km^r - km^{r-1}} \equiv 1 \pmod{m^r}$

и следующего утверждения [6]: если δ_l — сумма l-х степеней корней уравнения $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ с целыми коэффициентами, $a_n \neq 0$, то для любых натуральных k, r и любого простого m

$\delta_{km^r} \equiv \delta_{km^{r-1}} \pmod{m^r}$.

5.12. По модулю доказанной теоремы 5.9. нетрудно вычислить двоичный порядок и коэффициентов B_l разложения функции φ, однолистно отображающей внешность множества M на внешность единичного круга.

Теорема.
$\operatorname{ord}_2 B_l = -(l + 1 + \operatorname{ord}_2(l+1)!) = S(l+1) - 2l - 2,\ l = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Так как $B_0 = \frac{1}{2}$, то при $l = 0$ формула верна. Предположим, что она верна для всех номеров, меньших l, и докажем ее для l. Тождество $\sigma = \frac{\varphi'}{\varphi}$ перепишем в виде:

$$1 - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{lB_l}{c^{l+1}} = \frac{1}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{c^l} \left(c + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{c^l} \right),$$

откуда

$$B_l = -\frac{1}{l+1}\ (A_{l+1} + B_0 A_l + \cdots + B_{l-1} A_1).$$

Имеем при $i = 0, 1, \ldots, l-2$:

$\mathrm{ord}_2 (B_i A_{l-i}) = -(i + 1 + \mathrm{ord}_2 (i+1)!) - S(l-i) = -(i+1) - \mathrm{ord}_2 (i+1)! - (l-i) + \mathrm{ord}_2 (l-i)! = -(l+1) + \mathrm{ord}_2 (l-i)! - \mathrm{ord}_2 (i+1)! > -(l+1) - \mathrm{ord}_2 (l!) = \mathrm{ord}_2 (A_1 B_{l-1})$.

Аналогично $\mathrm{ord}_2 A_{l+1} = -(l+1) + \mathrm{ord}_2 (l+1)! > \mathrm{ord}_2 (A_1 B_{l-1})$. Поэтому $\mathrm{ord}_2 B_l = -\mathrm{ord}_2 (l+1) + \mathrm{ord}_2 (A_1 B_{l-1}) = -(l + 1 + \mathrm{ord}_2 (l + 1!)$).

Теорема доказана.

Следствие. $B_l \neq 0$, $l = 0, 1, 2, \ldots$.

5.13. Аналогично доказывается

Теорема.

$$\mathrm{ord}_2 C_{2l+1} = \mathrm{ord}_2 B_{2l+1} = S(l+1) - 4l - 4,$$

$l = 0, 1, \ldots$.

В частности, $C_{2l+1} \neq 0$. По-видимому, все нулевые члены последовательности (C_l) даются формулой из п. 4.6.

6. **Линейный метод вычисления моментов.** 6.1. Мы продолжаем рассматривать случай $P = 2$. Напомним, что A_l есть l-й момент меры μ

Последовательность $(A_l)_{l \geqslant 0}$ можно находить, вычисляя сначала коэффициенты $a(k, n)$ полинома q_n, и затем пользуясь формулой п. 3.1. Соответствующие рекуррентные формулы нелинейны.

Здесь мы опишем линейный алгоритм вычисления A_l, который нетрудно реализовать на ЭВМ.

6.2. Определение. *Пусть $n \in \mathbf{N}$, $n = \sum_{i=0}^{l} \varepsilon_i 2^i$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ — двоичное разложение n; n-м элементарным полиномом $d_n(c)$ назовем произведение*

$$d_n(c) = \prod_{\varepsilon_i = 1} f_c^i(c) = \prod_{k=0}^{l} (f_c^k(c))^{\varepsilon_k}. \tag{6.1}$$

Кроме того, положим $d_0(c) \equiv 1$,

6.3. Так как $\deg f_c^k(c) = \deg q_{k+1}(c) = 2^k$, то $\deg d_n = n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. Поэтому любой полином $F(c)$ есть конечная линейная комбинация системы $(d_n(c))_{n \geqslant 0}$ 0. В частности, для каждого $n \in N$ существует вектор $(\alpha(i, m))_{i=0}^{m}$ такой, что

$$c^m = \sum_{i=0}^{m} \alpha(i, m)\, d_i(c); \tag{6.2}$$

так как $d_i(0) = 0\ (i \geqslant 1)$, то $\alpha(0, m) = 0$.

Итак,

$$A_m = \int c^m d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha(i,m) \int d_i(c)\, d\mu. \tag{6.3}$$

6.4. **Лемма.** *Пусть* $k \in \mathbf{N}$.

(а) Если $n \neq 2^k - 1$, то

$$\int d_n(c)\, d\mu = 0.$$

(б) Если $n = 2^k - 1$, то

$$\int d_n(c)\, d\mu = 1 - \frac{1}{2^k}.$$

Доказательство. (а) вытекает из п. 3.2. (при $p = 2$).

(б) Пусть $n = 2^k - 1$. Тогда $d_n(c) = q_1(c) \cdot \ldots \cdot q_k(c)$.

В силу п.п. 2.3. 3.1,

$$\int q_1 \cdot \ldots \cdot q_k\, d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} q_1 \cdot \ldots \cdot q_k \left(\frac{q_k'}{2^{k-1} q_k} + \frac{D_k}{c^{2^k}} + \cdots \right) dc =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (c^{2^k - 1} + \cdots) \left(\frac{D_k}{c^{2^k}} + \cdots \right) dc = D_k.$$

Найдем D_k:

$$\frac{\ln q_{k+1}}{2^k} = \frac{\ln q_k}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} \ln\left(1 - \frac{c}{q_k^2}\right) =$$

$$= \frac{\ln q_k}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k}\left(-\frac{c}{q_k^2} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{q_k^4} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{\ln q_k}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k}\left(-\frac{1}{c^{2^k - 1}} + \cdots\right),$$

$$\frac{q_{k+1}'}{2^k q_{k+1}} = \frac{q_k'}{2^{k-1} q_k} + \frac{2^k - 1}{2^k} \cdot \frac{1}{c^{2^k}} + O\left(\frac{1}{c^{2^k+1}}\right),$$

т. е. $D_k = \dfrac{2^k - 1}{2^k}$.

6.5. Итак, в (6.3) осталось найти рекуррентные соотношения для $\alpha(t, m)$.

6.6. Для удобства записи вместо $d_n(c)$ будем иногда писать $d(n)$, опуская c.

Лемма. *При* $n > 0$

$$c \cdot d(n) = \sum_{r=0}^{\operatorname{ord}_2 (n+1)} d(n + 2 - 2^r).$$

Доказательство проводится индукцией по числу $k = \operatorname{ord}_2(n+1)$, которое есть число единиц до первого нуля в двоичном разложении числа n.

6.7. Каждой последовательности $\bar{a} = (a(n))_{n>0}$, $a(n) \in \mathbf{C}$ сопоставим формальный ряд

$$\sum a(n)\, d_n(c).$$

Лемма. *Пусть сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a(2^k - 1).$$

Тогда

$$c \sum_{n=0}^{\infty} a(n)\, d_n(c) = \sum_{m=1}^{\infty} b(m)\, d_m(c),$$

где

$$b(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a(2^k - 1),$$

$$b(m) = \sum_{k=0}^{\operatorname{ord}_2(m-1)} a(m + 2^k - 2),\ m \geqslant 2.$$

Доказательство. Пользуемся п. 6.7:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b(m)\, d_m(c) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \sum_{k=0}^{\operatorname{ord}_2(n+1)} d(n + 2 - 2^k).$$

Пусть $n + 2 - 2^k = m$, где $0 \leqslant k \leqslant \operatorname{ord}_2(n+1)$. Тогда $n = m + 2^k - 2$, $n + 1 = (m-1) + 2^k$, и поэтому $k \leqslant \operatorname{ord}_2(m-1)$. Следовательно,

$$b(m) = \sum_{k=0}^{\operatorname{ord}_2(m-1)} a(m + 2^k - 2).$$

Осталось заметить, что при $m = 1$ $\operatorname{ord}_2(m-1) = +\infty$.

6.8. Следствие. *Положим* $\alpha(1,1) = 1$, $\alpha(l, 1) = 0$, $l \geqslant 2$.

$$\alpha(l, m+1) = \sum_{k=0}^{\operatorname{ord}_2(l-1)} \alpha(l + 2^k - 2, m);\ m, l \in \mathbf{N}.$$

Тогда

$$A_m = \sum_{2^k \leqslant m+1} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \cdot \alpha(2^k - 1, m).$$

6.9. Отсюда сразу следует, что $0 < A_m < A_{m+1}$. Вычисления на машине позволяют предположить, что в рассматриваемом случае ($p = 2$) асимптотически

$$A_m \sim \text{const} \cdot 2^m \cdot m^{-\gamma};\ B_m \sim \text{const} \cdot 2^m \cdot m^{-1-\gamma},\ \gamma \approx 0{,}48.$$

Список литературы: 1. *Любич М. Ю.* Динамика рациональных преобразований: топологическая картина // Успехи мат. наук. 1986. **41**, вып. 4. С. 35—95. 2. *Левин Г. М.* О бифуркационном множестве параметров семейства квадратичных отображений // Приближ. методы исследования дифференц. уравнений и их прил. К., 1982. С. 103—109. 3. *Левин Г. М.* О нерегулярных значениях параметра семейства полиномиальных отображений // Успехи мат. наук. 1982. **37**, вып. 3. С. 189—190. 4. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры. М., 1973. 334 с. 5. *Мишина А. П., Проскуряков И. В.* Высшая алгебра. М., 1965. 300 с. 6. *Bisht C. S.* Some congruence properties of generalized Lucas integer sequences //Fibonacci Quart. 1984. **22**, № 4. P. 290—295.

Поступила в редколлегию 30.10.86